师范大学现代数学丛书

跳过程与粒子系统

陈木法 著

北京师范大学出版

北京师范大学现代数学丛书

跳过程与粒子系统

陈木法　著

北京师范大学出版社

北京师范大学现代数学丛书
跳过程与粒子系统
陈木法　著
•
北京师范大学出版社出版
新华书店北京发行所发行
国营五二三厂印刷
•
开本：850×1168　1/32　印张：16.75字数：410 千
1986 年 8 月第 1 版　　1986 年 9 月第 1 次印刷
印数：1— 4,000
统一书号：13243·109　定价：(平)3.20 元
(精)4.70 元

内 容 简 介

本书介绍了近年来在跳过程和粒子系统两方面的一些研究进展. 以作者本人的工作为基本线索，同时介绍了有关的国内、国外同行的成果. 本书的主要部分是自给自足的，只需测度论基础、随机过程和泛函分析的初步知识.

读者对象是科学技术工作者、高等院校理工科师生.

前　言

跳过程（又称q过程）和粒子系统（又称无穷质点马氏过程）在自然科学的许多领域里有着广泛的应用．前者的研究已有相当长的历史，而后者只是十五年前才诞生的新方向，两个方面都在迅速发展，都有丰富的文献．我们不可能总结这两个方向的全部重要成果，而着重于两者之间的渗透，这反映了我们工作的特点．换言之，本书的目的是总结作者及有关的国内、外同行的研究成果，而以国内的工作为主．关于所研究的问题的背景，请见引论．

1982—1983年间，作者在美国进修、访问期间，曾应邀在科罗拉多（Colorado）大学和加利福尼亚大学洛杉机分校作过一些演讲，介绍我们的工作，为此，整理过一份讲义．这成了本书的前身．近两年来，我们在粒子系统方面的研究取得了新的进展；同时也提出了一些新问题，这促使作者完成本书．希望拙著能有助于促进这方面的研究．由于时间仓促，恐有不少谬误，恳请随时指正，以便改正．

借此机会，作者衷心地感谢严士健教授和侯振挺教授多年来的辛勤培养，多方面的教育和帮助；感谢王梓坤教授、杨向群教授和胡迪鹤教授的许多宝贵的帮助；感谢刘秀芳副教授和教研组许多老师的大力支持；感谢丁万鼎、郑小谷、唐守正同志的帮助．感谢 K. L. Chung, R. Holley, T. M. Liggett, D. W. Stroock 和 F. Spitzer 教授的帮助．同时，作者衷心地感谢那些有贡献于本书的学者们和曾经帮助过作者、这里没能一一指名的同志们．

本书写作期间，曾部分地得到教育部重点学科发展项目和中山大学高等学术研究中心的资助．

陈木法

1985 年于北京．

目　录

引　论

在本引论里，我们将尽可能初等地介绍本书研究的问题的背景、意义和主要内容．希望能有助于了解全书的概貌．最后，我们将介绍本书内容的布局．

§1 Q 过程

设 $E=\{0,1,2,\cdots\}$．称 $E\times E$ 上的矩阵 $P(t)\equiv(P_{ij}(t):i,j\in E)$ $(t\geqslant0)$ 为一个跳过程，如果

(i) $P_{ij}(t)\geqslant0$, $i,j\in E$, $t\geqslant0$;

(ii) $\sum_j P_{ij}(t)\leqslant1$, $i\in E$, $t\geqslant0$;

(iii) $P_{ij}(t+s)=\sum_k P_{ik}(t)P_{kj}(s)$, $i,j\in E$, $t,s\geqslant0$;

(iv) $\lim_{t\searrow0}P_{ij}(t)=\delta_{ij}$, $i,j\in E$.

此处

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & 如\ i=j,\\ 0, & 如\ i\neq j.\end{cases}$$

如果对于一切 $i\in E$，(ii) 中等号成立，则称 $P(t)$ 是不断的，否则称为中断的．

可以证明（参看第一章），极限

(1) $\lim_{t\searrow0}(1-P_{ii}(t))/t\equiv q_i$, $\lim_{t\searrow0}P_{ij}(t)/t\equiv q_{ij}$, $i\neq j$

总存在，而且满足

(2) $0 \leqslant q_i \leqslant \infty$; $0 \leqslant q_{ij} < \infty, i \neq j$; $\sum_{j \neq i} q_{ij} \leqslant q_i$.

我们称满足 (2) 的矩阵 $Q=(q_{ij}: i, j \in E)$ 为一个 Q 矩阵. 由于 (1), 我们也把跳过程 $P(t)$ 称为 Q 过程.

跳过程在自然科学的许多领域中有着广泛的应用 (例如 A. Я. Хинчин[1], A. T. Bharucha-Reid[1], H. Haken[1], G. Nicolis and I. Prigogine[1]等). 然而, 在实际模型中, 我们能够首先得到的是 $Q=(q_{ij})$, 而不是 $P(t)$. 一般地, 我们可以简单地写出 (q_{ij}), 但却不能给出 $P(t)$ 的显式. 这样, 应用概率论工具来研究这些问题时, 就需要回答:

(3) 问题: 对于给定的 Q 矩阵 (q_{ij}).

(i) Q 过程是否存在?

(ii) 若存在, 何时唯一?

(iii) 若存在而非唯一, 如何把一切 Q 过程统统构造出来?

这就是 Q 过程理论所研究的基本问题.

先看一种最简单的情形: $E=\{0,1,2\cdots, N\}$. (q_{ij}) 有限. 则

$$P(t) = e^{tQ}, \quad t \geqslant 0$$

便是唯一的 Q 半群. 这样, 上面的三个问题都解答了. 对于 E 为可列无限集时, 问题远非如此简单, 事实上, 对于最一般的情形, 到现在为止, 上述三个问题还没有一个是彻底解决的. 然而, 近半个世纪以来, 经过许多概率论学家的努力, 取得了丰富的成果.

回顾一下主要的进展历程将是有趣的. 对于任给的一个全稳定 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$ (全稳定意指: $q_i<\infty, i \in E$), Q 过程的存在性早已由 W. Feller (1940) [1] 和 J. Doob (1945) [1] 解决. 若再设 Q 保守, 即 $\sum_{j \neq i} q_{ij} = q_i$, $i \in E$, 则唯一性也由 W.

Feller[3] 和 G.E.H. Reuter[1] 在 1957 年同时解决。全稳定情形的一般唯一性准则直到 1974 年才由侯振挺 [1] 得到。这就是荣获 1978 年度英国 Davidson 奖的侯氏定理。这些结果已被推广到一般的状态空间，详见本书的第二、三章。

上面的存在性和唯一性都允许 $P(t)$ 中断。然而，实际中需要的常是不中断的 Q 过程。而且，物理学家往往更有兴趣于满足柯氏向前方程

$$P'_{ij}(t)=\sum_k P_{ik}(t)q_{kj}$$

的 Q 过程。类似地有柯氏向后方程：

$$P'_{ij}(t)=\sum_k q_{ik}P_{kj}(t).$$

这样，按照 Q 过程是否中断，是否满足柯氏向前、向后方程，可将 Q 过程分为许多种类型。针对每一种 Q 过程，研究相应的存在、唯一性问题，这就构成了 Q 过程的定性理论。它是第四章所研究的主题。

关于问题 (3) . (iii)，我们只讨论了有势情形的构造问题（参见下节）。对于一般Q过程的构造问题本书很少涉及。有兴趣的读者可以参考专著王梓坤[2]和杨向群[1]。

应当指出，本书基本上只限于讨论全稳定情形。对于含瞬时态（即存在 $i\in E$ 使 $q_i=\infty$）情形，目前所知的结果还不很多*)。但我们乐意于此说明一下 D. Williams[2, 3]的一个出色的结果：

(4) **定理** 设 $Q=(q_{ij})$ 是一个全瞬时 (即 $q_i=\infty$, $i\in E$) Q 矩阵，则 Q 过程存在的充要条件是

(i) $\sum_{j\notin\{a,b\}} q_{aj}\wedge q_{bj}<\infty$, $a\neq b$;

*) 陈、程[1]用非标准分析研究含瞬时态 Q 过程。新近侯振挺、陈安岳等又获得一些进展。

(ii) 存在 E 的无穷子集 J，使

$$\sum_{j\in J\setminus\{i\}} q_{ij}<\infty,\ i\in E$$

同时成立．若 Q 过程存在，则必定也存在不断的 Q 过程．

§2 有势Q过程

在实际中，人们对于一类特殊的 Q 过程——可逆 Q 过程有着浓厚的兴趣．为说明这一问题，有必要先谈一下可逆马氏链（跳过程）的概念．

设 $(X_t)_{t\geq0}$ 是定义在 $(\Omega,\ \mathscr{F},\ \boldsymbol{P})$ 上、取值于 E 的马氏链．如果对于一切的 $0\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_n$ 和一切的 $i_1,\ \cdots,i_n\in E$，都有

$$\boldsymbol{P}[X_{t_1}=i_1,\ \cdots,\ X_{t_n}=i_n]=\boldsymbol{P}[X_{t_1}=i_n,\ \cdots,\ X_{t_n}=i_1]$$

则称过程 $(X_t)_{t\geq0}$ 是可逆的．

如果过程 $(X_t)_{t\geq0}$ 有平稳分布 μ，则它可逆的充要条件是

(5) $\mu_iP_{ij}(t)=\mu_jP_{ji}(t),\ i,\ j\in E,\ t\geqslant0.$

因此，我们只要研究（5）．此时称 (μ_i) 为 (X_t) 的可逆测度．如果把（5）式中的概率 (μ_i) 放宽为不必可和的情形，则称 $P(t)$ 关于 (μ_i) 有势（可配称），而称 (μ_i) 为一个配称列．

这样，关于有势 Q 过程，同样有（3）中所述的三个基本问题．第七章研究的是头两个问题．第九章研究的是第三个问题，即构造问题．而为研究有势 Q 过程的构造，需要探讨最小 Q 过程中断时，过程跑到无穷（或流出到边界）的方式．换言之，需要研究边界理论．这正是第八章的主题．我们介绍了 Feller 边界理论．另一种十分重要的边界理论——Martin 边界，本书很少涉及．有兴趣的读者可以参考 G.A.Hunt[1]E. B. Dynkin[2]．在侯振挺、郭青峰[2] 和杨向群 [1] 的专著中，有更深入的研究．

对于有势 Q 过程，有一个不同于一般 Q 过程的问题：如何寻找出一切配称列．这个问题由于引进了场论的工具而得到解决．详见第十章．场论也是研究无穷粒子系统的有力的工具．在下一节里，我们将提到这一点．

§3 无穷粒子系统

让我们先从简单例子开始．试看取值于 $\{-1, 1\}$ 的两个状态的连续参数马氏链，它的 Q 矩阵为

$$Q=(q(x, y))=\begin{pmatrix}-b & b\\ a & -a\end{pmatrix}$$

写成算子形式，就是

$$\Omega F(x)=\sum_{y}q(x, y)(f(y)-f(x)),$$

我们排除 $ab=0$ 的无味情形．那么，$|\mathscr{I}|=1$．即不变测度的个数（不计常数因子）只有一个．

上述例子是单粒子模型．这个粒子只有两种状态 ±1．我们可以理解为磁分子的南、北极等等．若考虑有很多个粒子系统，例如说 N 个，那么状态空间就是 $\{-1, 1\}^N$．此时也有同样的结果：$|\mathscr{I}|=1$．详见第十二、十三章．

如果考虑无穷粒子系统，情况如何呢？假设在每一个 d 维整点 $u\in \boldsymbol{Z}^d$ 上，有一个粒子．它有 $\{-1, 1\}$ 两个状态．那么，这个系统的状态空间就是 $E\equiv\{-1, 1\}^{\boldsymbol{Z}^d}$．它是不可数的、从而不能用 Q 过程来刻画．现在，我们改用 $c(u, x)$ $(u\in \boldsymbol{Z}^d,\ x\in E)$ 表示在位置 $u\in \boldsymbol{Z}^d$ 处的粒子改变状态的速率．那么，过程的无穷小算子可以形式地写成

$$\Omega f(x)=\sum_{u\in Z^d}c(u, x)[f(_ux)-f(x)]$$

此处

$$ {}_u x(v)=\begin{cases} x(v), & 如\ u\neq v,\\ -x(v), & 如\ u=v. \end{cases} $$

这称为自旋变相过程。特别地，取

$$ c(u,\ x)=\exp[-\beta\sum_{v:\|v\|=1}x(u)x(u+v)] $$

我们得到 Ising 模型。此处 $\beta\geqslant 0$，而 $\|\cdot\|$ 表普通的欧氏范数。此时，与有限系统完全不同的现象出现了！例如说，当 $d=2$ 时：

$$ |\mathscr{I}|=1,\ 如\ \beta<\frac{1}{2}\log(1+\sqrt{2})\approx 0.44, $$

$$ |\mathscr{I}|>1,\ 如\ \beta>\frac{1}{2}\log(1+\sqrt{2}). $$

对于 $d\geqslant 3$ 的情形，也存在类似的现象。但当 $d=1$ 时，$|\mathscr{I}|=1$.

Ising 模型是1925年提出来的。物理学家认为：当 $d\geqslant 2$ 时，Ising 模型必定存在相变。所谓相变，也许可以通俗地拿水来解释。当水温逐渐升高到 $\beta\equiv 100$℃时，水由液态变成气态。这就叫发生了相变。这里，100℃是临界值。我们注意，一个水分子不可能发生相变，因此，我们研究的是大量水分子的整体现象，这是与先前只研究单个或有限多个粒子运动的最主要的区别。关于二维 Ising 模型，到了 1952 年李政道和杨振宁［1］的工作之后，大多物理学家认为已告完成（参考 B.M.Mccoy,T.T.Wu［1］）。然而，上面所介绍的方法并不是物理学家的方法。后者所用的是所谓热力学极限。而概率论学家则直接构造无穷维空间上的随机过程，用不变测度的唯一和非唯一的分界来刻画相变（还有其它形式的刻画）。但两者所得的结果完全一致。这表明无穷粒子系统的研究有着重要的意义，因而得到许多数学物理学家的重视。有兴趣的读者可以参考综述文章 R.L.Dobrushin and Ya.G.Sinai［1］，R. Durrett［1］，T. M.Liggett 新近的专著

[3]和严士健[1].

对于 Ising 模型，之所以能够得到这么好的结果，主要有如下两个原因：

(i) $\{-1, 1\}^{Z^d}$依乘积拓扑是紧空间，从而$|\mathscr{I}|\geqslant 1$；

(ii) Ising 模型是可逆的。

关于 (ii)，或更一般的无穷粒子系统的可逆性问题，国内已完成比较系统的工作。详见第十章。

应该说，Ising 模型是属于平衡态统计物理的。那么，自然要问：能否使用这一工具处理当今统计物理学家较普遍关心的"非平衡统计"，下面是其中的一个模型（略有简化）

(6) Schlögl **模型**：状态空间是

$$E=\{0,1,\cdots\}^{Z^d},\ d\geqslant 1.$$

它是不可数且既非局部紧，也非δ-紧。算子是

$$\begin{aligned}\Omega f(x)=&\sum_{u\in Z^d}(\lambda_1 x(u)^2+b)[f(x+e_u)-f(x)]\\&+\sum_{u\in Z^d}\lambda_2 x(u)^3[f(x-e_u)-f(x)]\\&+\sum_u\lambda_3 x(u)\sum_v P(u,v)[f(x-e_u+e_v)-f(x)]\end{aligned}$$

此处λ_1，λ_2，λ_3，$b>0$。（$P(u,v):u,v\in Z^d$）是一个转移概率矩阵。这个算子Ω不是可逆的。它提供了一种数学上十分吸引人的无穷粒子系统的新模型。

我们关心这类问题已有多年（例如见严士健、李占柄[1]）；然而，首先需要解决的存在性问题，都是最近才完成的，详见第六章。作为基本工具——耦合，现在也已搞清楚了。详见第五章。虽然我们也有一些关于相变的工作(如丁万鼎、郑小谷[1])，但我们还没能回答 Schlögl 模型的相变的存在性问题。这有待于进一步的努力。关于粒子系统平稳分布的存在性、唯一性和遍历

性见第十四章。

本书依照所研究的问题的性质分为三篇：存在性和唯一性，可配称和可逆性，常返性和遍历性。之所以这样做，其一是因在同一篇中，我们总是先研究跳过程，然后使用所得到的方法和结果来研究粒子系统。两者联系紧密。其二是因只对某一课题有兴趣的读者，并没有必要读完全书。当然，这也带来一个毛病，即从横向看，关于粒子系统的讨论显得分散了一些。有时，为突出主题，我们也常把主要部分尽可能地提前，而把技术性部分放到后面去处理。

在每章之末的补充与注记里，我们给出了一些个人认为比较重要的未解决问题。

第 一 篇

存 在 性 和 唯 一 性

第一章　转移函数及其拉氏变换

本章首先研究跳过程的转移函数的基本性质：连续性和可微性，由此导出跳过程转移速率的刻画——q 对，最后，我们讨论跳过程的转移函数及其 Laplace 变换之间的一一对应关系。它使得我们可以广泛地使用拉氏变换这一基本工具。

§ 1.1　转移函数的基本性质

除非另有申明，本书将使用如下记号：

$(E,\ \mathscr{E})$ 是任意的可测空间，其中 σ 代数 $\mathscr{E}$ 包含一切单点集 $\{x\}(x\in E)$（这无损于一般性。否则，只需用商空间 $(\dot{E},\ \dot{\mathscr{E}})$ 代替 $(E,\mathscr{E})$。）。我们将用 $_r\mathscr{E}$（相应地，$_r\mathscr{E}_+$，$_b\mathscr{E}$，$_b\mathscr{E}_+$，$\mathscr{E}_+$）表示实值可测（相应地，非负实值可测，有界实值可测，有界非负可测，非负可测）函数的全体，并用 $\mathscr{L}$（相应地，$\mathscr{L}_+$，$\overline{\mathscr{L}}_+$）表示 σ 可加实值集函数（相应地，有限测度，σ 有限测度）的全体。

(1.1.1) **定义**　称 $P(t,x,A)(t\geqslant 0,x\in E,A\in\mathscr{E})$ 是一个跳过程（又称纯间断型马氏过程）的转移函数，如果它满足

(i) 对于每 $t\geqslant 0$ 和 $A\in\mathscr{E}$，$P(t,x,A)$ 是 x 的 $\mathscr{E}$ 可测函数；

(ii) 对于每 $t\geqslant 0$ 和 $x\in E$，$P(t,x,\cdot)\in\mathscr{L}_+$ 且 $P(t,x,E)\leqslant 1$；

(iii) Колмогоров－Chapman 方程：对于每 $t,\ s\geqslant 0,x\in E$ 和 $A\in\mathscr{E}$，

$$P(t+s,\ x,\ A)=\int P(t,\ x,\ dy)P(s,\ y,\ A);$$

(iv) 对于每 $x\in E$ 和 $A\in\mathscr{E}$,

$$\lim_{t\searrow 0} P(t,x,A)=P(0,x,A)=\delta(x,A);$$

此处

$$\delta(x,A)=\begin{cases}1, & 如\ x\in A,\\ 0, & 如\ x\notin A.\end{cases}$$

在许多情况下，我们不区别具有同一转移函数的各种跳过程。因此，我们也称一个跳过程的转移函数为跳过程。特别，当 E 是一个可列集时，称之为马链，并可写成矩阵形式 $(P_{ij}(t): i,j\in E)$ 。称跳过程 $P(t,x,A)$ 是不断的（又称诚实的），如果对于每 $t\geqslant 0$ 和 $x\in E$,

$$P(t,x,E)=1.$$

否则，称为中断的。

(1.1.2) **定理** 对于每一个 x, $P(t,x,A)$ 是 t 的一致连续函数，而且此一致连续性关于 A 也是一致的。换言之，对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使当 $t,s\geqslant 0$, $|t-s|<\delta$ 时，对于任何的 $A\in\mathscr{E}$，都有

$$|P(t,x,A)-P(s,x,A)|<\varepsilon.$$

证 由上述定义中的 (iii) 和 (ii) 得

$$\begin{aligned}&|P(t+h,x,A)-P(t,x,A)|\\ &=\left|\int_{\{y\neq x\}} P(h,x,dy)P(t,y,A)\right.\\ &\qquad\left.-P(t,x,A)\,(1-P(h,x,\{x\}))\right|\\ &\leqslant 1-P(h,x,\{x\}).\end{aligned}$$

最后一步用到如下初等不等式：若 $a,b\in[0,c]$ 则 $|a-b|\leqslant c$. 于是，由上式得

$$|P(t,x,A)-P(s,x,A)|\leqslant 1-P(|t-s|,\ x,\ \{x\}).$$

由此及上述定义中的 (iv) 立得本定理。 ∎

称 E 是一个 Polish 空间，如果它是可分拓扑空间，且可距

离化为完备空间。一般地，如E赋有拓扑结构，我们总取$\mathscr{E}$为E上的Borel σ代数（即拓扑生成的σ代数）。

(1.1.3) **定理** 设 $(E, \mathscr{E})$ 是一个Polish空间，$P(t,x,A)$ 是其上的跳过程。那么，对于每$x\in E$和$A\in\mathscr{E}$，或者$P(\cdot,x,A)=0$或者$P(\cdot,x,A)>0$。

证 如果$P(t,x,A)$中断，我们可以引进一个虚构状态$\triangle\notin E$，使$E_\triangle\equiv E\cup\{\triangle\}$成为Polish空间，而且$\triangle$为$E_\triangle$的孤立点。这样，$\mathscr{E}\subset\mathscr{E}_\triangle$。命

$$(1.1.4)\quad \overline{P}(t,x,A) = P(t,x,A\cap E)I_E(x)+(1-P(t,x,E))I_A(\triangle),\quad t\geqslant 0,\ x\in E_\triangle,\ A\in\mathscr{E}_\triangle.$$

那么，我们得到 $(E_\triangle, \mathscr{E}_\triangle)$ 上的一个跳过程 $\overline{P}(t,x,A)$ $(t\geqslant 0, x\in E_\triangle, A\in\mathscr{E}_\triangle)$，它是不断的。显然，若$\overline{P}(t,x,A)$具有定理所述的性质，则 $P(t,x,A)$ $(t\geqslant 0, x\in E, A\in\mathscr{E})$ 亦然。这样，我们只需就不断的跳过程证明之。

首先，由K—C方程（即 (1.1.1)．(iv)）知，

$$P(t+s, x, A)\geqslant P(t, x, \{x\})P(s, x, A),$$

于是，若$P(t, x, A)>0$，则对于一切$s>t$，$P(s, x, A)>0$。由此及$P(\cdot,x,A)$的连续性立知：存在$u(x,A)\in[0, \infty]$，使得

$$P(t,x,A)=0,\quad \text{如 } 0<t\leqslant u(x,A),$$
$$P(t,x,A)>0,\quad \text{如 } t>u(x,A).$$

我们要证的是：对于每$x\in E$和$A\in\mathscr{E}$，或者$u(x,A)=0$；或者$u(x,A)=\infty$。

反证之。设有x和A，使

$$(1.1.5)\qquad 0<u(x,A)<\infty.$$

以下固定这个x和A。简记$u_0=u(x, A)$，$u(y)=u(y,A)$。并令$v(y)=u(y)\wedge u_0$。易见u和v都是可测的。由于$(E,\mathscr{E})$

是 Polish 空间，因此，我们可构造一个以 $P(t,x,\cdot)$ 为转移函数的马氏过程 $X(t)$，使 $X(0)=x$（参见 Neveu[1], p83 推论）．命

$$Y_0(t)=v(X(t))\ .$$

则 $Y_0(0)=u_0$，$0\leqslant Y_0(t)\leqslant u_0$．而且

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{P}[Y_0(t+h)=Y_0(t)]\\&\geqslant\int P(t,x,dy)P(h,y,\{y\})\ .\end{aligned}$$

由控制收敛定理知，当 $h\searrow 0$ 时，上式右方趋于 1．这样，Y_0 依概率连续，故可选可分、可测修正 Y，使得 $0\leqslant Y(t)\leqslant u_0=Y(0)$．我们将证明：存在 $\varLambda\in[0,\infty)$ 使 $\boldsymbol{P}(\varLambda)=0$，而且

(1.1.6) $Y(t)\geqslant u_0$，在 $\varLambda^c$ 上，$t\geqslant 0$，

这等于说 $P(t,x,\{y:u(y)<u_0\})=0$，$t\geqslant 0$．

但当 $x\in A$ 时，$u(x)=0$，故由上式得

$$P(t,x,A)=0,\ t\geqslant 0.$$

这矛盾于 (1.1.5)．

下面，我们分三步来完成 (1.1.6) 的证明．

(a) 试证 $Z(t)\equiv Y(t)+t$ 是 t 的非减函数．

先证：

(1.1.7) $P(h,y,\{z:v(z)<v(y)-h\})=0$，$h>0$．

当 $h\geqslant v(y)$ 时，此式平凡．无妨设 $0<h<v(y)$．由于 $v(y)\leqslant u(y)$，从而

$$0=P(v(y),\ y,\ A)=\int P(h,y,dz)P(v(y)-h,\ z,A)$$

但若 $v(z)<v(y)-h$，则 $P(v(y)-h,\ z,\ A)>0$，故由上式立得 (1.1.7)．然后，由 (1.1.7) 得

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{P}[Y(t+h)<Y(t)-h]\\&=\int P(t,x,dy)P(h,y,\{z:v(z)<v(y)-h\})=0.\end{aligned}$$

这表明

$$Y(t+h)\geqslant Y(t)-h,\quad P\text{—}a.s.$$

由可分性，我们可以选择一个例外集，使得上式对于一切 $t,h\geqslant 0$ 成立。不影响下面的讨论，我们将略去这个例外集，这便得到（a）。

（b）试证：存在例外集 Λ，使得

$$Z'(t)=1,\quad a.e.t.$$

首先，因 $Z(t)$ 非减，故导数 $Z'(t)$ 几乎处处存在。为计算 $Z'(t)$，命

$$\triangle(t,h)=P[Y(t+h)\neq Y(t)\}.$$

前面已证

$$\lim_{h\to 0}\triangle(t,h)=0,\quad t\geqslant 0.$$

于是由控制收敛定理得

$$\lim_{h\to 0}\int_0^\infty\triangle(t,h)e^{-t}dt=0.$$

这样，我们可选序列 $\{h_n\}$，$h_n\to 0$，使

$$\sum_n\int_0^\infty\triangle(t,h_n)e^{-t}dt<\infty.$$

利用 Fubini 定理得：存在零集 N，使

$$\sum_n\triangle(t,h_n)<\infty,\quad t\notin N.$$

然后由 Borel－Cantelli 引理知，

$$P[Y(t+h_n)=Y(t),\text{ 一切充分大的 } n]=1,\quad t\notin N$$

这表明

$$P\left[\overline{\lim_{n\to\infty}}h_n^{-1}(Z(t+h_n)-Z(t))=1\right]=1,\quad t\notin N.$$

故由 Fubini 定理立得（b）。

（c）试证（1.1.6）.

由（a）和（b）知，存在P零集 Λ，使得

$$Z(t)-Z(0)\geqslant\int_0^t Z'(s)ds=t,\qquad 在\ \Lambda^c\ 上,\ t\geqslant 0.$$

此即是 (1.1.6)． ▌

§1.2 q 对

本节中，除非另有声明外，我们将假定：对角线集 $\{(x,x): x\in E\}\in\mathscr{E}\times\mathscr{E}$．当 E 是 Hausdorff 空间而 $\mathscr{E}$ 为 Borel σ 代数时，这个假定是自然满足的．（见关肇直 [1]，p 49．定理 7）（若 $\mathscr{E}$ 可数生成，此条件也满足）．

(1.2.1) **定理** 对于每 $x\in E$，极限

(1.2.2) $$q(x)\equiv\lim_{t\searrow 0}\frac{1-P(t,x,\{x\})}{t}\leqslant\infty$$

存在，而且 $q(x)$ 是 $\mathscr{E}$ 可测的．此外，对于每 $x\in E$ 和 $t\geqslant 0$，有

(1.2.3) $P(t,x,\{x\})\geqslant e^{-q(x)t}$.

证 固定 $x\in E$．由 $K-C$ 方程知

$$P(t,x,\{x\})\geqslant\left[P\left(\frac{t}{n},x,\{x\}\right)\right]^n.$$

于是，由 (1.1.1) 的 (iv) 知，当 n 充分大时右方为正，从而 $P(t,x,\{x\})>0$，$t\geqslant 0$．这样，我们可定义

(1.2.4) $f(t)=-\log P(t,x,\{x\})$.

自然有 $0\leqslant f<\infty$．再用一次 $K-C$ 方程，得

$$P(t+s,x,\{x\})\geqslant P(t,x,\{x\})P(s,x,\{x\}).$$

这表明 f 是次可加的：

(1.2.5) $f(t+s)\leqslant f(t)+f(s),\quad t,\ s\geqslant 0.$

对于 t，$h>0$，取 n 使 $t=nh+\varepsilon$，$0\leqslant\varepsilon<h$，则由上式得

$$\frac{f(t)}{t}\leqslant\frac{nf(h)}{t}+\frac{f(\varepsilon)}{t}=\frac{nh}{t}\cdot\frac{f(h)}{h}+\frac{f(\varepsilon)}{t}.$$

命 $h\to 0$，则由 $\dfrac{nh}{t}\to 1$，$f(\varepsilon)=-\log P(\varepsilon,x,\{x\})\to 0$ 得

$$\frac{f(t)}{t}\leqslant \varliminf_{h\searrow 0}\frac{f(h)}{h}.$$

从而

$$\varlimsup_{h\searrow 0}\frac{f(h)}{h}\leqslant \sup_{t>0}\frac{f(t)}{t}\leqslant \varliminf_{h\searrow 0}\frac{f(h)}{h}.$$

这表明

$$(1.2.6)\qquad \lim_{t\searrow 0}\frac{1-P(t,x,\{x\})}{t}$$

$$=\lim_{t\searrow 0}\frac{1-e^{-f(t)}}{t}$$

$$=\lim_{t\searrow 0}\frac{f(t)}{t}=\sup_{t>0}\frac{f(t)}{t}\leqslant\infty.$$

这证得 (1.2.2)．由 (1.2.4) 和 (1.2.6) 得

$$P(t,x,\{x\})=e^{-\frac{f(t)}{t}t}\geqslant e^{-q(x)t}.$$

此即是 (1.2.3)．

往证 $q(x)$ 的可测性．对 $A\in\mathscr{E}\times\mathscr{E}$，以 A_x 表 A 在 x 处的截口，利用单调类定理易证，对于每 $A\in\mathscr{E}\times\mathscr{E}$，$P(t,x,A_x)$ 是 x 的 $\mathscr{E}$ 可测函数．但由假设，$\{(x,\ x):x\in E\}\in\mathscr{E}\times\mathscr{E}$，于是 $P(t,x,\{x\})$ 是 x 的 $\mathscr{E}$ 可测函数．故 $q(x)$ 亦然． ■

下面，我们来研究极限 $\lim\limits_{t\searrow 0}\dfrac{P(t,x,A)}{t}$ $(x\notin A\in\mathscr{E})$ 的存在性．为此，记

$\mathscr{R}=\{A\in\mathscr{E}:\ \lim\limits_{t\to 0}\sup\limits_{x\in A}[1-P(t,x,\{x\})]=0\}$ 那么，我们有如下结果

(1.2.7) **定理**

(i) $\mathscr{R}$ 是一个环，即它对于有限并和差的运算封闭；若 $\sup\limits_{x\in A} q(x)<\infty$，则 $A\in\mathscr{R}$；

(ii) 对于每 $x \notin A \in \mathscr{R}$，极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{P(t,x,A)}{t}\equiv q(x,A)$$

存在，且

(1.2.8) $\quad q(x,A)\leqslant q(x), \qquad x\notin A\in\mathscr{R},$

(iii) 若定义

$$q(x,A)=q(x,A\setminus\{x\}), \quad x\in E, \ A\in\mathscr{R}$$

则 $q(x,A)$ 具有性质：对固定的 x，它是 $\mathscr{R}$ 上的有限测度；对固定 $A\in\mathscr{R}$，它是 x 的 $\mathscr{E}$ 可测函数.

证 易见 $\mathscr{R}$ 是一个环. 由 (1.2.3) 立得 (i) 的后一断言. 如果已证 (ii) 中极限的存在性，则由 $x\notin A$ 知

$$\begin{aligned}0&\leqslant\frac{1-P(t,x,A\cup\{x\})}{t}\\&=\frac{1-P(t,x,\{x\})}{t}-\frac{P(t,x,A)}{t}\\&\to\ q(x)-q(x,A), \qquad A\in\mathscr{R}.\end{aligned}$$

可见 (1.2.8) 成立.

往证极限的存在性. 这是本定理的关键所在. 固定 $x\notin B\in\mathscr{R}$. 证明的基本思路是导出如下不等式

(1.2.9) $\quad \dfrac{P(nh,x,B)}{nh}\geqslant\dfrac{P(h,x,B)}{h}, \quad n=\left[\dfrac{t}{h}\right]$

其中 $[\cdot]$ 表整数部分. 然后令 $h\to 0$，得

$$\frac{P(t,x,B)}{t}\geqslant\varlimsup_{h\to 0}\frac{P(h,x,B)}{h}.$$

进而

$$\varliminf_{t\to 0}\frac{P(t,x,B)}{t}\geqslant\varlimsup_{h\to 0}\frac{P(h,x,B)}{h}.$$

这便导致极限的存在性. 为证 (1.2.9)，即

$$P(nh,x,B)\geqslant nP(h,x,B),$$

自然可依首达 B 对左方进行分解，为此，定义

$$P_B(h,x,A)=P(h,x,A),$$

$$P_B((j+1)h,x,A)=\int_{B^c}P_B(jh,x,dy)P(h,y,A),\quad A\in\mathscr{E}.$$

由归纳法立知

(1.2.10)

$$P(kh,x,A)=\sum_{j=1}^{k-1}\int_B P_B(jh,x,dy)P((k-j)h,y,A)$$
$$+P_B(kh,x,A),k\geqslant 1,\ A\in\mathscr{E}.$$

任给 $\varepsilon>0$，取 $\delta>0$，使当 $t\leqslant\delta$ 时，

(1.2.11) $\quad P(t,y,\{y\})>1-\varepsilon,\quad y\in B\cup\{x\}.$

这是可行的，因为当 $B\in\mathscr{R}$ 时，$B\cup\{x\}\in\mathscr{R}$。现在，假设 $h\leqslant t\leqslant\delta$，取 $n=\left[\frac{t}{h}\right]$，我们将证明如下两个估计：

(1.2.12) $\quad P(nh,x,B)$

$$\geqslant\sum_{k=1}^{n}P_B((k-1)h,x,\{x\})(1-\varepsilon)P(h,x,B)$$

(1.2.13) $\quad \sum_{k=1}^{n}P_B(kh,x,B)\leqslant\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}.$

事实上，在 (1.2.10) 中取 $A=B$，$k=n$，得

(1.2.14) $\quad P(nh,x,B)$

$$=\sum_{k=1}^{n}\int_B P_B(kh,x,dy)P((n-k)h,y,B)\ .$$

注意 $(n-k)h\leqslant nh\leqslant t\leqslant\delta$ 和 $P_B(kh,x,A)\geqslant P_B((k-1)h,x,\{x\})P(h,x,A)$，便得

$$P(nh,x,B)$$
$$\geqslant\sum_{k=1}^{n}P_B((k-1)h,x,\{x\})$$
$$\times\int_B P(h,x,dy)P((n-k)h,y,B)$$

$$\geqslant \sum_{k=1}^{n} P_B((k-1)h, x, \{x\}) P(h, x, B)(1-\varepsilon).$$

此即是（1.2.12）．为证（1.2.13），只需再用一次(1.2.14)，

$$\varepsilon > P(nh, x, B) \geqslant (1-\varepsilon) \sum_{k=1}^{n} P_B(kh, x, B).$$

现在，我们可以得到所需的不等式，首先，在(1.2.10)中取 $A=\{x\}$，$k\leqslant n$，并利用（1.2.13）得

$$1-\varepsilon < P(kh, x, \{x\}) \leqslant \sum_{j=1}^{k-1} P_B(jh, x, B) + P_B(kh, x, \{x\})$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} + P_B(kh, x, \{x\}).$$

从而

$$P_B(kh, x, \{x\}) \geqslant \frac{1-3\varepsilon}{1-\varepsilon}, \quad \varepsilon < \frac{1}{3}.$$

以此代入（1.2.12），得

$$P(nh, x, B) \geqslant n(1-3\varepsilon) P(h, x, B), \quad \varepsilon < \frac{1}{3}.$$

虽然这个估计比（1.2.9）差些，但先令 $h\to 0$，次令 $t\to 0$，最后令 $\varepsilon\to 0$，（1.2.9）之后的论证仍然有效．这便完成了极限存在性的证明．

最后，我们来证明断言（iii）．由于

$$P(t, x, B-\{x\}) = P(t, x, B) - P(t, x, \{x\}) I_B(x)$$

是 x 的 $\mathscr{E}$ 可测函数，因而

$$q(x, B) = \lim_{n\to\infty} \frac{P(t_n, x, B-\{x\})}{t_n}, \quad t_n \to 0$$

亦然．为证 $q(x, \cdot)$ 在 $\mathscr{R}$ 上的 σ 可加性，取 $\{B_n\}\subset\mathscr{R}$, $B_n \downarrow \phi$，无妨设 $x\notin \bigcap_n B_n$，则由前面所证：

$$\frac{1}{1-3\varepsilon} \cdot \frac{P(t, x, B_n)}{t} \geqslant q(x, B_n).$$

于是由 $\lim\limits_{t\to\infty} P(t,x,B_n)=0$ 立知 $\lim\limits_{n\to\infty} q(x,B_n)=0$. ▌

自然要问：何时$\mathscr{R}$上的测度 $q(x,\cdot)$ 可唯一扩张到 $\mathscr{E}$ 上？为此，我们需要如下简单事实。

(1.2.15) **引理**. 设 $(E,\mathscr{E})$ 是任一可测空间，$\{\mu_n\}_1^\infty$ 为其上的任一测度序列，满足

$$\mu_n(A)\nearrow \text{某}\ \mu(A), \quad A\in\mathscr{E}.$$

则 μ 是 $(E,\mathscr{E})$ 上的测度。

证 只需证明 σ 可加性。设 $\{A_j\}_1^\infty\subset\mathscr{E}$ 两两不交，则由

$$\mu\Big(\sum_j A_j\Big)\geqslant\mu_n\Big(\sum_j A_j\Big)\geqslant\sum_{j=1}^m\mu_n(A_j)$$

先令 $n\to\infty$，次令 $m\to\infty$，即得

$$\mu\Big(\sum_j A_j\Big)\geqslant\sum_j\mu(A_j).$$

另一方面

$$\sum_{j=1}^\infty\mu(A_j)\geqslant\sum_{j=1}^\infty\mu_n(A_j)=\mu_n\Big(\sum_{j=1}^\infty A_j\Big)$$

$$\to\mu\Big(\sum_{j=1}^\infty A_j\Big), \quad n\to\infty,$$

故得所欲证断言。 ▌

(1.2.16) **引理** 设存在 $\{E_n\}_1^\infty\subset\mathscr{R}$，使 $\bigcup\limits_n E_n=E$，则对每 $x\in E$，$q(x,\cdot)$ 可唯一扩张到 $\mathscr{E}$ 上。扩张后的 $q(x,\cdot)$ 仍然具有性质：对于每 $A\in\mathscr{E}$，$q(\cdot,A)\in\mathscr{E}$.

(1.2.17) **注** 如果 $\{x\in E: q(x)=\infty\}$ 至多可列，记作 $\{x_1,x_2,\cdots\}$. 则引理 (1.2.16) 的条件满足。事实上，取

$$B_j=\{x\in E: j-1\leqslant q(x)<j\}, \quad j\geqslant1.$$

并命

$$E_j=B_j\cup\{x_j\}, \quad j\geqslant1.$$

则由（1.2.7）．(i) 知 $\{B_j\}\subset\mathscr{R}$，从而 $\{E_j\}\subset\mathscr{R}$．

引理（1.2.16）**之证** 因为$\mathscr{R}$是一个环，而且在所设条件下 $\mathscr{E}=\sigma(\mathscr{R})$，即 $\mathscr{E}$ 是由$\mathscr{R}$生成的最小 σ 代数，从而扩张只要存在、便是唯一的．为证存在性，记

$$V_n=\bigcup_{j=1}^{n}E_j,\ n\geqslant 1.$$

则 $V_n\uparrow E$．命

$$q(x,A)=\lim_{n\to\infty}q(x,AV_n),\ A\in\mathscr{E}.$$

由引理（1.2.15）便知 $q(x,\cdot)$ 是 $\mathscr{E}$ 上的测度．因为 $AV_n\in\mathscr{R}$，从而对每 $A\in\mathscr{E}$，$q(\cdot,A)\in\mathscr{E}$． ▌

基于（1.2.1），（1.2.7）和（1.2.16），我们引出如下概念：

（1.2.18）**定义** 设 $(E,\mathscr{E})$ 是任一可测空间，$\mathscr{E}$ 包含一切单点集 $\{x\}(x\in E)$．称函数对 $q(x)-q(x,A)$ $(x\in E,A\in\mathscr{E})$ 是 $(E,\mathscr{E})$ 上的一个 q 对，如果对于每 $x\in E$，$q(x,\cdot)$ 是 $\mathscr{E}$ 上的测度，$q(x,\{x\})=0$，$q(x,E)\leqslant q(x)$；而对于每 $A\in\mathscr{E}$，$q(\cdot)$ 和 $q(\cdot,A)$ 都是 $\mathscr{E}$ 可测的．如果 $q(x)<\infty$，则称 x 为稳定的，否则 $(q(x)=\infty)$ 称为瞬时的．如果每 $x\in E$ 都是稳定的（相应地，瞬时的），则称 $q(x)-q(x,A)$ 是全稳定（相应地，全瞬时）的．如果 $q(x)=q(x,E)$，则称 x 为保守点，如果每 $x\in E$ 都是保守的，则称 $q(x)-q(x,A)$ 是保守的 q 对．

对于马链，即 E 为可列集情形，当 $i\neq j$ 时，定义 $q_{ij}=q(i,\{j\})$；当 $i=j$ 时，定义 $q_{ii}=-q(i)\equiv -q_i$．便得一个矩阵 $Q=(q_{ij}:i,j\in E)$，它是矩阵 $P(t)=(P_{ij}(t))$ 在零点的导数，称为 Q 矩阵．如上所述，每一 Q 矩阵具有如下性质：

$$0\leqslant q_{ij}<+\infty,\ i\neq j;\ \sum_{j\neq i}q_{ij}\leqslant q_i\leqslant+\infty.$$

（1.2.19）**定义** 称跳过程 $P(t,x,A)$ $(t\geqslant 0,x\in E,A\in\mathscr{E})$ 是一个具有 q 对 $q(x)-q(x,A)$ $(x\in E,A\in\mathscr{E})$ 的 q 过程，如果

对于每 $x\in E$ 和 $A\in \mathscr{R}$,

$$\lim_{t\searrow 0}(P(t,x,A)-\delta(x,A))/t=q(x,A)-q(x)\delta(x,A).$$

当 E 可列时，依通常习惯，称之为 Q 过程。

由 (1.2.1)，(1.2.7) 和 (1.2.16) 立即得到

(1.2.20) **定理** 设 $P(t,x,A)$ $(t\geqslant 0, x\in E, A\in \mathscr{E})$ 是一个跳过程，满足

$$\left\{x\in E:\ \lim_{t\searrow 0}[1-P(t,x,\{x\}]/t=+\infty\right\}$$

至多可数，则它是关于某 q 对 $q(x)-q(x,A)$ $(x\in E, A\in \mathscr{E})$ 的 q 过程。此外，对于每 $x\in E$, $q(x,\cdot)\in\overline{\mathscr{L}}_+$.

为简单起见，如果 q 对是全稳定（相应地，保守）的，我们称它相应的 q 过程是全稳定（相应地，保守）的。如无特殊必要，在谈及 q 过程时，我们不提它所相应的 q 对。

一般地说，$\mathscr{R}$ 远比 $\mathscr{E}$ 小。事实上，我们有

(1.2.21) **推论** 当且仅当 $\sup\limits_{x\in E} q(x)<\infty$ 时，$\mathscr{R}=\mathscr{E}$。

证 由 (1.2.7)、(i) 知充分性。为证必要性，设 $E\in\mathscr{R}$。则对于每 $\varepsilon>0$，存在 $\alpha>0$，使当 $s\leqslant\alpha$ 时，对一切 $x\in E$，有

$$P(s,x,\{x\})>1-\varepsilon.$$

令命

$$_vp(x,\ x)=\left(P\left(\frac{\alpha}{n},\ x,\ \{x\}\right)\right)^v,\quad 0\leqslant v\leqslant n.$$

则由 $K-C$ 方程得

$$1-\varepsilon\leqslant P(\alpha,\ x,\ \{x\})$$

$$={}_np(x,x)+\sum_{v=0}^{n-2}\int_{(y\neq x)}{}_vp(x,\ x)P\left(\frac{\alpha}{n},\ x,\ dy\right)$$

$$\cdot P\left(\alpha-\frac{(v+1)\alpha}{n},\ y,\ \{x\}\right)$$

$$\leqslant {}_np(x,\ x)+\varepsilon\sum_{\nu=0}^{n-2}\int_{\{y\neq x\}}{}_\nu p(x,\ x)\mathrm{P}\left(\frac{a}{n},x,dy\right)$$

$$\leqslant {}_np(x,\ x)+\varepsilon\sum_{\nu=0}^{n-2}{}_\nu p(x,\ x)\ \left(1-\mathrm{P}\ \left(\frac{a}{n},x,\{x\}\right)\right)$$

$$\leqslant {}_np(x,\ x)+\varepsilon\ (1-{}_{n-1}p(x,\ x))$$

$$\leqslant {}_np(x,\ x)+\varepsilon\ (1-{}_np(x,\ x))$$

或即

(1.2.22) $(1-\varepsilon)[1-{}_np(x,\ x)]\leqslant 1-P(a,\ x,\ \{x\})\leqslant\varepsilon.$

另一方面，

$$ {}_np(x,x)=\exp\left[\frac{\log\mathrm{P}\left(\frac{a}{n},x,\ \{x\}\right)}{\frac{a}{n}}\cdot a\right]\xrightarrow[n\to\infty]{}e^{-\bar{q}(\bar{x})a},$$

于是，由 (1.2.22) 得

$$(1-\varepsilon)(1-e^{-q(x)a})\ \leqslant 1-P(a,x,\{x\})\leqslant\varepsilon.$$

如取$\varepsilon=1/3$，则由上式得

$$\frac{1}{2}\leqslant e^{-\bar{q}(\bar{x})a}$$

可见 $\sup\limits_x q(x)<\infty.$ 】

虽然一般地，$\mathscr{R}\neq\mathscr{E}$. 但是，极限 $\lim\limits_{t\nearrow 0}\dfrac{P(t,\ x,\ A)}{t}$ ($x\notin A\in\mathscr{E}$) 的存在性并不一定仅限于$\mathscr{R}$. 请看：

(1.2.23) **定理** 如果 $q(x)-q(x,\ A)$ 是全稳定保守的，则每一q过程 $P(t,\ x,\ A)$ 满足：

$$\lim_{t\searrow 0}\frac{P(t,\ x,\ A)}{t}=q(x,\ A),\ x\notin A\in\mathscr{E}.$$

而且此收敛性关于A是一致的.

证 如引理 (1.2.16) 的证明中所做的那样，我们可取 $\{V_n\}_1^\infty\subset\mathscr{R}$，使$V_n\uparrow E$且

$$q(x, A)=\lim_{n\to\infty} q(x, AV_n), \quad x\notin A\in\mathscr{E}.$$

我们先证如下事实：设 $x\notin V\in\mathscr{R}$，则关于 $B\subset V$ 一致地成立着

$$\lim_{h\to 0}\frac{P(h, x, B)}{h}=q(x, B).$$

事实上，对于每 $0<\varepsilon<1/3$，存在 $\delta(V+\{x\}, \varepsilon)>0$，使当 $h\leqslant\delta(V+\{x\}, \varepsilon)$ 时，

$$\frac{P(h, x, B)}{h}-q(x, B)\geqslant -3\varepsilon q(x, B)$$

$$\geqslant -3\varepsilon q(x, V).$$

（参考定理（1.2.7）之证的最后一个不等式）．另一方面

$$\frac{P(h, x, B)}{h}-q(x, B)=\frac{P(h, x, V)}{h}-q(x, V)$$

$$+q(x, V-B)-\frac{P(h, x, V-B)}{h}$$

$$\leqslant\frac{P(h, x, V)}{h}-q(x, V)+3\varepsilon q(x, V).$$

从而

$$\sup_{B\subset V}\left|\frac{P(h, x, B)}{h}-q(x, B)\right|$$

$$\leqslant 3\varepsilon q(x, V)+\left|\frac{P(h, x, V)}{h}-q(x,V)\right|.$$

先令 $h\to 0$，次令 $\varepsilon\to 0$ 即得所述断言．

注意：

$$\left|\frac{P(h, x, A)}{h}-q(x, A)\right|\leqslant\left|\frac{P(h, x, AV_n)}{h}-q(x,AV_n)\right|$$

$$+\left|\frac{P(h, x, AV_n^c)}{h}-q(x, AV_n^c)\right|$$

$$\leqslant\left|\frac{P(h, x, AV_n)}{h}-q(x, AV_n)\right|$$

$$+\frac{1-P(h, x, \{x\})}{h}-\frac{P(h, x, V_n-\{x\})}{h}+q(x, V_n^c).$$

先固定 n，令 $h\to 0$，则由已证的事实知右方的第一项关于 A 一致地趋于零；右方的第二项关于 A 一致地趋于

$$q(x)-q(x,\ V_n-\{x\})+q(x,\ V_n^c).$$

然后命 $n\to\infty$ 即知上式与 A 无关地趋于零。 ∎

虽然一般地说 $\mathscr{R}\neq\mathscr{E}$，但定理（1.2.23）表明，使极限"$\lim\limits_{t\searrow 0}P(t,\ x,\ A)/t$"存在的 A 仍然可以跑遍整个 $\mathscr{E}$。那么，这个结论能否进一步延拓到全稳定的 q 过程呢？答案是否定的（参考（1.2.28）），为说明这个问题，还需要做些准备。

我们先给出一个一般性结果，它是引理（1.2.15）的推广，以后常要用到。

（1.2.24）**定理** 设 $\{\mu_n\}_1^\infty$ 是任一可测空间 $(E,\ \mathscr{E})$ 上的一串有限测度序列，对于每 $A\in\mathscr{E}$，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n(A)\ \equiv\mu(A)$ 存在且有限，那么

(i) μ 是 $(E,\ \mathscr{E})$ 上的有限测度；

(ii) 若 $f\in {}_b\mathscr{E}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\int fd\mu_n=\int fd\mu\ ;$$

(iii) 若 $\{f_n\}_1^\infty\subset{}_b\mathscr{E}$，$|f_n|\leqslant M<\infty$，$f_n\to f$，则

$$\lim_{n\to\infty}\int f_nd\mu_n=\int fd\mu;$$

(iv) 若 $\{f_n\}_1^\infty\subset{}_b\mathscr{E}$，$|f_n|\leqslant M<\infty\ (n\geqslant 1)$，或者 $\{f_n\}\subset\mathscr{E}_+$，则

$$\varliminf_{n\to\infty}\int f_nd\mu_n\geqslant\int\varliminf_{n\to\infty}f_nd\mu.$$

证 断言 (i) 是著名的 Vitali-Hahn-Saks 定理（Yosida [1]，p 70）的直接推论，只需取参考测度

$$m(A)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n(A)/(2^n\mu_n(E)),\ A\in\mathscr{E}.$$

往证 (ii)．首先，$\sup\limits_{n\geqslant 1}\mu_n(E)\equiv C<\infty$．其次，对于任给的

$f\in{}_b\mathscr{E}$，存在简单函数列$\{g_m\}$，使得$\sup\limits_{x\in E}\left|f(x)-g_m(x)\right|<\frac{1}{m}$. 于是先令$n\to\infty$，次令$m\to\infty$，得

$$
\begin{aligned}
\left|\int fd\mu_n-\int fd\mu\right| &\leqslant\left|\int fd\mu_n-\int g_m d\mu_n\right|+\\
&+\left|\int g_m d\mu_n-\int g_m d\mu\right|+\left|\int g_m d\mu-\int fd\mu\right|\\
&\leqslant C/m+\left|\int g_m d\mu_n-\int g_m d\mu\right|+C/m\longrightarrow 0.
\end{aligned}
$$

次证（iii）. 由于$f_n\longrightarrow f$，$\mu(E)<\infty$，利用Eropов定理，对于任给的$\varepsilon>0$，可选$A_\varepsilon\in\mathscr{E}$，使得$\mu(A_\varepsilon)<\varepsilon$且$\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\bar{\in}A_\varepsilon}|f_n(x)-f(x)|=0$. 于是，由已证的（ii），先令$n\to\infty$，次令$\varepsilon\to 0$，得

$$
\begin{aligned}
&\left|\int f_n d\mu_n-\int fd\mu\right|\\
&\leqslant\left|\int f_n d\mu_n-\int fd\mu_n\right|+\left|\int fd\mu_n-\int fd\mu\right|\\
&\leqslant 2M\mu_n(A_\varepsilon)+\sup_{x\bar{\in}A_\varepsilon}\left|f_n(x)-f(x)\right|+\left|\int fd\mu_n-\int fd\mu\right|\\
&\longrightarrow 0.
\end{aligned}
$$

最后证（iv）. 如果$\{f_n\}_1^\infty\subset\mathscr{E}_+$，用$f_n\wedge M\ (0<M<\infty)$代替$f_n$，归结为$|f_n|\leqslant M\ (n\geqslant 1)$的情形. 记

$$g_n=\inf_{k\geqslant n}f_k\nearrow g\equiv\varliminf_{n\to\infty}f_n$$

则由（iii）知

$$\varliminf_{n\to\infty}\int f_n d\mu_n\geqslant\varliminf_{n\to\infty}\int g_n d\mu_n=\int gd\mu. \qquad \rrbracket$$

(1.2.25) 定理 固定$x\in E$. 如果$q(x)<\infty$且对于每$x\notin A\in\mathscr{E}$，极限$\lim\limits_{t\to 0}P(t,x,A)/t$存在，特别地，如果$P(t,x,A)$是全稳定保守$q$过程，则对每$A\in\mathscr{E}$，$P(t,x,A)$是$t$的可微函数，而且导数连续. 它满足Колмогоров向后微分方程

（以后简称为向后方程）：

$$(1.2.26)\quad P'(t,\ x,\ A)=\int q(x,\ dy)P(t,\ y,\ A)-q(x)P(t,\ x,\ A)$$

或等价地

$$(1.2.27)\quad P(\lambda,\ x,\ A)=\int \frac{q(x,\ dy)}{\lambda+q(x)}P(\lambda,\ y,\ A)+\frac{\delta(x,\ A)}{\lambda+q(x)}.$$

此处 $P(\lambda,\ x,\ A)$ $(\lambda>0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E})$ 是 $P(t,\ x,A)(t\geqslant 0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E})$ 的拉氏变换：

$$P(\lambda,\ x,\ A)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}P(t,\ x,\ A)dt.$$

证 由 $K-C$ 方程，当 $h>0$ 时，

$$\frac{P(t+h,\ x,\ A)-P(t,\ x,\ A)}{h}$$
$$=\int_{E-\{x\}}\frac{1}{h}P(h,\ x,\ dy)P(t,\ y,\ A)-\frac{1-P(h,x,\{x\})}{h}P(t,\ x,\ A).$$

令 $h\to 0$，由定理（1.2.24）.（ii）得右导数为

$$P'_+(t,x,A)=\int q(x,dy)P(t,y,A)-q(x)P(t,x,A).$$

由控制收敛定理知右方是 t 的连续函数，从而右导数连续．另一方面，当 $h<0$ 时，

$$\frac{P(t+h,x,A)-P(t,x,A)}{h}$$
$$=\int_{E-\{x\}}\frac{1}{-h}P(-h,\ x,\ dy)P(t+h,\ y,\ A)-\frac{1-P(-h,x,\{x\})}{-h}\cdot P(t+h,x,A).$$

类似地，使用定理（1.2.24）（iii）得到左导数存在且连续，故导数存在且连续。

对（1.2.26）两边取拉氏变换即得（1.2.27）。反之，由（1.2.26）两边关于 t 的连续性及拉氏变换的唯一性定理即可由（1.2.27）导出（1.2.26）。 ∎

（1.2.28）**注** 设 E 为任一可数集，取

$$q_{ii}=-1/2^{i+1},\ q_{ij}=0,\ i\neq j,\ i,j\in E.$$

则 $Q=(q_{ij})$ 是一个全稳定的 Q 矩阵，它的每一状态都是非保守的。命

$$P_{ij}(\lambda)=\frac{\delta_{ij}}{\lambda+q_i}+\frac{q_i}{(\lambda+q_i)(\lambda+q_j)}\Big/\sum_{k\in E}\frac{\lambda}{\lambda+q_k},$$

$$i,\ j\in E,\quad \lambda>0,$$

此处 $\delta_{ij}=0$，如 $i\neq j$；$\delta_{ii}=1$。易见 $(P_{ij}(\lambda);\ i,\ j\in E)$ 不满足柯氏向后方程（1.2.27）。但使用定理（1.4.2），便可直接验证 $(P_{ij}(\lambda):i,\ j\in E)$ 是一个 Q 过程 $(P_{ij}(t):i,\ j\in E)$ 的拉氏变换，而且是不中断的。这便回答了定理（1.2.24）之前所提的问题。

§1.3 可微性

上一节主要研究了跳过程在原点（$t=0$）处的右导数的存在性。由此导出 q 对。但上节的最后一个定理表明：在一定条件下，跳过程关于 t 是连续可微的，本节的目的是改进这一结果，但对状态空间（E, $\mathscr{E}$）却需要施加一点条件。本节与本书的其它部分是独立的，初读时可以跳过去。

（1.3.1）**引理** 设 $p(t)$ 是定义在 $[0,\infty)$ 上实函数，存在 $\infty>q>0$ 使得

（1.3.2）　$0\leqslant p(t)\leqslant 1,\ t\geqslant 0;$

(1.3.3)　$p(s+t)\geqslant e^{-qs}p(t)$, $s, t\geqslant 0$;

(1.3.4)　$1-p(s+t)\geqslant e^{-qs}(1-p(t))$, $s, t\geqslant 0$.

那么，存在 $[0, \infty)$ 上的可测函数 $r(t)$，$0\leqslant r(t)\leqslant 1$，使得

(1.3.5)　$$p(t)=q\int_0^t e^{-q(t-s)}r(s)ds+p(0)e^{-qt},\quad t\geqslant 0.$$

证　分别由 (1.3.3) 和 (1.3.4) 得

$$p(s+t)-p(t)\geqslant(e^{-qs}-1)\,p(t)\geqslant e^{-qs}-1,$$

$$p(s+t)-p(t)\leqslant 1-e^{-qs}.$$

从而

$$|p(s+t)-p(t)|\leqslant 1-e^{-qs}\leqslant qs,\quad s, t\geqslant 0.$$

这表明 $p(t)$ 是绝对连续的。再用一次上述两式，得

$$e^{q(s+t)}p(s+t)\geqslant e^{qt}p(t),\quad s, t\geqslant 0;$$

$$e^{q(s+t)}(1-p(s+t))\geqslant e^{qt}(1-p(t)),\quad s, t\geqslant 0.$$

可见 $e^{qt}p(t)$ 和 $e^{qt}(1-p(t))$ 都是 t 的非减函数，这样，若命

$$r(t)=\frac{1}{q}e^{-qt}\frac{d}{dt}(e^{qt}p(t)),\quad (a.e.\text{有定义})$$

则 $r(t)\geqslant 0$, $a.e.$ 但

$$1-r(t)=\frac{1}{q}e^{-qt}\frac{d}{dt}(e^{qt}(1-p(t))),\quad a.e.$$

从而也有 $r(t)\leqslant 1, a.e.$ 最后，由 $r(t)$ 的定义即得表达式 (1.3.5)。现在，容易修正这个 $r(t)$ 使之满足引理的要求。

下述一般结果是对定理 (1.2.1) 的补充。

(1.3.6) **定理**　若 $q(x)=0$，则 $P(t, x, A)=I_A(x)$。若 $0<q(x)<\infty$，则存在一个 t 的可测函数 $r(t, x, A)$，使得

(1.3.7)　$$P(t, x, A)=q(x)\int_0^t e^{-q(x)(t-s)}r(s, x, A)ds+e^{-q(x)t}I_A(x).$$

而且

(1.3.8)　若 $\{A_n\}_1^\infty\subset\mathscr{E}$，两两不交，则

$$\sum_n r(t, x, A_n) = r\left(t, x, \sum_n A_n\right), \quad a.e.t;$$

(1.3.9) $0 \leqslant r(t, x, A) \leqslant 1$; 若 $P(t, x, E) = 1$, 则 $r(t, x, E) = 1$, $a.e.t$.

证 前一断言平凡，往证后一断言。若 $P(t, x, A)$ 中断，则使用定理（1.1.3）证明中所用过的技巧，把状态空间 $(E, \mathscr{E})$ 扩大为 $(E_\Delta, \mathscr{E}_\Delta)$，得到一个不断的跳过程，如果我们对这个过程证明了本定理，则可立即读出所需的关于原过程的结论。

设过程 $P(t, x, A)$ 不断。则由 $K-C$ 方程和（1.2.3）得

$$P(s+t, x, A) \geqslant e^{-q(x)s} P(t, x, A);$$

用 A' 代替 A，即得

$$1 - P(s+t, x, A) \geqslant e^{-q(x)s}(1 - P(t, x, A)).$$

由以上两式和引理（1.3.1）立得存在 t 的可测函数使得（1.3.7）式成立且 $0 \leqslant r(t, x, A) \leqslant 1$。在（1.3.7）式中取 $A = E$，得

$$1 - e^{-q(x)t} = q(x)\int_0^t e^{-q(x)(t-s)} r(s, x, E)ds,$$

或

$$\int_0^t e^{-q(x)(t-s)}(1 - r(s, x, E))ds = 0,$$

可见（1.3.9）成立，类似地，可用（1.3.7）式得到（1.3.8）。

（1.3.10）**定义** 设 $(E, \mathscr{G}, \mathscr{E})$ 是拓扑可测空间（即 $\mathscr{E}$ 是由拓扑 $\mathscr{G}$ 生成的 σ 代数），$\mathscr{B} \subset \mathscr{E}$。称 $(E, \mathscr{G}, \mathscr{E})$ 上的有限测度 μ 是 $\mathscr{B}$ 内正则的，如果对于每一个 $B \in \mathscr{B}$，

$$\mu(B) = \sup\{\mu(K)：紧集\ K \subset B\}$$

当 $\mathscr{B} = \mathscr{G}$ 时，此即是通常的内正则性，如果 $(E, \mathscr{G}, \mathscr{E})$ 上的一切有限测度都是内则的，则称这个空间为内正则的。

熟知，每一个具有可数基的局部紧空间、Polish 空间和 Souslin 空间（特别地，Lusin 空间）都是内正则的（参见 Cohn [1] 命题 7.2.3，命题 8.1.10 和定理 8.6.13）。

(1.3.11) **引理** 设$(E,\mathscr{O},\mathscr{E})$是具有可数基的拓扑可测空间，任取一个拓扑基，记为$\mathscr{D}$，以$\mathscr{B}$表包含$\mathscr{D}$的最小代数，则关于$(E,\mathscr{E})$上的测度$\mu$，下述断言等价：

(i) μ是内正则的；

(ii) μ是$\mathscr{D}$内正则的；

(iii) μ是$\mathscr{B}$内正则的。

证 显然有(iii) $\Longrightarrow$ (ii)。只需再证(ii) $\Longrightarrow$ (i) 和 (i) $\Longrightarrow$ (iii)。

先证 (ii) $\Longrightarrow$ (i)。设$U\in\mathscr{O}$，则存在$\{U_n\}_1^\infty\subset\mathscr{D}$使$U=\bigcup_{k=1}^\infty U_k$。令$V_n=\bigcup_{k=1}^n U_k$，则$V_n\uparrow U$。对于任给的$\varepsilon>0$，取$n_\varepsilon$使$\mu(V-V_{n_\varepsilon})<\varepsilon/2$。对于每$1\leqslant n\leqslant n_\varepsilon$，取紧集$K_n\subset U_n$，使$\mu(U_n-K_n)\leqslant\varepsilon/2^{n+1}$。那么$K\equiv\bigcup_{n=1}^{n_\varepsilon}K_n$是紧集且含于$\bigcup_{n=1}^{n_\varepsilon}U_n=$
$=V_{n_\varepsilon}\subset U$，此外

$$\mu(U-K)\leqslant\mu(U-V_{n_\varepsilon})+\mu(V_{n_\varepsilon}-K)\leqslant\varepsilon/2+$$
$$+\sum_{n=1}^{n_\varepsilon}\mu(U_n-K_n)<\varepsilon.$$

往证 (i) $\Longrightarrow$ (iii)。若记$\mathscr{D}=\{U_n:n\geqslant1\}$，则易证

$$\mathscr{B}=\Big\{\bigcup_{m=1}^M\bigcap_{n=1}^N V_{mn}:\text{存在 }U_k\in\mathscr{D},\text{使}$$
$$V_{mn}=U_k\text{ 或 }U_k^c,\ M,N\geqslant1\Big\}.$$

因此，我们只需证明形如$\bigcup_{m=1}^M\bigcap_{n=1}^N V_{mn}$的元素有内逼近，由假设，每一$U_k\in\mathscr{D}$有紧逼近，而且$E$也有紧逼近。这样，对每$\varepsilon>0$，取紧集$K$使$\mu(E-K)<\varepsilon$。那么，作为$K$的闭子集，$KU_k^c$也是紧集，而且

$KU_k^c\subset U_k^c$，$\mu(U_k^c-KU_k^c)\leqslant\mu(E-K)<\varepsilon$。

ε任意，故每$U_k\in\mathscr{D}$，U_k^c也有紧逼近。这表明每V_{mn}有紧逼近，

故 $\bigcup_{m=1}^{M}\bigcap_{n=1}^{N}V_{mn}$ 亦然。 ∎

(1.3.12) **引理** 关于$(E,\mathscr{C},\mathscr{E})$ 和 $\mathscr{B}$ 的假设同(1.3.11)。再设 $(\Omega,\ \mathscr{F},\ \mu)$ 是一测度空间，$R(w,\ A)$ $(w\in\Omega,\ A\in\mathscr{E})$ 是非负实函数，满足

(1.3.13) 对每 $A\in\mathscr{E}$，$R(\cdot,\ A)\in\mathscr{F}$；

(1.3.14) 对每 $A\in\mathscr{B}$，R 是几乎一致 A 内正则的．即存在 μ 零集 N_A 和依赖于 A 但与 $w\notin N_A$ 无关的紧集列 $\{K_n\}_1^\infty$，使 $K_n\subset A(n\geqslant1)$，且

$$\lim_{n\to\infty}R(w,\ K_n)=R(w,\ A),\ w\notin N_A.$$

(1.3.15) $R(w,\ \cdot)$ 是的 σ 可加性几乎成立．即对每一列两两不交的 $\{A_n\}_1^\infty\subset\mathscr{E}$，

$$R\left(\cdot,\ \sum_n A_n\right)=\sum_n R(\cdot,\ A_n),\ \mu-a.e.$$

例外集依赖于 $\{A_n\}_1^\infty$．那么，存在一个二元函数 $U(w,\ A)$ $(w\in\Omega,\ A\in\mathscr{E})$，使得

(1.3.16) 对每 $w\in\Omega$，$U(w,\ \cdot)\in\mathscr{L}_+$；

(1.3.17) 对每 $A\in\mathscr{E}$，$U(\cdot,\ A)\in\mathscr{E}$ 且

$$U(\cdot,\ A)=R(\cdot,\ A),\ \mu-a.e.$$

此处的例外集依赖于 A.

证 由于 $\mathscr{B}$ 是可数的，我们可以选取一个公共的 μ 零集 N，使得在此集外，(1.3.14) 成立．而且由 (1.3.15)，我们还可保证在 N^c 上，$R(w,\ \cdot)$ 是在 $\mathscr{B}$ 上有限可加的．另一方面，对于每 $A\in\mathscr{B}$，条件 (1.3.14)中对应于一个可列集$\{K_n(A):n\geqslant1\}$ (以下固定这些序列)，这些序列的全体 $\{K_n(A):n\geqslant1,\ A\in\mathscr{B}\}$ 也是可列的．故我们还可以假定：在 N^c 上，$R(w,\ \cdot)$ 的有限可加性对于由这些紧集和 $\mathscr{B}$ 所生成的代数上也成立。

往证：当 $w\notin N$ 时，$R(w,\ \cdot)$ 是 $\mathscr{B}$ 上的测度．事实上，

设 A, $A_n \in \mathscr{B}$ $(n \geqslant 1)$, $A = \sum_n A_n$. 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 由 $A \in \mathscr{B}$ 及 (1.3.14) 知, 存在紧集 $K \subset A$, 使得 $R(w, K) \leqslant R(w, A) < R(w, K) + \varepsilon$. 另一方面, 因为 $\mathscr{B}$ 是代数, 由 $A_n \in \mathscr{B}$ 知 $A_n^c \in \mathscr{B}$, 从而由 (1.3.14) 知, 存在紧集 $K_n \subset A_n^c$, 使得 $R(w, K_n) \leqslant R(w, A_n^c) < R(w, K_n) + \varepsilon/2^n$. 由于 $E \in \mathscr{B}$ 及所假定的有限可加性, 我们得到

$$R(w, K_n^c) \geqslant R(w, A_n) > R(w, K_n^c) - \varepsilon/2^n.$$

自然还有 $K_n^c \supset A_n$. 从而 $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n^c \supset \sum_{n=1}^{\infty} A_n = A \supset K$. 利用有限覆盖定理, 存在 $m < \infty$, 使 $\bigcup_{n=1}^{m} K_n^c \supset K$. 从而

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} R(w, A_n) + \varepsilon &= \sum_{n=1}^{\infty} (R(w, A_n) + \varepsilon/2^n) \\
&> \sum_{n=1}^{\infty} R(w, K_n^c) \\
&\geqslant \sum_{n=1}^{m} R(w, K_n^c) \\
&\geqslant R\left(w, \bigcup_{n=1}^{m} K_n^c\right) \quad \text{(由非负性及有限可加性)} \\
&\geqslant R(w, K) > R\left(w, \sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) - \varepsilon,
\end{aligned}$$

ε 是任意的, 故

$$\sum_{n=1}^{\infty} R(w, A_n) \geqslant R\left(w, \sum_n A_n\right).$$

反之, 由有限可加性和非负性立得

$$\sum_{n=1}^{\infty} R(w, A_n) \leqslant R\left(w, \sum_n A_n\right).$$

故对于每 $w \notin N$, $R(w, \cdot)$ 在 $\mathscr{B}$ 上是 σ 可加的.

现在，我们来构造所求的函数 $U(w, A)(w\in\Omega, A\in\mathscr{E})$．由上述所证，当 $w\notin N$ 时，$R(w, \cdot)$ 可唯一扩张为 $\mathscr{E}$ 上的有限测度，记作 $\overline{R}(w, \cdot)$．任取 $x_0\in E$，并定义

$$U(w, A)=I_{N^c}(w)\ \overline{R}\ (w, A)+I_N(w)\ \delta(x_0, A),$$
$$w\in\Omega,\ A\in\mathscr{E},$$

则这个函数显然满足（1.3.16）和（1.3.17）的第一项断言，至于最后的断言，只需注意：若命

$$\mathscr{A}=\{A\in\mathscr{E}:\ U(\cdot, A)=R(\cdot, A),\ \mu-a.e.\}$$

则易见 $\mathscr{A}$ 是包含 $\mathscr{B}$ 的单调类，从而 $\mathscr{A}=\mathscr{E}$． ▮

应用这一引理，我们可将定理（1.3.6）加强为

（1.3.18）**推论** 设 $(E, \mathscr{C}, \mathscr{E})$ 是具有可数基的内正则空间．若 $0<q(x)<\infty$，则存在 t 的可测函数 $r_1(t, x, A)(t\geqslant 0, A\in\mathscr{E})$，使得（1.3.7）—（1.3.9）对于一切 $t\geqslant 0$ 成立．

证 由定理（1.3.6）和引理（1.3.12），我们只需再验证条件（1.3.14），然而，由（1.3.7）得

$$(1.3.19)\qquad P(t, x, A-K)=\int_0^t e^{-q(x)(t-s)}\,(r(s,x, A)$$
$$-r(s, x, K))ds+e^{-q(x)t}I_{A-K}(x).$$

我们将由此构造所需的逼近序列．首先，由 $\mathscr{B}$ 的可数性质、引理（1.3.11）及（1.3.8），存在关于 t 的零集 N，使得当 $t\notin N$ 时，$r(t, x, \cdot)$ 在 $\mathscr{B}$ 上是有限可加的．另一方面，由空间的正则性假定，对于每 $t=m\geqslant 1$ 和 $A\in\mathscr{B}$，存在含于 A 中的紧集序列 $\{K_{mn}^A\}_{n=1}^{\infty}$ 使 $P(m, x, A)=\lim\limits_{n\to\infty}P(m, x, K_{mn}^A)$．令 $K_N^A=\bigcup\limits_{m,n=1}^{N}K_{mn}^A$，$N\geqslant 1$，则 $\{K_n^A\}_1^{\infty}$ 也是含于 A 的紧集的上升序列，且

$$(1.3.20)\qquad P(m, t, A)=\lim_{n\to\infty}P(m, t, K_n^A),\ m\geqslant 1.$$

若记 $\overline{\mathscr{B}}$ 为由 $\mathscr{B}$ 及集合 $\{K_n^A:\ n\geqslant 1,\ A\in\mathscr{B}\}$ 所生成的代数，则我

们还可假定（适当地扩大原来的零集 N）：当 $t\notin N$ 时，$r(t,x,\cdot)$ 在 $\overline{\mathscr{B}}$ 上是有限可加的（因为 $\overline{\mathscr{B}}$ 也是可列集！）．由有限可加性及非负性导出单调增性质．这样，由（1.3.19）和（1.3.20）立得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^m e^{-q(x)(m-s)}r(s,\ x,\ A-K_n^A)ds=0,\ m\geqslant 1.$$

于是由控制收敛定理及被积函数的非负性知，存在关于 t 的零集 N_m^A，使当 $m\geqslant t\notin N\cup N_m^A$ 时，

$$\lim_{n\to\infty}r(t,\ x,\ K_n^A)\ =r(t,\ x,\ A).$$

令 $N_A=N\cup\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}N_m^A\right)$ 立得所需断言． ∎

下面，我们要对 $r_1(t,\ x,\ A)$ 作进一步的刻画，它是导出可微性的关键的一步．

（1.3.21）定理 设（E，$\mathscr{E}$，$\mathscr{E}$）是具有可数基的内正则空间，$0<q(x)<\infty$．那么，存在唯一的函数 $R(t,\ x,\ A)(t>0,\ A\in\mathscr{E})$：对于固定的 t，它是 $\mathscr{E}$ 上的测度；对于固定的 A，它是 t 的连续函数，而且

$$(1.3.22)\qquad P(t,\ x,A)=q(x)\int_0^t e^{-q(x)(t-s)}R(s,x,A)ds+e^{-q(x)t}I_A(x),\ \ t\geqslant 0,\ \ A\in\mathscr{E}.$$

此外，我们还有

(1.3.23) $R(t,\ x,\ E)\leqslant 1$；若 $P(t,\ x,E)=1(t>0)$，则 $R(t,\ x,\ E)=1$；

$$(1.3.24)\qquad R(s+t,x,A)=\int R(s,x,dy)P(t,y,A)\qquad s>0,\ t\geqslant 0,\ A\in\mathscr{E}.$$

证 由推论（1.3.18）得到

$$(1.3.25)\qquad P(t,x,A)\ =\int_0^t q(x)e^{-q(x)(t-s)}r_1(s,x,A)ds+e^{-q(x)t}I_A(x),\ \ t\geqslant 0,\ \ A\in\mathscr{E}.$$

而且$r_1(s, x, \cdot)$是界于1的测度，于是，由单调类定理知，对于每$\varphi\in {}_b\mathscr{E}$，有

$$\int P(t,x,dy)\varphi(y)=\int_0^t q(x)e^{-q(x)(t-s)}\int r_1(s,x,dy)\varphi(y)ds$$
$$+e^{-q(x)t}\varphi(x).$$

特别地，取$\varphi=P(t', \cdot, A)$，并使用K-C方程得

$$P(t+t',x,A)=q(x)\int_0^t e^{-q(x)(t-s)}ds\int P(t',y,A)r_1(s,x,dy)$$
$$+e^{-q(x)t}P(t',x,A).$$

由此出发，两次使用（1.3.25），得

$$g(x)\int_0^t e^{-q(x)(t-s)}ds\int P(t', y, A)r_1(s, x, dy)$$
$$+q(x)e^{-q(x)(t+t')}\int_0^{t'}e^{q(x)s}r_1(s, x, A)ds$$
$$+e^{-q(x)(t+t')}I_A(x)$$
$$=P(t+t', x, A)$$
$$=q(x)\int_0^{t+t'}e^{-q(x)(t+t')}e^{q(x)s}r_1(s, x, A)ds$$
$$+e^{-q(x)(t+t')}I_A(x),$$

从而

$$\int_0^t e^{q(x)s}ds\int P(t',y, A)r_1(s, x, dy)=$$
$$=e^{-q(x)t'}\int_{t'}^{t+t'}e^{q(x)s}r_1(s, x, A)ds$$
$$=\int_0^t e^{q(x)s}r_1(s+t', x, A)ds$$

这样，对每t'，存在零集$N_{t'}\equiv N_{t'}(A)$，使当$t\notin N_{t'}$，有

$$(1.3.26)\qquad r_1(t+t', x, A)=\int P(t',y,A)r_1(t,x,dy).$$

我们将由此出发，来构造所求的$R(t, x, A)$．自然地，R应是r_1的修正。

先证上式两边都是（t，t'）的二元可测函数．事实上，当t'固定时，右方是t的可测函数；而当t固定时，它是t'的连续函数，从而右方是二元可测的．左方显然如此．这样，集合

$$S=\left\{(t,\ t'):\ t,\ t'>0,\ r_1(t+t',\ x,\ A)\neq\int P(t',y,A)r_1(t,x,dy)\right\}$$

是二元可测的．由 Fubini 定理及（1.3.26）立知

$$\iint_S dtdt'=0.$$

若命 $u=t$，$v=t+t'$，则 $\iint_M dudv=0$，此处

$$M=\left\{(u,\ v)\ :\ u>0,\ v>u,\ r_1(v,\ x,\ A)\neq\int P(v-u,\ y,\ A)\ r_1(u,\ x,\ dy)\right\}.$$

再用一次 Fubini 定理得，存在 $u>0$ 的一个零集 H，使当 $u\notin H$ 时，有零集 H_u，使

$$r_1(v,\ x,\ A)=\int P(v-u,y,A)r_1(u,x,dy)\qquad(1.3.27)$$

$$u\notin \mathrm{H},\ u<v\notin \mathrm{H}_u.$$

现在，我们可构造 $R(v,\ x,\ A)$ 如次：设 $v>0$，任取 u' 使 $0<u'<v$，$u'\notin H$，然后令

$$R(v,\ x,\ A)=\int P(v-u',y,A)r_1(u',x,dy).\qquad(1.3.28)$$

为说明这个构造的合理性，我们需要证明：上式与 u' 的取法无关．为此，设给定 $v_0>0$，$0<u'$，$u''<v_0$，u'，$u''\notin \mathrm{H}$．这样，当 $v\notin \mathrm{H}_{u'}\cup \mathrm{H}_{u''}$ 且 $v>u'\vee u''$ 时，由（1.3.27）知

$$\int P(v-u',\ y,\ A)\ r_1(u',\ x,\ dy)$$

和

$$\int P(v-u'', y, A) r_1(u'', x, dy)$$

都等于 $r_1(v, x, A)$，特别地，这个结论对于 $v=v_0$ 也是对的。因此，这样的 u' 和 u'' 定义了同一个 $R(v_0, x, A)$。

往证如上构造的 $R(t, x, A)$ （$t>0$, $A\in\mathscr{E}$）满足定理的条件。

由（1.3.28）立知，对于每 $t>0$，$R(t, x, \cdot)$ 是 $\mathscr{E}$ 上的测度。注意作为 t 的函数，$P(t, x, E)$ 非增，从而由（1.3.9），（1.3.18）和（1.3.28）立得（1.3.23）。

次证连续性。任给 $t_0>0$，任取 $u_0\notin H$：$0<u_0<t_0$，当 $v>t_0$ 时，就有

$$R(v, x, A)=\int P(v-u_0, y, A) r_1(u_0, x, dy),$$

这表明 $R(\cdot, x, A)$ 在 (t_0, ∞) 上连续。由于 $t_0>0$ 是任意的，故 $R(\cdot, x, A)$ 在 $(0, \infty)$ 上连续。

再证对于每 $A\in\mathscr{E}$，

$$(1.3.29)\qquad R(v, x, A)=r_1(v, x, A), \quad a.e. v.$$

事实上，由（1.3.27）和（1.3.28）知，上式对于每个 $v>t_0$ 且 $v\notin H_{u_0}$（t_0 和 u_0 如上段）成立，换言之，上式对几乎所有的 $v>t_0$ 成立。让 t_0 沿有理数集下降于零，便知上式对于几乎所有的 $v>0$ 成立。

最后，由（1.3.29）和（1.3.25）即得（1.3.22）。现在，如同由（1.3.25）导出（1.3.26）那样，可由（1.3.22）导出

$$R(t+t', x, A)=\int P(t', y, A) R(t, x, dy),$$

$$t\notin N_{t'}.$$

但等式两边都是 t 的连续函数，从而几乎处处相等推出处处相等，这便证得（1.3.24）。 ▌

至此，我们已完成证明 $\frac{d}{dt}P(t, x, A)$ $(t>0)$ 存在性的准备工作。

(1.3.30) **定理** 设 $(E, \mathscr{E}, \mathscr{S})$ 是具有可数基的内正则空间，$0<q(x)<\infty$。则 $P(t, x, A)$ $(t>0)$ 有连续导数 $P'(t, x, A)$；$P'(t, x, \cdot)$ 是 $\mathscr{S}$ 上的 σ 可加集函数，全变差不超过 $q(x)$；而且

$$(1.3.31)\quad P'(t,x,A)=q(x)(R(t,x,A)-P(t,x,A)),\quad t>0,\ A\in\mathscr{S}.$$

$$(1.3.32)\quad P'(s+t,x,A)=\int P'(s,x,dy)P(t,y,A),\quad s>0,\ t\geqslant 0,\ A\in\mathscr{S}.$$

若 $q(x)=0$，则 $P'(t, x, A)=0$，$t\geqslant 0$，$A\in\mathscr{S}$。

证 由 (1.3.22) 及 $R(\cdot, x, A)$ 的连续性立知 $P(t,x,A)$ 关于 $t>0$ 可微而且满足 (1.3.31)。关于 $P'(t, x, A)$ 的性质可由 (1.3.31) 看出。最后，由 (1.3.24)，(1.3.31) 和 K－C 方程立得 (1.3.32)。至于 $q(x)=0$ 的情况是平凡的。 ▌

(1.3.33) **定理** 在 (1.3.30) 的条件下，我们有

$$(1.3.34)\quad \lim_{t\searrow 0} R(t,x,\{x\})=0,$$

$$(1.3.35)\quad \lim_{t\searrow 0} P'(t,x,\{x\})=-q(x).$$

证 由 (1.3.24) 得

$$R(s+t,x,\{x\})\geqslant R(s,x,\{x\})P(t,x,\{x\}).$$

从而

$$R(t,x,\{x\})\geqslant P(t,x,\{x\})\ \overline{\lim_{s\searrow 0}}R(s,x,\{x\}).$$

进而

$$\underline{\lim_{t\searrow 0}}R(t,x,\{x\})\geqslant \overline{\lim_{s\searrow 0}}R(s,x,\{x\}).$$

这表明极限 $\lim_{t\searrow 0}R(t,x,\{x\})$ 存在。在 (1.3.22) 中取 $A=\{x\}$，得

$$\frac{e^{q(x)t}P(t,x,\{x\})-1}{q(x)t}=\frac{1}{t}\int_0^t e^{q(x)s}R(s,x,\{x\})ds.$$

命 $t\searrow 0$ 即知 (1.3.34) 成立。由此及 (1.3.31) 即得(1.3.35)。

下述结果是前一结果的补充。

(1.3.36) **定理** 在定理(1.3.30)的条件下，若 $x\notin A\in\mathscr{R}$，则

(1.3.37) $\lim\limits_{t\searrow 0}R(t,x,A)=q(x,A)/q(x)$，

(1.3.38) $\lim\limits_{t\searrow 0}P'(t,x,A)=q(x,A)$.

证 对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使当 $0<t<\delta$ 时，

$$\inf_{y\in A}P(t,y,\{y\})>1-\varepsilon.$$

从而由 (1.3.24) 得

$$R(s+t,x,A)\geqslant\int_A R(s,x,dy)\,p(t,y,A)$$
$$\geqslant(1-\varepsilon)R(s,x,A).$$

以下的证法与前一证明类似。

(1.3.39) **定理** 在(1.3.30) 的条件下，若 $c\equiv\sup\limits_{x\in A}q(x)<\infty$，则 $R(t,x,A)$ 和 $P'(t,x,A)$ 都是 t 的有界变差函数。

证 由(1.3.24)，$K-C$ 方程及 (1.2.3) 得

$$R(s+t,x,A)\geqslant\int_A R(s,x,dy)P(t,y,A)$$
$$\geqslant e^{-ct}R(s,x,A),$$
$$P(s+t,x,A)\geqslant\int_A P(s,x,dy)P(t,y,A)\geqslant$$
$$\geqslant e^{-ct}P(s,x,A).$$

因而 $e^{ct}R(t,x,A)$ 和 $e^{ct}P(t,x,A)$ 都是 t 的非减函数。从而 $R(t,x,A)$ 和 $P(t,x,A)$ 都是 t 的有界变差函数。进而，由 (1.3.31) 知 $P'(t,x,A)$ 亦然。

(1.3.40) **定理** 设 $(E,\mathscr{O},\mathscr{E})$ 是具有可数基的内正则空间，$q(x)-q(x,A)$ 是全稳定 q 对。则对于每 $A\in\mathscr{E}$；$c\equiv\sup\limits_{x\in A}q(x)<\infty$，我们有

(1.3.41) $$P'(s+t,x,A)=\int P(s,x,dy)P'(t,y,A).\quad t>0,\ s\geqslant 0.$$

证 本证明的前半部分与定理(1.3.21)的证法类似. 在前一证明中，我们已证 $e^{ct}P(t,x,A)$ 是 t 的非减函数. 因此由(1.3.30)和(1.3.38)得

$$0\leqslant e^{-ct}\frac{d}{dt}(e^{ct}P(t,x,A))=P'(t,x,A)+cP(t,x,A)$$

$$\equiv U(t,x,A),\quad t\geqslant 0.$$

另一方面，由定理(1.3.30)知，$|P'(t,x,A)|\leqslant q(x)$，从而

(1.3.42) $$U(t,x,A)\leqslant q(x)+c.$$

由 $U(t,x,A)$ 的定义得

(1.3.43) $$P(t,x,A)=\int_0^t e^{-c(t-s)}U(s,x,A)\,ds+e^{-ct}I_A(x).$$

反复应用此式，得

$$\int_0^{t+t'} e^{-c(t+t'-s)}U(s,x,A)\,ds+e^{-c(t+t')}I_A(x)$$

$$=P(t+t',x,A)$$

$$=\int P(t',x,dy)P(t,y,A)$$

$$=\int P(t',x,dy)\int_0^t e^{-c(t-s)}U(s,y,A)\,ds+e^{-ct}P(t',x,A)$$

$$=\int_0^t e^{-c(t-s)}\int P(t',x,dy)U(s,y,A)\,ds+\int_0^{t'} e^{-c(t+t'-s)}U(s,x,A)\,ds+e^{-c(t+t')}I_A(x),$$

因而

$$\int_0^t e^{cs}ds\int U(s,y,A)P(t',x,dy)$$

$$=e^{-ct'}\int_0^{t+t'}e^{cs}U(s,x,A)ds$$

$$=\int_0^t e^{cs}U(s+t',x,A)ds.$$

这表明，对于每 $t'>0$，存在零集 $N_{t'}$，使得

$$(1.3.44)\qquad U(t+t',x,A)=\int P(t',x,dy)U(t,y,A)\qquad t\notin N_{t'}.$$

特别地，

$$(1.3.45)\qquad U(t+t',x,A)\geqslant\int_{E_n}P(t',x,dy)U(t,y,A),\qquad t\notin N_{t'}.$$

此处 $E_n=\{y:q(y)\leqslant n\}$. 由（1.3.42）知，在 E_n 上，$U(t,y,A)\leqslant q(y)+c\leqslant n+c$. 又因 $U(t,y,A)$ 是 t 的连续函数，所以上式的右方亦然. 上式左方自然也是如此，故上式对一切 t 成立. 命 $n\to\infty$，便知：对一切的 t，t' 和 x，恒有

$$(1.3.46)\qquad U(t+t',x,A)\geqslant\int P(t',x,dy)U(t,y,A).$$

如果能够证明：对于一切 $t>0$，$t'\geqslant0$，上式可改为等式，那么，在这个等式中，将 $U(t,x,A)$ 代之以所定义的 $P'(t,x,A)+cP(t,x,A)$，便可立即得到（1.3.41）.

往证（1.3.46）的反向不等式对于 $t>0$ 和 $t'>0$ 成立. 事实上，（1.3.45）的右方是 (t,t') 连续函数，从而是二元可测的. 作为它的极限，（1.3.44）的右方亦然. （1.3.44）的左方也是如此，这样，由 Fubini 定理和（1.3.44）知：存在 $t>0$ 的一个零集 H，对于每 $t\notin H$，存在零集 H_t，使得

$$(1.3.47)\qquad U(t+t',x,A)=\int P(t',x,dy)U(t,y,A)$$

$$0<t\notin H,\ t'\notin H_t.$$

往证对于每 $0<t\notin H$，$H_t=\phi$. 反证之. 设存在 $0<t_0\notin H$ 和 $t_0'\notin H_{t_0}$，使上式不真. 那么，由 (1.3.46) 知，此时必有

$$U(t_0+t_0',x,A)>\int P(t_0',x,dy)U(t_0,y,A).$$

于是当 $t'>t_0'$ 时，就有

$$\begin{aligned}&\int P(t',x,dy)U(t_0,y,A)\\&=\int P(t'-t_0',x,dz)\int P(t_0',z,dy)U(t_0,y,A)\\&=P(t'-t_0',x,\{x\})\int P(t_0',x,dy)U(t_0,y,A)\\&\quad+\int_{E-\{x\}}P(t'-t_0',x,dz)\int P(t_0',z,dy)U(t_0,y,A).\end{aligned}$$

由于 $P(t'-t_0',x,\{x\})\geqslant e^{-q(x)(t'-t_0')}>0$，于是由 (1.3.46) 及上面两式得

$$\begin{aligned}&\int P(t',x,dy)U(t_0,y,A)\\&<P(t'-t_0',x,\{x\})U(t_0+t_0',x,A)\\&\quad+\int_{E-\{x\}}P(t'-t_0',x,dz)U(t_0+t_0',z,A)\\&=\int P(t'-t_0',x,dz)U(t_0+t_0',z,A)\\&\leqslant U(t_0+t',x,A).\qquad\text{(利用 (1.3.46))}\end{aligned}$$

这表明：对于一切 $t'>t_0'$，

$$\int P(t',x,dy)U(t_0,y,A)<U(t_0+t',x,A).$$

这显然与 (1.3.47) 矛盾. 故对一切 $0<t\notin H$，$H_t=\phi$. 换言之，我们证得

$$U(t+t',x,A)=\int P(t',x,dy)U(t,y,A),$$

$$0<t\notin H,\ t'\geqslant 0.$$

任意给定 $t,t'>0$，取 $t_1\notin H$：$0<t_1<t$，则由上式得

$$U(t+t',x,A)=U(t_1+(t+t'-t_1),x,A)$$

$$=\int P(t+t'-t_1,x,dy)U(t_1,y,A)$$

$$=\int P(t',x,dz)\int P(t-t_1,z,dy)U(t_1,y,A)$$

$$\leqslant\int P(t',x,dz)U(t,z,A),\quad（利用（1.3.46））$$

这正是我们所需要的（1.3.46）的反向不等式。 ▌

§1.4 拉氏变换

本节将建立跳过程及其拉氏变换的一一对应关系。设 $P(t,x,A)$（$t\geqslant 0,x\in E,A\in\mathscr{E}$）为任一跳过程，那么它的拉氏变换 $P(\lambda,x,A)$（$\lambda>0,x\in E,A\in\mathscr{E}$）定义为

$$P(\lambda,x,A)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}P(t,x,A)dt.$$

（1.4.1）**引理** 设 $P(\lambda,x,A)$ 是任一跳过程 $P(t,x,A)$ 的拉氏变换，那么它满足如下条件：

(i) 对每 $\lambda>0$ 和 $A\in\mathscr{E}$，$P(\lambda,\cdot,A)\in\mathscr{E}_+$；

对每 $\lambda>0$ 和 $x\in E$，$P(\lambda,x,\cdot)\in\mathscr{L}_+$；

(ii) 范条件：对每 $\lambda>0$，$x\in E$ 和 $A\in\mathscr{E}$，

$$0\leqslant\lambda P(\lambda,x,A)\leqslant 1;$$

(iii) 预解条件：对每 λ，$\mu>0$，$x\in E$ 和 $A\in\mathscr{E}$，

$$P(\lambda,x,A)-P(\mu,x,A)+(\lambda-\mu)\cdot\int P(\lambda,x,dy)P(\mu,y,A)=0;$$

(iv) 连续条件：对每 $x\in E$ 和 $A\in\mathscr{E}$，

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda P(\lambda,x,A)=\delta(x,A).$$

如果 $P(t,x,A)$ 还是 q 过程，则 $P(\lambda,x,A)$ 还满足

(v) q 条件：对每 $x\in E$ 和 $A\in\mathscr{R}$，

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda[\lambda P(\lambda,x,A)-\delta(x,A)]=q(x,A)-q(x)\delta(x,A).$$

如果 $P(t,x,A)$ 是不断的，则对于每 $\lambda>0$ 和 $x\in E$，

$$\lambda P(\lambda,x,E)=1.$$

证 我们只验证 q 条件，其它条件都是容易验证的。由假设

$$\lim_{t\searrow 0}[P(t,x,A)-\delta(x,A)]/t$$
$$=q(x,A)-q(x)\delta(x,A),\quad x\in E,\ A\in\mathscr{R}.$$

若 $x\notin A\in\mathscr{R}$，则对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使当 $0<t\leqslant\delta$ 时，

$$|P(t,x,A)-tq(x,A)|<\varepsilon t.$$

注意

$$\int_0^\infty\lambda e^{-\lambda t}dt=\int_0^\infty\lambda^2e^{-\lambda t}t\,dt=1,\quad\lambda>0,$$

便得

$$|\lambda^2P(\lambda,x,A)-q(x,A)|$$
$$=\left|\int_0^\infty\lambda^2e^{-\lambda t}[P(t,x,A)-tq(x,A)]dt\right|$$
$$\leqslant\varepsilon+\lambda^2\int_\delta^\infty e^{-\lambda t}(1+tq(x,A))dt$$
$$=\varepsilon+2\lambda e^{-\frac{\lambda\delta}{2}}\int_\delta^\infty\left(\frac{\lambda}{2}\right)e^{-\frac{\lambda t}{2}}dt$$
$$+4e^{-\frac{\lambda\delta}{2}}q(x,A)\int_\delta^\infty\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2e^{-\frac{\lambda t}{2}}t\,dt$$
$$<\varepsilon+(2\lambda+4q(x,A))e^{-\lambda\delta/2}\quad.$$

先令 $\lambda\to\infty$，次令 $\varepsilon\to 0$，便知

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^2P(\lambda,x,A)=q(x,A),\quad x\notin A\in\mathscr{R}.$$

这样，我们只需再证

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda[\lambda P(\lambda,x,\{x\})-1]=-q(x),\quad x\in E.$$

如果 $q(x)<\infty$，则上面的证法完全适用．今设 $q(x)=\infty$，那么对每 $M>0$，存在 $\delta>0$，使

$$1-P(t,x,\{x\})\geqslant Mt,\quad 0\leqslant t\leqslant\delta.$$

这样

$$\lambda-\lambda^2P(\lambda,x,\{x\})=\lambda^2\int_0^\infty e^{-\lambda t}[1-P(t,x,\{x\})]dt$$

$$\geqslant\lambda^2\int_0^\delta e^{-\lambda t}Mtdt=M\int_0^{\lambda\delta}e^{-s}sds.$$

可见

$$\underline{\lim}_{\lambda\to\infty}\lambda[1-\lambda P(\lambda,x,\{x\})]\geqslant M.$$

但 M 任意，故

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda[1-\lambda P(\lambda,x,\{x\})]=\infty.\qquad\rrbracket$$

本节的主要目的是证明上述引理的逆也是对的．主要结果是

(1.4.2) **定理** $P(\lambda,x,A)$ ($\lambda>0,x\in E,A\in\mathscr{E}$) 是某个跳过程 $P(t,x,A)$ ($t\geqslant 0,x\in E,A\in\mathscr{E}$) 的拉氏变换的充要条件是上述引理中的条件 (i) — (iv) 成立．此时，过程 $P(t,x,A)$ 不断的充要条件是：对于一切 $\lambda>0$ 和 $x\in E$，$\lambda P(\lambda,x,E)=1$.

证 我们只需证明：若条件 (i) — (iv) 成立，则 $P(\lambda,x,A)$ 是一个跳过程 $P(t,x,A)$ 的拉氏变换．一旦完成了这一证明，则最后一项断言就容易验证了．

证明的基本想法是：选择一个适当的 Banach 空间，通过 $P(\lambda,x,A)$ 造出这个 Banach 空间上的一族预解算子 $\{P_\lambda:\lambda>0\}$，然后应用 Hille-Yosida 定理决定相应的强连续压缩半群．最后由此半群构造出所需的过程．

(*a*) 选 Banach 空间．与通常使用 $_b\mathscr{E}$（上确界范数）不同，这里选用 $\mathscr{L}$．在 $\mathscr{L}$ 上定义线性运算：

$$(c_1\varphi_1+c_2\varphi_2)(A)=c_1\varphi_1(A)+c_2\varphi_2(A),\quad A\in\mathscr{E},$$
$$c_1,c_2\in\boldsymbol{R},\quad \varphi_1,\varphi_2\in\mathscr{L}$$

和范数：

$$\|\varphi\| = \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} |\varphi(A_i)| : \{A_i\}_1^n \subset \mathscr{E},\ \text{两两不交}\right.$$
$$\left.\text{且} \sum_{i=1}^{n} A_i = E,\ n \geqslant 1\right\}.$$

它即是 φ 的全变差：$\|\varphi\| = \varphi^+(E) + \varphi^-(E)$。那么 $(\mathscr{L}, \|\cdot\|)$ 是一个 Banach 空间。

(b) 造$\mathscr{L}$上的线性算子族$\{P_\lambda: \lambda > 0\}$。

给定满足条件 (i) — (iv) 的 $P(\lambda, x, A)$ $(\lambda > 0,\ x \in E,\ A \in \mathscr{E})$，命

$$(P_\lambda\varphi)(A) = \int \varphi(dx) P(\lambda, x, A),\ A \in \overline{\mathscr{E}}.$$

取 P_λ 的定义域$\mathscr{D}(P_\lambda)$为$\mathscr{L}$。则 P_λ 是从$\mathscr{L}$到自身的线性算子，而且是压缩的：

$$\|P_\lambda\| \leqslant 1/\lambda.$$

下面，我们分两步来证明 P_λ 是预解算子。

(c) P_λ 是$\mathscr{L}$到自身的一一映射。

取 $\varphi \in \mathscr{L}$，并设 $A^\lambda_\pm$ 是 $\varphi - \lambda P_\lambda \varphi$ 的 Hahn 分解，那么

$$\|\varphi - \lambda P_\lambda \varphi\| = (\varphi - \lambda P_\lambda \varphi)(A^\lambda_+) - (\varphi - \lambda P_\lambda \varphi)(A^\lambda_-)$$
$$= \int \varphi(dx)(\delta(x, A^\lambda_+) - \lambda P(\lambda, x, A^\lambda_+))$$
$$- \int \varphi(dx)(\delta(x, A^\lambda_-) - \lambda P(\lambda, x, A^\lambda_-))$$
$$\leqslant \int |\varphi|(dx)\, |\delta(x, A^\lambda_+) - \lambda P(\lambda, x, A^\lambda_+)|$$
$$+ \int |\varphi|(dx)\, |\delta(x, A^\lambda_-) - \lambda P(\lambda, x, A^\lambda_-)|$$

此处 $|\varphi| = \varphi^+ + \varphi^-$，如果 $x \in A^\lambda$，则

$$0 \leqslant 1 - \lambda P(\lambda, x, A^\lambda) = \delta(x, A^\lambda) - \lambda P(\lambda, x, A^\lambda)$$
$$\leqslant 1 - \lambda P(\lambda, x, \{x\}).$$

如果 $x \notin A^\lambda$，则

$$0 \geqslant -\lambda P(\lambda, x, A^\lambda) = \delta(x, A^\lambda) - \lambda P(\lambda, x, A^\lambda)$$
$$\geqslant -\lambda P(\lambda, x, E-\{x\}) \geqslant \lambda P(\lambda, x, \{x\}) - 1.$$

可见

$$|\delta(x, A^\lambda) - \lambda P(\lambda, x, A^\lambda)| \leqslant 1 - \lambda P(\lambda, x, \{x\}).$$

于是由条件 (iv) 和控制收敛定理知

$$\lim_{\lambda\to\infty} \|\varphi - \lambda \mathrm{P}_\lambda \varphi\| = 0.$$

为证 P_{λ_0} 是一一的，只需证 $\mathrm{P}_{\lambda_0}\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0$。但由(iii) 知，$\mathrm{P}_{\lambda_0}\varphi = 0$ 导致 $\mathrm{P}_\lambda\varphi = 0$ 对一切 $\lambda > 0$ 成立。特别地，由上式得到 $\varphi = 0$。至此，我们已证得断言 (c)。

现在，若用 $\mathscr{R}(\mathrm{P}_\lambda) \subset \mathscr{L}$ 表 P_λ 的值域，则我们可以定义 $\mathscr{R}(\mathrm{P}_\lambda)$ 上的一个算子 Ω_λ 如次：

$$\lambda \mathrm{I} - \Omega_\lambda = \mathrm{P}_\lambda^{-1}.$$

往证

(d) $\Omega_\lambda(\lambda > 0)$ 与 λ 无关，记作 Ω；$\mathscr{D}(\Omega)$ 在 $\mathscr{L}$ 中稠。

我们先证 $\mathscr{D}(\Omega_\lambda)$ 与 $\lambda > 0$ 无关。任取 $\varphi \in \mathscr{L}$，由 (iii) 得

$$\mathrm{P}_\mu\varphi = \mathrm{P}_\lambda(\varphi + (\lambda - \mu)\mathrm{P}_\mu\varphi).$$

这表明 $\mathscr{R}(\mathrm{P}_\mu) \subset \mathscr{R}(\mathrm{P}_\lambda)$。交换 λ 和 μ，便知 $\mathscr{D}(\Omega_\lambda) = \mathscr{R}(\mathrm{P}_\lambda) = \mathscr{R}(\mathrm{P}_\mu) = \mathscr{D}(\Omega_\mu)$。其次，我们证明对于每 $\varphi \in \mathscr{R}(\mathrm{P}_\lambda) = \mathscr{R}(\mathrm{P}_\mu)$，$\Omega_\lambda\varphi = \Omega_\mu\varphi$。事实上，若取 $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{L}$ 使 $\varphi = \mathrm{P}_\lambda\varphi_1 = \mathrm{P}_\mu\varphi_2$，则由 (iii) 可见

$$\mathrm{P}_\mu\varphi_2 - \mathrm{P}_\mu\varphi_1 + (\lambda - \mu)\mathrm{P}_\mu\mathrm{P}_\lambda\varphi_1$$
$$= \mathrm{P}_\lambda\varphi_1 - \mathrm{P}_\mu\varphi_1 + (\lambda - \mu)\mathrm{P}_\mu\mathrm{P}_\lambda\varphi_1 = 0.$$

但 P_μ 是一一的，从而 $\varphi_2 - \varphi_1 + (\lambda - \mu)\mathrm{P}_\lambda\varphi_1 = 0$。因此 $\mathrm{P}_\mu^{-1}\varphi - \mathrm{P}_\lambda^{-1}\varphi + (\lambda - \mu)\varphi = 0$。这表明 $\Omega_\lambda\varphi = \Omega_\mu\varphi$。最后，我们证明 $\mathscr{D}(\Omega) \equiv \mathscr{D}(\Omega_\lambda)$ 在 $\mathscr{L}$ 中稠。由于对每 $\varphi \in \mathscr{L}$，$\lambda\mathrm{P}_\lambda\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$，而且由已证的 (c) 知，$\lim_{\lambda\to\infty} \|\varphi - \lambda\mathrm{P}_\lambda\varphi\| = 0$，此即是稠性。

至此，我们已经证得 $\{\mathrm{P}_\lambda:\ \lambda > 0\}$ 满足 Hille-Yosida 定理的条件。因此，存在唯一的以 $\{\mathrm{P}_\lambda:\ \lambda > 0\}$ 为预解算子的 $\mathscr{L}$ 上的强连续

压缩半群$\{T_t:\ t\geqslant 0\}$，使得

$$P_\lambda\varphi=\int_0^\infty e^{-\lambda t}T_t\varphi dt$$

此处的积分是强积分（即 Bochner 积分．参见关肇直[2]，第二章§6）．特别地，

$$(P_\lambda\varphi)(A)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}(T_t\varphi)(A)dt$$

取 $\varphi_x=\delta(x,\cdot)$，则 $\varphi_x\in\mathscr{L}$，因而，我们可令

$$P(t,x,A)=(T_t\varphi_x)(A).$$

往证

(e) $P(t,x,A)$是一个跳过程．

由 Hille-Yosida 表现定理（见上书 p477），

$$(T_t\varphi_x)(A)=\lim_{n\to 0}\sum_{m=\infty}^{\infty}\frac{1}{m!}((tn\Omega P_n)^m\varphi_x)(A)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}((tn^2P_n-tnI)^m\varphi_x)(A)$$

$$=\lim_{n\to\infty}(e^{(tn^2P_n-tnI)}\varphi_x)(A).$$

由于 $\varphi_\cdot(A)$，$(P_\lambda\varphi_\cdot)(A)=P(\lambda,\cdot,A)\in\mathscr{E}_+$，因而$((tn\Omega P_n)\varphi_\cdot)(A)\in\mathscr{E}_+$．由归纳法知，对于每$m\geqslant 1$，$((tn\Omega P_n)^m\varphi_\cdot)(A)\in\mathscr{E}_+$．故$P(t,\cdot,A)=(T_t\varphi_\cdot)(A)\in\mathscr{E}_+$．显然$P(0,x,A)=\delta(x,A)$．其次，由于$e^{-tnI}$和$e^{tn^2P_n}$都是$\mathscr{L}_+$到自身的有界算子，$\varphi_x\in\mathscr{L}_+$，因而$T_t\varphi_x\in\mathscr{L}_*$，从而也就有$P(t,x,\cdot)\in\mathscr{L}_+$．由压缩性，

$$P(t,x,E)=(T_t\varphi_x)(E)\leqslant 1.$$

而由强连续性知$P(t,x,A)=(T_t\varphi_x)(A)$关于$t$连续．这样，可取拉氏变换：

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}P(t,x,A)dt=\int_0^\infty e^{-\lambda t}(T_t\varphi_x)(A)dt$$

$$=(P_\lambda\varphi_x)(A)=P(\lambda,x,A).$$

余下的只是验证 K-C 方程．首先注意

$$\overline{\lim_{h\to 0}}\left|\int P(s+h,x,dy)P(t,y,A)-\int P(s,x,dy)P(t,y,A)\right|$$

$$\leqslant\overline{\lim_{h\to 0}}\|P(s+h,x,\cdot)-P(s,x,\cdot)\|$$

$$=\overline{\lim_{h\to 0}}\|T_{s+h}\varphi_x-T_s\varphi_x\|=0$$

和

$$\overline{\lim_{h\to 0}}\left|\int P(s,x,dy)P(t,y,A)-\int P(s,x,dy)P(t+h,y,A)\right|$$

$$\leqslant\overline{\lim_{h\to 0}}\int P(s,x,dy)\,|P(t,y,A)-P(t+h,y,A)|$$

$$=0.$$

从而对于每固定的t，$\int P(s,x,dy)P(t,y,A)$ 关于 s 连续．交换 s 和 t，此项断言亦真．另一方面，$P(s+t,x,A)$ 也有同样的性质．这样，

$$\int_0^\infty dte^{-\mu t}\int P(s,x,dy)P(t,y,A)$$

和

$$\int_0^\infty dte^{-\mu t}P(s+t,x,A)$$

都是依 s 连续的．然而由 (iii) 得

$$\int_0^\infty ds\int_0^\infty dte^{-\lambda s-\mu t}\int P(s,x,dy)P(t,y,A)$$

$$=\int P(\lambda,x,dy)P(\mu,y,A)$$

$$=\frac{1}{\mu-\lambda}[P(\lambda,x,A)-P(\mu,x,A)]$$

$$=\int_0^\infty ds\int_0^\infty dte^{-\lambda s-\mu t}P(s+t,x,A).$$

故由拉氏变换的唯一性定理得

$$\int P(s,x,dy)P(t,y,A)=P(s+t,x,A),$$

$$s,t\geqslant 0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E}.\qquad \blacksquare$$

因为 $P(t,x,A)$ 与 $P(\lambda,x,A)$ 之间的一一对应关系，以后，我们也称 $P(\lambda,x,A)$ 为跳过程（q 过程）。

如果跳过程 $P(\lambda,x,A)$ 满足上述条件（i）—（iv），那么它唯一决定一个 $P(t,x,A)$，可定义相应的 $\mathscr{R}$。这样，引理(1.4.1)的证明又表明

(1.4.3) 推论 $P(\lambda,x,A)$ 是一个 q 过程的充要条件是引理(1.4.1) 中的（i）—（v）成立。

我们已经看到，这个推论并无新意。因为 q 条件施加在 $P(t,x,A)$ 上而不是直接施加在 $P(\lambda,x,A)$ 上。下述结果才是真正有意义的，因为此时 q 条件直接施加在 q 对上。

(1.4.4) 推论 使用（1.2.17）的假设和记号。$P(\lambda,x,A)$ 是 q 过程的充要条件是定理（1.4.2）的条件（i）—（iv）及

(v) q条件：
$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda[\lambda P(\lambda,x,AE_n)-\delta(x,AE_n)]$$
$$=q(x,AE_n)-q(x)\delta(x,AE_n)$$
$$A\in\mathscr{E},\ n\geqslant 1$$

同时成立。

证 由引理（1.4.1），这里的条件（v）显然是满足的。今设所设条件成立。则由定理（1.4.2）知存在过程 $P(t,x,A)$。由它导出一对函数 $\overline{q}(x)-\overline{q}(x,A)$ $(x\in E, A\in\mathscr{R})$。那么，由这里的条件（v）及引理（1.4.1）的证明立知：$q(x)=\overline{q}(x), x\in E$。而且

$$q(x,AE_n)=\overline{q}(x,AE_n),\ x\in E,\ A\in\mathscr{E},\ n\geqslant 1.$$

若命

$$\overline{E}_n=\{x\in E:\ n-1\leqslant\overline{q}(x)<n\}\cup\{x_n\},\ n\geqslant 1$$

其中 $\{x_n\}$ 如（1.2.17），则上述结果 $q(x)=\overline{q}(x)$，$x\in E$ 保证了 $\overline{E}_n=E_n$，$n\geqslant 1$。这样，由于 $q(x)-q(x,A)$ 是 q 对及引理（1.2.16），$\overline{q}(x,\cdot)$ 有唯一扩张，且

$$\overline{q}(x,A)=q(x,A),\ x\in E,\ A\in\mathscr{E}.$$

特别地

$$\lim_{t\searrow 0}(P(t,x,A)-\delta(x,A))/t$$
$$=\overline{q}(x,A)-\overline{q}(x)\delta(x,A)$$
$$=q(x,A)-q(x)\delta(x,A),\ x\in E,\ A\in\mathscr{R}.$$

这表明 $P(t,x,A)$是具有 q 对 $q(x)-q(x,A)$的 q 过程。 ▌

§1.5 补充与注记

(1.5.1) 对于本书经常用到的属于 Dynkin 的单调类定理，可参考*)严士健、王隽骧和刘秀芳[1]：p23. 定理8和p106. 定理12. 有时候，我们需要较广的函数类。因此，p106定义$\mathscr{L}$系L的条件 Ⅱ）可以换成

Ⅱ)′. 设$c_1,c_2\in\boldsymbol{R}$, $f_1,f_2\in L$. 如f_1, f_2有界，或者$c_1f_1+c_2f_2\in\mathscr{L}$, 则$c_1f_1+c_2f_2\in L$.

单调类定理的另一种特殊形式是

(1.5.2) **定理** 设函数族 L 满足如下条件：

(i) $L\supset\{I_A;\ A\in\mathscr{E}\}$;

(ii) L 对锥射运算封闭。即若 $c_1,c_2\geqslant 0$, $f_1,f_2\in L$, 则 $c_1f_1+c_2f_2\in L$;

(iii) L 对单调增极限运算封闭。即若 $0\leqslant f_n\in L$, $f_n\uparrow f\in\mathscr{E}$, 则 $f\in L$.

那么，$L\supset\mathscr{E}_+$.

本章多处用到拉氏变换的唯一性定理，它的一般形式是

(1.5.3) **定理** 设 $\varphi(t)$ $(0\leqslant t<\infty)$ 是 Borel 可测函数. 对每$\lambda>0$,

*）也可参考Blumenthal and Getoor [1]，第0章.

$$(1.5.4)\qquad \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\varphi(t)dt=0.$$

则 $\varphi=0$, $a.e.t.$ 特别地，若 φ 右连续（左连续且 $\varphi(0)=0$，连续），则 $\varphi\equiv 0$。

证 由（1.5.4）可见

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{n}{\gamma}t}\varphi(t)dt=0,\quad n=1,2,\cdots$$

命 $s=e^{-t}$，我们得到

$$(1.5.5)\qquad \int_0^1 s^{n-1}\psi(s)ds=0,\quad n\geqslant 1.$$

此处 $\psi(s)=\varphi(-\log s)$ $(0<s\leqslant 1)$，它在[0,1]上可积. 命

$\mathscr{L}$ = 全体[0,1]上的有界 Borel 可测函数

L = 全体使 $\int_0^1 f(s)\psi(s)ds=0$ 的 $\mathscr{L}$ 中函数 f.

则易证 L 是一个 $\mathscr{L}$ 系. 而且由 Weierstrass 定理知，L 包含一切连续函数，从而由单调类定理知 $L\supset\mathscr{L}$. 特别地，取 $f=\psi_m\equiv\psi I_{[|\psi|<m]}$，$m\geqslant 1$，则

$$\int_0^1 \psi^2(s)I_{[|\psi|<m]}(s)ds=0.$$

命 $m\to\infty$，即得 $\int_0^1 \psi^2(s)ds=0$，或等价地，$\varphi=0$，$a.e.$ ∎

这个证明取自 Dynkin[1]p 26.

定理(1.1.3) 取自Kingman[2]，p160. 它是 Le′vy-Austin-Ornstein 定理的一般化. 更一般的结果（可以是非 Polish 空间）见 Kingman[1].

对于马链，转移函数在零点的可微性最早由 Kolmogorov

[3]得到．Kendall[3] 推广到一般状态空间．这里，我们参考了王梓坤[1]．定理（1.2.24）部分地取自胡迪鹤[2]．

§1.3 的结果基本上取自许宝騄[1]，他处理了欧氏空间．其背景来自Austin [1] 和Chung（钟开莱）[1]．推广到一般状态空间的可能性是由于引理（1.3.12），它属于郑小谷、刘秀芳[1]，这里，我们引进内正则空间的概念（1.3.10）和引理（1.3.11），结果更为清晰．对于含瞬时态情形，文郑、刘[1]的结果对定理（1.3.40）略广，但依然不能完全包括含瞬时态的马链．因此，含瞬时态的跳过程的可微性还没有解决．

定理（1.4.2）取自胡迪鹤[1]，对于马链情形，引进拉氏变换技巧主要归功于 Feller[3]，Reuter [1] 作过系统的研究．

（1.5.6）**注** 如果使用关于正则条件概率的结果，我们可以直接从（1.3.6）得到（1.3.18)所述的修正．并改进(1.3.18)及随后的结果．

记$\boldsymbol{R}_+=[0,\ \infty)$，以$\mathscr{B}(\boldsymbol{R}_+)$表$\boldsymbol{R}_+$上的 Borel σ 代数，以μ表普通的 Lebesgue 测度．假定我们已给r：$\boldsymbol{R}_+\times \boldsymbol{E}\to\boldsymbol{R}$，满足：对于每$A\in\mathscr{E}$，$r(\cdot,A)\in\mathscr{B}(\boldsymbol{R}_+)$，

$$0\leqslant r(t,A)\leqslant 1,\ a.e.t;\ r(t,E)=1,\ a.e.t;$$

$$r(t,\sum_i A_i)=\sum_i r(t,A_i),\ a.e.t$$

我们的目的是要构造 R：$\boldsymbol{R}_+\times E\to\boldsymbol{R}_+$，使

$$R(\cdot,A)\in\mathscr{B}(\boldsymbol{R}_+),\ A\in\mathscr{E};\ R(t,\cdot)\text{为}\mathscr{E}\text{上的概率},\ t\geqslant 0;$$

$$R(\cdot,A)\overset{\bullet}{=}r(\cdot,A),\ a.e.t,\ A\in\mathscr{E}.$$

为此，我们只需考虑$t\in[0,1]$的情形．以下记$\mathscr{B}=\mathscr{B}([0,1])$．假定$(E,\mathscr{E})$是一个万有可测空间（universal measurable space）．我们可构造$\mathscr{B}\times\mathscr{E}$上的概率测度$\boldsymbol{P}$，使

$$\boldsymbol{P}(\varLambda\times A)=\int_\varLambda r(t,A)dt,\ \varLambda\in\mathscr{B},\ A\in\mathscr{E}.$$

并取$\mathscr{C}=\mathscr{C}\times E$．我们注意，若$N\in\mathscr{C}$，$\boldsymbol{P}(N)=0$，则存在$\varLambda\in\mathscr{B}$，

使 $N=\Lambda\times E$ 且 $\mu(\Lambda)=\boldsymbol{P}(N)=0$.对于每 $B\in\mathscr{B}\times\mathscr{E}$,我们可定义

$$\widetilde{R}(t,B)=\boldsymbol{P}[B|\mathscr{C}](t),\ \mu\text{-}a.\ e.$$

为了得到 $\widetilde{R}$ 的正则修正（关于正则条件概率的进一步研究见马志明：正则条件概率存在的充要条件及连续性与离散性，将发表于数学学报），只需注意（$[0,1]\times E$，$\mathscr{B}\times\mathscr{E}$）也是万有可测空间，故 $\widetilde{R}$ 有正则修正，记作 $\overline{R}$。今取

$$R(t,A)=\overline{R}(t,[0,1]\times A),t\in[0,1],\ A\in\mathscr{E}.$$

则对于每 $A\in\mathscr{E}$ 和 $\Lambda\in\mathscr{B}$,

$$\begin{aligned}&\int_\Lambda R(t,A)dt\\&=\int_{\Lambda\times E}\overline{R}(t,[0,1]\times A)d\boldsymbol{P}\\&=\boldsymbol{P}[(\Lambda\times E)\cap[0,1]\times A]\\&=\boldsymbol{P}(\Lambda\times A)\\&=\int_\Lambda r(t,A)dt.\end{aligned}$$

可见对于每 $A\in\mathscr{E}$,

$$R(\cdot,A)=r(\cdot,A),\ a,e,t.$$

由此立知 R 满足所需的条件。

有趣的是，如果状态空间是万有可测空间，则每一个马氏过程必定有转移概率函数（详见 S.E.Kuznetsov, Any Markov process in a Borel space has a transition function. Theory. Prob. Appl., 25, 389—393 (1980)）。反之，由于 Kolmogorov 扩张定理只依赖于 $\mathscr{E}$ 的可数生成性质及正则条件概率的存在性（参见Stroock 和 Varadhan [1] 定理 (1.1.10))，对于给定的万有可测空间 (E, $\mathscr{E}$) 上的转移函数，必定可以构造出相应的马氏过程。

实际上，为使所述的 $\boldsymbol{R}$ 存在，上述乘积测度 $\boldsymbol{P}$ 和正则条件概率的存在性都是必要的更为完整的讨论见笔者的新作 [9]。

第二章　q 过程的存在性及一些简单构造

本章先介绍一类算子方程的最小非负解理论。它是贯穿随后各章的基本工具。然后就全稳定情形证明 q 过程的存在定理，即构造最小 q 过程。我们也将研究柯氏向后、向前方程，流入、流出边界。并给出唯一性的若干充分条件。最后，就一种简单情形给出一切 q 过程的构造。

自本章起，所讨论的 q 对和 q 过程，都是全稳定的，以后不再一一申明。

§2.1　最小非负解

我们用 E 表示任一固定的非空集合。f，g，h，……表示定义在 E 上取值于 $\boldsymbol{R}_+\equiv[0,+\infty]$ 中的"函数"，这种函数的全体记作 $\mathscr{X}$。序关系是指逐点定义的。例如 $f\geqslant 0$，是指对每 $x\in E$，$f(x)\geqslant 0$。显然，$\mathscr{X}$ 对于非负系数的线性组合运算封闭，因而是一个凸锥。我们用 A 表示从 $\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{X}$ 的锥射（即与非负系数的线性组合运算可交换），它满足如下基本假设：

(2.1.1)　$\mathscr{X}\ni f_n\uparrow f\Rightarrow Af_n\uparrow Af$.

并以 $\mathscr{A}$ 表示这种锥射的全体。

此外，我们还假定 $0\cdot\infty=0$。

(2.1.2) **定义**　给定 $A\in\mathscr{A}$ 和 $g\in\mathscr{X}$。称 f^* 为方程

(2.1.3)　$f(x)=(Af)(x)+g(x)$，$x\in E$.

的最小非负解（简称最小解），倘若 f^* 满足上式，而且对于任何

满足上式的$\widetilde{f}\in\mathscr{X}$，都有

(2.1.4) $\widetilde{f}(x)\geqslant f^{*}(x)$，$x\in E$.

这种性质称为f^{*}的最小性.

为方便，以下常略去变元x不写.

(2.1.5) **定理** 方程（2.1.3）的最小解存在且唯一. 它可用如下方式得到：命

(2.1.6) $f^{(0)}=0$，$f^{(n+1)}=Af^{(n)}+g$，$n\geqslant 0$，

则 $f^{*}=\lim\limits_{n\to\infty}f^{(n)}$，而且极限是单调上升的.

证 显然$\mathscr{X}\ni f^{(n)}\uparrow$，故极限存在. 利用（2.1.1），得

$$f^{*}=\lim_{n\to\infty}f^{(n+1)}=\lim_{n\to\infty}(Af^{(n)}+g)=Af^{*}+g$$

从而f^{*}是一个解. 今假定$\widetilde{f}\in\mathscr{X}$是另一个解，则由于 $\widetilde{f}\geqslant f^{(0)}\equiv 0$，

若$\widetilde{f}\geqslant f^{(n)}$，则$\widetilde{f}=A\widetilde{f}+g\geqslant Af^{(n)}+g=f^{(n+1)}$可见$\widetilde{f}\geqslant f^{(n)}$，$\forall n\geqslant 0$. 当然就有$\widetilde{f}\geqslant f^{*}$. 显然，若有两个解满足最小性，则它们必定重合. 此即是唯一性. ▌

今后，我们把用（2.1.6）迭代得到f^{*}的解法称为典型解法.

(2.1.7) **定义** 若（2.1.3）中的$g=0$，则称该方程为齐次的.

(2.1.8) **推论** 齐次方程的最小解恒为零.

下面，我们要比较最小解之间的序关系. 设A、$\widetilde{A}\in\mathscr{A}$，若对于每$f\in\mathscr{X}$，$Af\geqslant\widetilde{A}f$，我们就记作$A\geqslant\widetilde{A}$.

(2.1.9) **定义** 若$A,\widetilde{A}\in\mathscr{A}$和$g$，$\widetilde{g}\in\mathscr{X}$满足

$$\widetilde{A}\geqslant A,\quad \widetilde{g}\geqslant g$$

则方程

(2.1.10) $\widetilde{f}\geqslant\widetilde{A}\widetilde{f}+\widetilde{g}$，$\widetilde{f}\in\mathscr{X}$

称为方程（2.1.3）的优方程.

(2.1.11) **比较定理** 设f^{*}是方程(2.1.3)的最小解，那么

对于方程（2.1.10）的任一解$\widetilde{f}$，我们有

$$\widetilde{f}\geqslant f^*.$$

证 依典型解法，只需利用数学归纳法证明 $\widetilde{f}\geqslant f^{(n)}$，$n\geqslant 0$.

定理（2.1.5）表明：对于每一个固定的$A\in\mathscr{A}$，作为从$\mathscr{H}$到自身的映射：$g\to f^*$有确切的意义．记之为K_A．下述结果是十分有趣的．

（2.1.12）**定理** K_A是锥射．如果$\{g_n\}\subset\mathscr{H}$，$g_n\uparrow g\in\mathscr{H}$，则$K_Ag_n\uparrow K_Ag$.

证 利用归纳法易证前一项断言．另一方面，由比较定理（2.1.11）立知K_A是保序的，即

$$g_1,\ g_2\in\mathscr{H},\ g_1\leqslant g_2\Longrightarrow K_Ag_1\leqslant K_Ag_2.$$

我们已经有

$$f^*_n=Af_n^*+g_n,$$

两边令$n\to\infty$，便知$\widetilde{f^*}=\lim\limits_{n\to\infty}f_n^*$是方程（2.1.3）的解．由保序性知$f^*=K_Ag\geqslant K_Ag_n=f_n^*$对每一个$n$成立，从而$f^*\geqslant\widetilde{f^*}$．再由$f^*$的最小性立得

$$f^*=\widetilde{f^*}=\lim_{n\to\infty}K_Ag_n.\qquad \rrbracket$$

（2.1.13）**推论** 设G是任一有限或可列集，$\{a_s:\ s\in G\}\subset\overline{\boldsymbol{R}}_+$，那么

$$K_A\left(\sum_{s\in G}a_sg_s\right)=\sum_{s\in G}a_sK_Ag_s.$$

证 当G为有限集时，结论可由（2.1.12）的第一项断言和数学归纳法得到，当G为可列集时，结论可由有限集情形及（2.1.12）的第二项断言得到． ▌

下述定理给出了求最小解的另一些迭代方法．其证法与前面类似，故从略．

（2.1.14）**定理** 设$\{g_n\}_1^\infty\subset\mathscr{H}$．命

$$\widetilde{f}^{(1)}=g_1,\quad \widetilde{f}^{(n+1)}=A\widetilde{f}^{(n)}+g_{n+1},\ n\geqslant 1.$$

若 $g_n\uparrow g$ $\left(相应地，\sum_{n=1}^{\infty}g_n=g\right)$，则$K_Ag=f^*=\lim_{n\to\infty}\widetilde{f}^{(n)}$ $\left(相应地，K_Ag=\sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{f}^{(n)}\right)$. 特别地，若命

$$\widetilde{f}^{(1)}=g,\quad \widetilde{f}^{(n+1)}=A\widetilde{f}^{(n)}$$

则 $K_Ag=f^*=\sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{f}^{(n)}$.

(2.1.15) **定理** 设$\widetilde{f}$是方程 (2.1.3) 的任一非负解且存在常数$p\geqslant 1$使$\widetilde{f}\leqslant pf^*$，则$\widetilde{f}=f^*$.若取初值$\widetilde{f}^{(0)}$：$0\leqslant\widetilde{f}^{(0)}\leqslant pf^*$，并用$\widetilde{f}^{(n+1)}=A\widetilde{f}^{(n)}+g$ $(n\geqslant 1)$ 迭代，则$\widetilde{f}^{(n)}\to f^*$，$n\to\infty$.

证 使用 (2.1.6) 和归纳法可证

(2.1.16) $\quad \widetilde{f}^{(n)}\geqslant f^{(n)},\ n\geqslant 0;$

(2.1.17) $\quad pf^*\geqslant\widetilde{f}^{(n)}+(p-1)f^{(n)},\ n\geqslant 0.$

如果$f^*(x)=\infty$，则由 (2.1.16) 知$\lim_{n\to\infty}\widetilde{f}^{(n)}(x)=\infty=f^*(x)$.

如果$f^*(x)<\infty$，则由(2.1.16)和(2.1.17)知$f^*(x)\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\widetilde{f}^{(n)}(x)\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\widetilde{f}^{(n)}(x)\leqslant f^*(x)$. 从而也有$\lim_{n\to\infty}\widetilde{f}^{(n)}(x)=f^*(x)$. 后一项断言得证.

往证前一项断言.设$0\leqslant\widetilde{f}\leqslant pf^*$.取$\widetilde{f}^{(0)}=\widetilde{f}$，并用$\widetilde{f}^{(n+1)}(x)=A\widetilde{f}^{(n)}+g$ $(n\geqslant 1)$ 迭代. 由后一项断言知$\lim_{n\to\infty}\widetilde{f}^{(n)}=f^*$. 然而，由于$\widetilde{f}$满足 (2.1.3)，从而对于每$n\geqslant 1$，这里的$\widetilde{f}^{(n)}=\widetilde{f}$. 故$\widetilde{f}=f^*$. ▌

(2.1.18) **定理** 如果$0<\inf_{x\in E}f^*(x)\leqslant\sup_{x\in E}f^*(x)<\infty$，那么，相应的齐次方程

(2.1.19) $\quad f=Af,\ f\in\mathscr{H},$

只有一个有界非负解，它就是零.

证 先设$\widetilde{f}$是方程（2.1.3）的任一有界非负解．则存在$c<\infty$使

$$c\geqslant\sup_x\widetilde{f}(x)\geqslant\sup_x f^*(x)\geqslant\inf_x f^*(x),$$

从而

$$0\leqslant\widetilde{f}\leqslant c\cdot\frac{f^*}{\inf\limits_x f^*(x)}=\left(\frac{c}{\inf\limits_x f^*(x)}\right)f^*.$$

于是由定理（2.1.15）知$\widetilde{f}=f^*$．

现在，我们设$\overline{f}$是（2.1.19）的任一有界非负解，则$\overline{f}+f^*$是方程（2.1.3）的有界非负解，从而由前段所证$\overline{f}+f^*=f^*$．故$\overline{f}=0$ ▌

(2.1.20) 注 设$U(x,A)$ （$x\in E$，$A\in\mathscr{E}$）是（E，$\mathscr{E}$）上的任一可测核，即对每$A\in\mathscr{E}$，$U(\cdot,A)\in\mathscr{E}_+$，而对每$x\in E$，$U(x,\cdot)$是$\mathscr{E}$上的测度．那么，上面的结果适用于方程

$$f(x)=\int U(x,dy)f(y)+g(x),\quad x\in E$$

和方程

$$\varphi(A)=\int\varphi(dx)U(x,A)+V(A),\ A\in\mathscr{E}.$$

此处$g\in\mathscr{E}_+$，V为$\mathscr{E}$上的测度．事实上，对于前者，条件(2.1.1)即是积分的单调收敛定理；对于后者，引理（1.2.15）和定理（1.5.2）保证了条件（2.1.1）也成立．

在目前的情况下，（2.1.13）有更一般的形式．这就是

(2.1.21) 定理 设U和T为（E,$\mathscr{E}$）上的两个可测核．

(i) 如对每$A\in\mathscr{E}$，$P(\cdot,A)$是方程

$$f=\int U(\cdot,dy)f(y)+T(\cdot,A),\quad f\in\mathscr{E}_+$$

的最小非负解，那么，对于每$g\in\mathscr{E}_+$，$\int P(\cdot,dy)g(y)$是方程

$$f=\int U(\cdot,dy)f(y)+\int T(\cdot,dy)g(y),\ f\in\mathscr{E}_+$$

的最小非负解。

(ii) 如果对于每 $x\in E$，$Q(x,\cdot)$是方程

$$\varphi=\int\varphi(dy)U(y,\cdot)+T(x,\cdot),\ \varphi\text{ 为测度}$$

的最小非负解，则对于每 $\mathscr{E}$ 上的测度 V，

$\int V(dx)Q(x,\cdot)$是方程

$$\varphi=\int\varphi(dy)U(y,\cdot)+\int V(dy)T(y,\cdot),\ \varphi\text{ 为测度}$$

的最小非负解。

证 我们只证 (i)，因为 (ii) 的证法类似。命

$$P^{(0)}(\cdot,A)=T(\cdot,A),\ A\in\mathscr{E},$$

$$P^{(n+1)}(\cdot,A)=\int U(\cdot,dy)P^{(n)}(y,A)+T(\cdot,A),$$

$$A\in\mathscr{E},\ n\geqslant 0.$$

则由 (2.1.20) 和 (2.1.5) 知

$$P^{(n)}(\cdot,\ A)\uparrow P(\cdot,\ A),\ n\to\infty,\ A\in\mathscr{E}.$$

由归纳法及(1.5.2)易见，对于每 $n\geqslant 0$ 和 $x\in E$，$P^{(n)}(x,\cdot)$为 $\mathscr{E}$ 上的测度，而且

$$\int P^{(0)}(\cdot,dy)g(y)=\int T(\cdot,dy)g(y)$$

$$\int P^{(n+1)}(\cdot,dy)g(y)$$

$$=\int U(\cdot,dy)\int P^{(n)}(y,dz)g(z)+\int T(\cdot,dy)g(y)$$

对于每 $n\geqslant 0$ 和 $g\in\mathscr{E}_+$ 成立。今固定 $g\in\mathscr{E}_+$，并命

$$f^{(0)}=\int T(\cdot,dy)g(y),$$

$$f^{(n+1)}=\int U(\cdot,dy)f^{(n)}(y)+\int T(\cdot,dy)g(y),\ n\geqslant 0,$$

则显然有

$$f^{(0)}=\int P^{(0)}(\cdot,dy)g(y).$$

若设

$$f^{(s)}=\int P^{(s)}(\cdot,dy)g(y),$$

则

$$\begin{aligned}f^{(n+1)}&=\int U(\cdot,dy)f^{(n)}(y)+\int T(\cdot,dy)g(y)\\&=\int U(\cdot,dy)\int P^{(n)}(y,dz)\,g(z)+\int T(\cdot,dy)g(y)\\&=\int P^{(n+1)}(\cdot,dy)g(y).\end{aligned}$$

从而对一切$n\geqslant 0$，有$f^{(n)}=\int P^{(n)}(\cdot,dy)g(y)$。命$n\to\infty$，由(2.1.20)，(2.1.5)和(1.5.2)立知所述断言成立。

最小解理论之所以特别适用于跳过程，其原因是：跳过程（准确地说，最小跳过程）的轨道是阶梯函数，反映依次的每一个跳，即是最小解的迭代。为说明这一点，我们给出两个初步的应用。

设$\{X_n\}_{n\geq 0}$是定义在概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上，取值于离散状态空间E的离散参数马链，一步转移概率矩阵为$(P_{ij};\ i,j\in E)$。记

$$f_{ij}^{(n)}=P[X_{m+k}\neq j,k=1,2,\cdots,n-1;\ X_{m+n}=j\mid X_m=i],$$

$$f_{ij}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{ij}^{(n)}.$$

(2.1.22) **定理** 对每固定的j，$\{f_{ij};\ i\in E\}$是方程

$$x_i=\sum_{k\neq j}P_{ik}x_k+P_{ij}$$

的最小解。特别地，j是常返的当且仅当$x_j^*=1$。

证 因为$x_i^{(1)}=P_{ij}=f_{ij}^{(1)}$。若设$x_i^{(n)}=f_{ij}^{(n)}$，则

$$x_i^{(n+1)}=\sum_{k\neq j}P_{ik}x_k^{(n)}=\sum_{k\neq j}P_{ik}f_{kj}^{(n)}=f_{ij}^{(n+1)}$$

从而由（2.1.14）知 $x_i^*=f_{ij}$. ▌

（2.1.23）定理 记

$$\mu_{ij}=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{ij}^{(n)}.$$

那么，对每固定的j，$\{\mu_{ij};\ i\in E\}$是方程

$$x_i=\sum_{k\neq j}P_{ik}x_k+f_{ij}$$

的最小解。特别地，若 j 常返，则 j 为正常返的当且仅当 $x_j^*<\infty$。

证 命

$$y_i^{(1)}=f_{ij}^{(1)},\ i\in E,$$

$$y_i^{(n+1)}=\sum_{k\neq j}P_{ik}y_k^{(n)}+f_{ij}^{(n+1)},\ n\geqslant 1,\ i\in E$$

若设 $y_i^{(n)}=nf_{ij}^{(n)}$，则

$$y_i^{(n+1)}=n\sum_{k\neq j}P_{ik}f_{kj}^{(n)}+f_{ij}^{(n+1)}$$

$$=nf_{ij}^{(n+1)}+f_{ij}^{(n+1)}=(n+1)f_{ij}^{(n+1)}.$$

可见 $y_i^{(n)}=nf_{ij}^{(n)}$，$i\in E$，$n\geqslant 1$。于是由（2.1.14）得

$$x_i^*=\sum_{n=1}^{\infty}y_i^{(n)}=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{ij}^{(n)}=\mu_{ij}.$$ ▌

在结束本节的时候，我们来比较一下最小解与通常解的区别。当然，如果一个有限维非负系数线性方程组仅有一个非负解，则它必定重合于最小解。然而，方程

$$x=x$$

在通常意义下有无穷多个非负解，但最小解 $x^*=0$。可是，方程

$$x=x+1$$

在常义下无非负解，但 $x^*=\infty$。

§2.2 柯氏向后 向前方程和最小 q 过程

本节将研究柯氏向后、向前方程及其等价形式．作为这些方程的最小解，我们得到最小 q 过程．从而证明了 q 过 程 的 存 在定理．

下述两个方程：

$$(B)\quad P(t,x,A)=\int_0^t e^{-q(x)(t-s)}\int q(x,dy)P(s,y,A)ds+\delta(x,A)e^{-q(x)t},$$
$$t\geqslant 0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E}.$$

$$(F)\quad P(t,x,A)=\int_0^t\int P(s,x,dy)\int_A q(y,dz)e^{-q(z)(t-s)}ds+\delta(x,A)e^{-q(x)t},$$
$$t\geqslant 0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E}.$$

有着重要的概率意义．如果一个跳过程"存在第一个断点是跳跃点"，则它必定满足方程(B)；如果一个跳过程 "在固定的 t 之前，有最后一断点为跳跃点"，则它必定满足方程(F)．（参见王梓坤[1]，第六章）．下面研究其拉氏变换形式：

$$(B_\lambda)\quad P(\lambda,x,A)=\int\frac{q(x,dy)}{\lambda+q(x)}P(\lambda,y,A)+\frac{\delta(x,A)}{\lambda+q(x)},$$
$$\lambda>0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E}.$$

$$(F_\lambda)\quad P(\lambda,x,A)=\int P(\lambda,x,dy)\int_A\frac{q(y,dz)}{\lambda+q(z)}+\frac{\delta(x,A)}{\lambda+q(x)},$$
$$\lambda>0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E}.$$

(2.2.1) **定理** (B) 等价于 (B_λ)．$(F)\Longrightarrow(F_\lambda)$；反之，若 (F_λ) 成立，则对于几乎所有的 t，(F) 也成立．

证 设 q 过程 $P(t,x,A)$ 满足 (B)．固定 $x\in E$ 和 $A\in\mathscr{E}$．由

于(B)的两边各项都是t的有界连续函数，从而可取拉氏变换，

$$P(\lambda,x,A)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}P(t,x,A)\,dt$$

$$=\int_0^\infty e^{-\lambda t}dt\int_0^t e^{-q(x)(t-s)}\int q(x,dy)P(s,y,A)\,ds$$

$$+\delta(x,A)/(\lambda+q(x))$$

$$=\int q(x,dy)\int_0^\infty e^{q(x)s}P(s,y,A)\,ds\int_0^\infty e^{-(\lambda+q(x))t}dt$$

$$+\delta(x,A)/(\lambda+q(x))$$

$$=\int\frac{q(x,dy)}{\lambda+q(x)}P(\lambda,y,A)+\frac{\delta(x,A)}{\lambda+q(x)},$$

此即是 (B_λ)．

反之，设q过程$P(\lambda,x,A)$满足 (B_λ)．由定理（1.4.2），它唯一决定一个$P(t,x,A)$，使得

$$P(\lambda,x,A)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}P(t,x,A)\,dt,\ \lambda>0,x\in E,\ A\in\mathscr{E}.$$

反转上述证明，由 (B_λ) 得到

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}P(t,x,A)\,dt$$

$$=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\left[\int_0^t e^{-q(x)(t-s)}\int q(x,dy)P(s,y,A)\,ds\right.$$

$$\left.+\delta(x,A)e^{-q(x)t}\right]dt.$$

易见受变换的各个函数关于t有界连续，从而由拉氏变换的唯一性定理（1.5.3）知 (B) 成立．

$(F)\Longrightarrow(F_\lambda)$的证明与$(B)\Longrightarrow(B_\lambda)$ 的证明类似．对于逆命题的证明，因为我们只知道

$$\int_0^t\int P(s,x,dy)\int_A q(y,dz)e^{-q(z)(t-s)}ds,$$

关于t的Borel可测性，因此，由定理（1.5.3），我们只能得到几乎处处的等式 (F)（参考(2.7.1)）．

(2.2.2) **定义** 称 (B) 和 (B_λ) (相应地，(F)和(F_λ))为柯氏向后（相应地，向前）方程.

(2.2.3) **定理** 每一个 q 过程 $P(\lambda, x, A)$ 满足柯氏向后不等式：

$$P(\lambda, x, A) \geqslant \int \frac{q(x, dy)}{\lambda + q(x)} P(\lambda, y, A) + \frac{\delta(x, A)}{\lambda + q(x)},$$

$$\lambda > 0, \ x \in E, \ A \in \mathscr{E}.$$

证 令 $F_n = \{x : n \leqslant q(x) < n+1\}$，$n \geqslant 0$. 则 $\{F_n\}_0^\infty \subset \mathscr{R}$ 且 $\sum_{n=0}^{\infty} F_n = E$. 由预解方程可见

$$- \mu P(\mu, x, A) + \mu P(\mu, x, \{x\}) \lambda P(\lambda, x, A)$$
$$+ \int_{\{x\}^c} \mu P(\mu, x, dy) \lambda P(\lambda, y, A)$$
$$+ \mu (1 - \mu P(\mu, x, \{x\})) P(\lambda, x, A)$$
$$= \int_{\{x\}^c} \mu^2 P(\mu, x, dy) P(\lambda, y, A),$$

但

$$0 \leqslant \varlimsup_{\mu \to \infty} \int_{\{x\}^c} \mu P(\mu, x, dy) \lambda P(\lambda, y, A)$$
$$\leqslant \varlimsup_{\mu \to \infty} \mu P(\mu, x, E - \{x\}) = 0,$$

从而

$$- \delta(x, A) + \lambda P(\lambda, x, A) + q(x) P(\lambda, x, A)$$
$$= \lim_{\mu \to \infty} \int_{\{x\}^c} \mu^2 P(\mu, x, dy) P(\lambda, y, A)$$
$$\geqslant \sum_{n=0}^{\infty} \varliminf_{\mu \to \infty} \int_{\{x\}^c \cap F_n} \mu^2 P(\mu, x, dy) P(\lambda, y, A)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{F_n} q(x, dy) P(\lambda, y, A)$$
$$= \int q(x, dy) P(\lambda, y, A).$$

倒数第二步用到了定理（1.2.24）． ∎

对偶地，我们有

（2.2.4）**定理** 每一个 q 过程 $P(\lambda,x,A)$ 满足柯氏向前不等式：

$$P(\lambda,x,A)\geqslant\int P(\lambda,x,dy)\int_A\frac{q(y,dz)}{\lambda+q(z)}+\frac{\delta(x,A)}{\lambda+q(x)},$$

$$\lambda>0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E}.$$

证 取 $F_n=\{x\in E:\ q(x)\leqslant n\}$，则 $\{F_n\}\subset\mathscr{R}$ 且 $F_n\uparrow E$．由预解方程知

$$\lambda\int P(\lambda,x,dy)\,\mu P(\mu,y,A)$$

$$=\int P(\lambda,x,dy)\,\mu[\mu P(\mu,y,A)-\delta(y,A)]+\mu P(\mu,x,A),$$

但若 $y\in A$，则

$$0\leqslant\mu[1-\mu P(\mu,y,A)]\leqslant\mu[1-\mu P(\mu,y,\{y\}],$$

从而，对于每 $A\in\mathscr{E}\cap F_n$，$n\geqslant1$

$$\lambda P(\lambda,x,A)=\lim_{\mu\to\infty}\lambda\int P(\lambda,x,dy)\,\mu P(\mu,y,A)$$

$$\geqslant\varliminf_{\mu\to\infty}\int_A P(\lambda,x,dy)\,\mu[\mu P(\mu,y,A)-1]$$

$$+\varliminf_{\mu\to\infty}\int_{E-A}P(\lambda,x,dy)\,[\mu^2P(\mu,y,A)]+\delta(x,A)$$

$$\geqslant\int_{E-A}P(\lambda,x,dy)q(y,A)+\int_A P(\lambda,x,dy)\,(q(y,A)-q(y))$$

$$+\delta(x,A)$$

$$=\int P(\lambda,x,dy)\,(q(y,A)-q(y)\delta(y,A))+\delta(x,A),$$

即

$$\int P(\lambda,x,dy)\,(\lambda+q(y))\delta(y,A)$$

$$\geqslant\int P(\lambda,x,dy)q(y,A)+\delta(x,A),\quad A\in\mathscr{E}\cap F_n,n\geqslant1.$$

对每 $A\in\mathscr{E}$，用 $A\cap F_n$ 代入上式，再命 $n\to\infty$，便知上式对一切 $A\in\mathscr{E}$ 成立。最后，视上式的两边为关于 A 的测度，由定理(1.5.2)立知，对于一切 $f\in{}_r\mathscr{E}_+$，我们有

$$\int P(\lambda,x,dy)(\lambda+q(y))f(y)$$
$$\geqslant\int P(\lambda,x,dy)\int q(y,dz)f(z)+f(x).$$

特别地，取 $f=\delta(\cdot,A)/(\lambda+q(\cdot))$，便得柯氏向前不等式。 ▌

现在，我们可以证明 q 过程理论的第一个基本定理——存在定理。

(2.2.5) 定理 q 过程总存在。详言之，方程 (B_λ) 的最小解 $P^{\min}(\lambda,x,A)$ 就是一个 q 过程。而且是最小的：若 $P(\lambda,x,A)$ 是任一 q 过程，则对每 $\lambda>0$，$x\in E$ 和 $A\in\mathscr{E}$，$P(\lambda,x,A)\geqslant P^{\min}(\lambda,x,A)$。此外，$(B_\lambda)$ 和 (F_λ)，同样地，(B) 和 (F) 有相同的最小解。前者是后者的拉氏变换。后者也是在类似意义下的最小 q 过程。

证 (a)试证 $P^{\min}(\lambda,x,A)$ 是一 q 过程。

对每 $\lambda>0$ 和 $A\in\mathscr{E}$，命

$$P^{(0)}(\lambda,\cdot,A)=0,$$
$$P^{(n+1)}(\lambda,\cdot,A)=\int\frac{q(\cdot,dy)}{\lambda+q(\cdot)}p^{(n)}(\lambda,y,A)+\frac{\delta(\cdot,A)}{\lambda+q(\cdot)},\quad n\geqslant 0,$$

则由定理(2.1.5)知

$$P^{\min}(\lambda,\cdot,A)=\lim_{n\to\infty}P^{(n)}(\lambda,\cdot,A)$$

对 n 使用归纳法，立知每 $p^{(n)}(\lambda,\cdot,A)$ 满足可测性条件和范条件，从而 $P^{\min}(\lambda,\cdot,A)$ 亦然。完全一样地，我们可证：对于每 $\lambda>0$ 和 $x\in E$，$P^{\min}(\lambda,x,\cdot)$ 是 $\mathscr{E}$ 上的测度。另一方面，由于 $P^{\min}(\lambda,\cdot,A)$ 满足 (B_λ)，从而

$$|\lambda P^{\min}(\lambda,x,A)-\delta(x,A)|$$

$$= |q(x)P^{\min}(\lambda,x,A) - \int q(x,dy)P^{\min}(\lambda,y,A)|$$

$$\leqslant \frac{1}{\lambda}q(x) + \frac{1}{\lambda}q(x,E) \leqslant \frac{2}{\lambda}q(x) \to 0, \quad \lambda\to\infty,$$

进而

$$\begin{aligned}
&\lambda[\lambda P^{\min}(\lambda,x,A) - \delta(x,A)] \\
&= \int q(x,dy)\lambda P^{\min}(\lambda,y,A) - q(x)\lambda P^{\min}(\lambda,y,A) \\
&\xrightarrow[\lambda\to\infty]{} \int q(x,dy)\delta(y,A) - q(x)\delta(x,A) \\
&= q(x,A) - q(x)\delta(x,A), \qquad x\in E,\ A\in \mathscr{R}.
\end{aligned}$$

这样，连续性条件和 q 条件都满足．剩下的只需验证预解条件．事实上，我们将证明更强的结果：

$$(2.2.6)\qquad \widetilde{P}^{(n)}(\lambda,x,A) - \widetilde{P}^{(n)}(\mu,x,A) = (\mu-\lambda)\sum_{k=1}^{n}\int \widetilde{P}^{(k)}(\lambda,x,dy)\,\widetilde{P}^{(n+1-k)}(\mu,y,A),$$

$$\lambda,\mu>0,\ A\in \mathscr{E},\ n\geqslant 1.$$

此处

$$\widetilde{P}^{(1)}(\lambda,\cdot,A) = \frac{\delta(\cdot,A)}{\lambda+q(\cdot)}.$$

$$(2.2.7)\qquad \widetilde{P}^{(n+1)}(\lambda,\cdot,A) = \int \frac{q(\cdot,dy)}{\lambda+q(\cdot)}\widetilde{P}^{(n)}(\lambda,y,A), n\geqslant 1.$$

因为由定理(2.1.14)知，$P^{\min}(\lambda,\cdot,A) = \sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{P}^{(n)}(\lambda,\cdot,A)$．于是若(2.2.6)成立，两边对$n$求和即得预解方程．为证(2.2.6)，首先注意，当$n=1$时，(2.2.6)的两边均为$\delta(x,A)(\mu-\lambda)/((\lambda+q(x))\times(\mu+q(x)))$．设(2.2.6)对$n-1$已真，那么，由

$$(\mu-\lambda)\sum_{k=1}^{n}\int \widetilde{P}^{(k)}(\lambda,x,dy)\widetilde{P}^{(n+1-k)}(\mu,y,A)$$

$$= (\mu-\lambda)\int \widetilde{P}^{(1)}(\lambda,x,dy)\widetilde{P}^{(n)}(\mu,y,A)$$

$$+(\mu-\lambda)\sum_{k=1}^{n-1}\iint \frac{q(x,dy)}{\lambda+q(x)}\widetilde{P}^{(k)}(\lambda,y,dz)\widetilde{P}^{(n-k)}(\mu,z,A)$$

$$=(\mu-\lambda)\widetilde{P}^{(n)}(\mu,x,A)/(\lambda+q(x))$$

$$+\int\frac{q(x,dy)}{\lambda+q(x)}\widetilde{P}[^{(n-1)}(\lambda,y,A)-\widetilde{P}^{(n-1)}(\mu,y,A)]$$

$$=\widetilde{P}^{(n)}(\lambda,x,A)+\left(\frac{\mu-\lambda}{(\lambda+q(x))(\mu+q(x))}-\frac{1}{\lambda+q(x)}\right)$$

$$\times\int q(x,dy)\widetilde{P}^{(n-1)}(\mu,y,A).$$

$$=\widetilde{P}^{(n)}(\lambda,x,A)-\widetilde{P}^{(n)}(\mu,x,A).$$

(b)试证 $P^{\min}(\lambda,x,\cdot)$ 是 (F_λ) 的最小解．仍使用(2.2.7)中的记号．再令

$$\overline{P}^{(1)}(\lambda,x,\cdot)=\frac{\delta(x,\cdot)}{\lambda+q(x)},$$

$$\overline{P}^{(n+1)}(\lambda,x,\cdot)=\int\overline{P}^{(n)}(\lambda,x,dy)\int_{\cdot}\frac{q(y,dz)}{\lambda+q(z)},\quad n\geqslant 1.$$

若能证明

$$(2.2.8)\qquad \widetilde{P}^{(n)}(\lambda,x,A)=\overline{P}^{(n)}(\lambda,x,A),\quad \lambda>0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E},\ n\geqslant 1.$$

则因方程 (F_λ) 的最小解是 $\sum_{n=1}^{\infty}\overline{P}^{(n)}(\lambda,x,\cdot)$，我们将得到所需的结论。

当 $n=1$ 时，(2.2.8)式平凡．当 $n=2$ 时，

$$\widetilde{P}^{(2)}(\lambda,x,A)=\int\frac{q(x,dy)}{\lambda+q(x)}\cdot\frac{\delta(y,A)}{\lambda+q(y)}$$

$$=\frac{1}{\lambda+q(x)}\int_A\frac{q(x,dy)}{\lambda+q(y)}.$$

$$\overline{P}^{(2)}(\lambda,x,A)=\int\frac{\delta(x,dy)}{\lambda+q(x)}\int_A\frac{q(y,dz)}{\lambda+q(z)}$$

$$=\frac{1}{\lambda+q(x)}\int_A\frac{q(y,dz)}{\lambda+q(z)}.$$

(2.2.8) 也成立。今设此式对于 $n-1$ 和 n 成立。那么，由单调类定理得

$$\overline{\mathrm{P}}^{(n+1)}(\lambda,x,A)=\int\overline{\mathrm{P}}^{(n)}(\lambda,x,dy)\int_A\frac{q(y,dz)}{\lambda+q(z)}$$

$$=\int\widetilde{\mathrm{P}}^{(n)}(\lambda,x,dy)\int_A\frac{q(y,dz)}{\lambda+q(z)}$$

$$=\int\frac{1}{\lambda+q(x)}\left(\int q(x,du)\ \widetilde{\mathrm{P}}^{(n-1)}(\lambda,u,dy)\right)\int_A\frac{q(y,dz)}{\lambda+q(z)}$$

$$=\int\frac{q(x,du)}{\lambda+q(x)}\left(\int\widetilde{\mathrm{P}}^{(n-1)}(\lambda,u,dy)\int_A\frac{q(y,dz)}{\lambda+q(z)}\right)$$

$$=\int\frac{q(x,du)}{\lambda+q(x)}\left(\int\overline{\mathrm{P}}^{(n-1)}(\lambda,u,dy)\int_A\frac{q(y,dz)}{\lambda+q(z)}\right)$$

$$=\int\frac{q(x,du)}{\lambda+q(x)}\overline{\mathrm{P}}^{(n)}(\lambda,u,A)$$

$$=\int\frac{q(x,du)}{\lambda+q(x)}\widetilde{\mathrm{P}}^{(n)}(\lambda,u,A)$$

$$=\widetilde{\mathrm{P}}^{(n+1)}(\lambda,x,A).$$

可见(2.2.8)对一切 n 成立。

(c) 试证最小性。

由于每一 q 过程满足柯氏向后不等式，它是方程 (B_λ) 的优方程。故由比较定理(2.1.11)立得最小性。

(d) 试证 $\mathrm{P}^{\min}(\lambda,x,A)$ 是方程(B)的最小解的拉氏变换。

首先，

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathrm{P}^{(0)}(t,x,A)\,dt=0=\mathrm{P}^{(0)}(\lambda,x,A),\quad \lambda>0,x\in E,\ A\in\mathscr{E}.$$

若设

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathrm{P}^{(n)}(t,x,A)\,dt=\mathrm{P}^{(n)}(\lambda,x,A),$$

$$\lambda>0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E}.$$

而且 $P^{(n)}(t,x,A)$ 关于 t 连续，$P^{(n)}(t,x,E)\leqslant 1$，$t\geqslant 0$，$x\in E$。那么

$$P^{(n+1)}(t,x,A)=\int_0^t e^{-q(x)(t-s)}\int q(x,dy)P^{(n)}(s,y,A)\,ds + \delta(x,A)e^{-q(x)t}.$$

也具有同样的性质，另一方面

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}P^{(n+1)}(t,x,A)\,dt=\frac{\delta(x,A)}{\lambda+q(x)}$$

$$+\int_0^\infty e^{-(\lambda+q(x))t}dt\int_0^t e^{q(x)s}\int q(x,dy)P^{(n)}(s,y,A)\,ds$$

$$=\frac{\delta(x,A)}{\lambda+q(x)}+\int\frac{q(x,dy)}{\lambda+q(x)}P^{(n)}(\lambda,y,A)$$

$$=P^{(n+1)}(\lambda,x,A),\ \lambda>0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E}.$$

因此，

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}P^{(n)}(t,x,A)\,dt=P^{(n)}(\lambda,x,A),$$

$$\lambda>0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E},\ n\geqslant 0$$

令 $n\to\infty$，由单调收敛定理即知

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}P^{\min}(t,x,A)\,dt=P^{\min}(\lambda,x,A)$$

$$\lambda>0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E}.$$

(e) 试证 $P^{\min}(\lambda,x,A)$ 是方程 (F) 的最小解的拉氏变换。为此，只需证明方程 (B) 和 (F) 有相同的最小解。命

$$\widetilde{P}^{(1)}(t,x,A)=\delta(x,A)e^{-q(x)t},$$

$$\widetilde{P}^{(n+1)}(t,x,A)=\int_0^t e^{-q(x)(t-s)}\int q(x,dy)\widetilde{P}^{(n)}(s,y,A)\,ds,$$

$$n\geqslant 1$$

和

$$\overline{P}^{(1)}(t,x,A)=\delta(x,A)e^{-q(x)t},$$

$$\overline{\mathrm{P}}^{(n+1)}(t,x,A)=\int_0^t ds\int \overline{\mathrm{P}}^{(n)}(s,x,dy)\int_A q(y,dz)$$
$$\times e^{-q(z)(t-s)},\ n\geqslant 1,$$

与(b)的证法一样，只需验证

$$(2.2.9)\quad \widetilde{\mathrm{P}}^n(t,x,A)=\widetilde{\mathrm{P}}^{(n)}(t,x,A),$$
$$t\geqslant 0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E},\ n\geqslant 1.$$

当$n=1$时，此式平凡。当$n=2$时，

$$\widetilde{\mathrm{P}}^{(2)}(t,x,A)=\int_0^t e^{-q(x)(t-s)}\int q(x,dy)\delta(y,A)e^{-q(y)s}ds$$
$$=\int_A q(x,dy)e^{-q(x)t}\int_0^t e^{(q(x)-q(y))s}ds$$
$$=\int_{A[y:\,q(y)=q(x)]} q(x,dy)\,t\,e^{-q(x)t}$$
$$+\int_{A[y:\,q(y)\neq q(x)]} q(x,dy)\ \frac{e^{-q(y)t}-e^{-q(x)t}}{q(x)-q(y)}$$

而
$$\overline{\mathrm{P}}^{(2)}(t,x,A)=\int_0^t ds\int\delta(x,dy)e^{-q(x)s}\int_A q(y,dz)\,e^{-q(z)(t-s)}$$
$$=\int_A q(x,dy)\int_0^t e^{-q(x)s-q(y)(t-s)}ds$$
$$=\int_{A[y:\,q(y)=q(x)]} q(x,dy)\,te^{-q(x)t}$$
$$+\int_{A[y:\,q(y)\neq q(x)]} q(x,dy)\ \frac{e^{-q(y)t}-e^{-q(x)t}}{q(x)-q(y)}.$$

可见，当$n=2$时（2.2.9）亦真。今设此式对于$n-1$和n成立。那么，由单调类定理知

$$\overline{\mathrm{P}}^{(n+1)}(t,x,A)=\int_0^t ds\int \overline{\mathrm{P}}^{(n)}(s,x,dy)\int_A q(y,dz)e^{-q(z)(t-s)}$$
$$=\int_0^t ds\int \widetilde{\mathrm{P}}^{(n)}(s,x,dy)\int_A q(y,dz)e^{-q(z)(t-s)}$$
$$=\int_0^t ds\int\left(\int_0^s du e^{-q(x)(s-u)}\int q(x,dw)\,\widetilde{\mathrm{P}}^{(n-1)}(u,w,dy)\right)$$

$$\times \int_A q(y,dz)e^{-q(z)(t-s)}$$

$$= \int_0^t du\ e^{q(x)u} \int q(x,dw)\int \widetilde{P}^{(n-1)}(u,w,dy)\int_A q(y,dz)$$

$$\times \int_u^t e^{-q(x)s-q(z)(t-s)}ds$$

$$= \int_0^t du \int q(x,dw)\int \widetilde{P}^{(n-1)}(u,w,dy)$$

$$\times \left[\int_{A[z:\ q(z)=q(x)]} q(y,dz)e^{-q(x)(t-u)}(t-u) + \right.$$

$$\left. + \int_{A[z:\ q(z)\neq q(x)]} q(y,dz)\ \frac{e^{-q(x)(t-u)}-e^{-q(z)(t-u)}}{q(z)-q(x)}\right].$$

另一方面，

$$\widetilde{P}^{(n+1)}(t,x,A)$$

$$= \int_0^t e^{-q(x)(t-s)}\int q(x,dy)\ \widetilde{P}^{(n)}(s,y,A)\ ds$$

$$= \int_0^t dse^{-q(x)(t-s)}\int q(x,dw)\int_0^s du\int \overline{P}^{(n-1)}(u,w,dy)$$

$$\times \int_A q(y,dz)e^{-q(z)(s-u)}$$

$$= \int_0^t du\int q(x,dw)\int \widetilde{P}^{(n-1)}(u,w,dy)\int_A q(y,dz)$$

$$\times \int_u^t e^{-q(x)(t-s)-q(z)(s-u)}ds$$

$$= \int_0^t du\int q(x,dw)\int \widetilde{P}^{(n-1)}(u,w,dy)$$

$$\times \left[\int_{A[z:\ q(z)=q(x)]} q(y,dz)e^{-q(x)(t-u)}(t-u)\right.$$

$$\left. + \int_{A[z:\ q(z)\neq q(x)]} q(y,dz)\ \frac{e^{-q(z)(t-u)}-e^{-q(x)(t-u)}}{q(x)-q(z)}\right].$$

这便证明 (2.2.9)．

(f) 最后，由于 $P^{\min}(t,x,A)$ 关于 t 连续（因为满足 (B)），

因而由拉氏变换的唯一性定理和推论（1.4.3）知 $P^{\min}(t,x,A)$ 是一个 q 过程．为证最小性，设 $P(t,x,A)$ 是任一 q 过程．以下固定 t 和 A．由于 $P(t,x,A)-P^{\min}(t,x,A)$ 关于 t 有界连续，而且

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}(P(t,x,A)-P^{\min}(t,x,A))dt\geqslant 0,\ \lambda>0,$$

由此可证上式左方是 $\lambda>0$ 的完全单调函数，然后可由完全单调函数的性质导出

$$P(t,x,A)\geqslant P^{\min}(t,x,A),\ t\geqslant 0, x\in E, A\in\mathscr{E}$$

详见（2.7.10）．

§2.3 唯一性的若干充分条件

在解决了存在性问题之后，自然关心唯一性问题．即何时一个给定的 q 对完全决定 q 过程．一般的唯一性准则是相当困难的，我们将在下一章研究．本节给出唯一性的若干充分条件．在许多情况下，这些条件是很有效的．

本节假定 q 对保守．

（2.3.1）**定理** 设函数 $\varphi\in{}_r\mathscr{E}$ 使 $\varphi(x)\geqslant q(x)$，$x\in E$ 则下述条件都是 q 过程唯一的充分条件：

（2.3.2）存在常数 $c\in\boldsymbol{R}$，使

$$\int q(x,dy)\varphi(y)\leqslant(c+q(x))\varphi(x), x\in E;$$

（2.3.3） 存在 $\lambda_0>0$ 使

$$\int P^{\min}(\lambda_0,\ x,\ dy)\varphi(y)<\infty,\ x\in E;$$

（2.3.4） 对每 $t\geqslant 0$ 和 $x\in E$,

$$\int P^{\min}(t,x,dy)\varphi(y)<\infty,$$

证 我们先证（2.3.2）⇒（2.3.3）⇒q 过程唯一．

(2.3.2)⇒(2.3.3)：由定理 (2.2.5) 和定理 (2.1.21) (i) 知，对每 $\lambda>0$, $\int P^{\min}(\lambda,\cdot,dy)\varphi(y)$ 是方程

$$f=\int\frac{q(\cdot,dy)}{\lambda+q(\cdot)}f(y)+\frac{\varphi(\cdot)}{\lambda+q(\cdot)}$$

的最小解。但由 (2.3.2) 知，只要 $\lambda>c$，就有

$$\frac{\varphi}{\lambda-c}\geqslant\int\frac{q(\cdot,dy)}{\lambda+q}\cdot\frac{\varphi(y)}{\lambda-c}+\frac{\varphi}{\lambda-q},$$

于是，由比较定理 (2.1.11) 知：只要 $\lambda>c\vee 0$，就有

$$\int P^{\min}(\lambda,\cdot,dy)\varphi(y)\leqslant\frac{\varphi}{\lambda-c}<\infty.$$

(2.3.3)⇒唯一性，使用向前方程

$$P^{\min}(\lambda,x,A)=\int P^{\min}(\lambda,x,dy)\int_A\frac{q(y,dz)}{\lambda+q(z)}+\frac{\delta(x,A)}{\lambda+q(x)}$$

两边视为关于 A 的测度，由单调类定理立得

$$\int P^{\min}(\lambda,x,dy)f(y)=\int P^{\min}(\lambda,x,dy)\int\frac{q(y,dz)}{\lambda+q(z)}f(z)$$

$$+\frac{f(x)}{\lambda+q(x)},$$

$$\lambda>0,\ x\in E,\ f\in\mathscr{E}_+.$$

特别地，取 $\lambda=\lambda_0$，$f=\lambda_0+q(\cdot)$，便得

$$\int(\lambda_0+q(y))P^{\min}(\lambda_0,x,dy)$$

$$=\int P^{\min}(\lambda_0,x,dy)q(y)+1,\qquad x\in E,$$

从而由所设条件知

$$\lambda_0P^{\min}(\lambda_0,x,E)=1,\qquad x\in E.$$

由此可推出

$$\lambda P^{\min}(\lambda,x,E)=1,\qquad x\in E$$

对一切 $\lambda>0$ 成立。这一事实我们将留到后面去证明（见 (2.5.16)）。既然最小 q 过程不断，当然 q 过程唯一。

其次，我们证明 (2.3.2)⇒(2.3.4)⇒唯一性. 想法是类似的，只是用非拉氏变换形式.

(2.3.2) ⇒ (2.3.4)：设 (2.3.2) 成立，则

$$(c+q(x))\varphi(x)\,e^{(c+q(x))s}\geqslant\int q(x,dy)\varphi(y)e^{(c+q(x))s}$$

$$x\in E,\ s\geqslant 0,$$

从而

$$\varphi(x)[e^{(c+q(x))t}-1]\geqslant\int_0^t\int q(x,dy)\varphi(y)e^{(c+q(x))s}ds$$

或

$$\varphi(x)\,e^{ct}\geqslant\int_0^t\int q(x,dy)e^{-q(x)(t-s)}\varphi(y)e^{cs}ds+\varphi(x)e^{-q(x)t},$$

$$t\geqslant 0,\ x\in E.$$

另一方面，由定理 (2.2.5) 和定理 (2.1.21) 知，对每 $t\geqslant 0$，$\int P^{\min}(t,\cdot,dy)\varphi(y)$ 是方程

$$f(t,\cdot)=\int_0^t e^{-q(\cdot)(t-s)}\int q(\cdot,dy)f(s,y)ds+\varphi e^{-q(\cdot)t}$$

的最小解. 综合上面两个事实，并使用比较定理，便得

$$\int P^{\min}(t,x,dy)\varphi(y)\leqslant\varphi(x)e^{ct}<\infty,$$

$$t\geqslant 0,\ x\in E,$$

此即是 (2.3.4).

(2.3.4) ⇒唯一性. 使用向前方程 (参见 (2.2.5))：

$$P^{\min}(t,x,A)=\int_0^t ds\int P^{\min}(s,x,dy)\int_A q(y,dz)e^{-q(z)(t-s)}$$

$$+\delta(x,A)e^{-q(x)t},$$

由保守性和定理 (1.2.25)，得

$$\frac{dP^{\min}(t,x,E)}{dt}=\int P^{\min}(t,x,dy)q(y)$$

$$-\int_0^t ds\int P^{\min}(s,x,dy)\int q(y,dz)q(z)\,e^{-(t-s)q(z)}$$

$$-q(x)e^{-tq(x)}$$

$$=\int q(z)\left[P^{\min}(t,x,dz)-\delta(x,dz)e^{-q(x)t}\right.$$

$$\left.-\int_0^t ds\int P^{\min}(s,x,dy)e^{-q(z)(t-s)}q(y,dz)\right],$$

对于几乎所有的 t（例外集依赖于 x）成立。再一次使用向前方程，便得

$$\frac{dP^{\min}(t,x,E)}{dt}=0,\qquad a.e.t,$$

然而，由定理（1.2.25）知左方连续，故上式永远成立，于是

$$P^{\min}(t,x,E)=\text{const}=P^{\min}(0,x,E)=1,$$

$$x\in E.$$

因此，由 $P^{\min}(t,x,A)$ 的最小性即知 q 过程唯一。 ▮

(2.3.5) **定义** 称 q 对 $q(x)-q(x,A)$ 是有界的，如果 $\sup\limits_{x\in E} q(x)<\infty$。

(2.3.6) **推论***) 若 $q(x)-q(x,A)$ 是保守有界 q 对，则 q 过程唯一。即最小 q 过程不断。

证 取 $c=0$，$\varphi=M=\sup\limits_{x\in E} q(x)$，我们看到条件（2.3.2）满足。

(2.3.7) **定理****) 设 $\{E_n\}_1^\infty\subset\mathscr{E}$ 和 $\varphi\in{}_r\mathscr{E}_+$ 满足

(2.3.8) $\quad E_n\uparrow E,\ \sup\limits_{x\in E_n} q(x)<\infty,\ \lim\limits_{n\to\infty}\inf\limits_{x\overline{\in} E_n}\varphi(x)=\infty.$

依惯例，$\inf\phi=\infty$。如果存在常数 $c\in\boldsymbol{R}$，使

(2.3.9) $\quad \int q(x,dy)\varphi(y)\leqslant(c+q(x))\varphi(x),\quad x\in E$

成立，则 q 过程唯一。

证 由于当 $n\uparrow$ 时，$\inf\limits_{x\overline{\in} E_n}\varphi(x)\uparrow$，极限总存在。证明的想法

---

*）此结论对于非保守情形也对，见（3.2.4）。

**）另一证法见（3.2.6）。关于它的评注和推论见（3.5.1）和（3.5.2）。

是用有界 q 过程逼近，命

$$(2.3.10)\quad \begin{cases} q_n(x,dy)=I_{E_n}(x)q(x,dy),\ x\in E,\ n\geqslant 1, \\ q_n(x)=q_n(x,E),\ x\in E,\ n\geqslant 1. \end{cases}$$

则 $q_n(x)-q_n(x,A)$ 每固定的 $n\geqslant 1$ 是有界保守 q 对. 用 $P_n(\lambda, x,A)$ 表由 $q_n(x)-q_n(x,A)$ 所决定的 q 过程，显然，若以 $c_+=c\vee 0$ 和 $q_n(x)-q_n(x,A)$ 分别代替（2.3.9）中的 c 和 $q(x)-q(x,A)$，则该式仍然成立. 于是，按照前一定理证明的第一步，我们知道

$$\int P_n(\lambda,x,dy)\varphi(y)\leqslant\frac{\varphi(x)}{\lambda-c_+},\ x\in E,\ \lambda>c_+,\ n\geqslant 1.$$

另一方面，当 $x\in E_n$ 时，

$$P^{\min}(\lambda,x,E_n)=\int\frac{q(x,dy)}{\lambda+q(x)}P^{\min}(\lambda,y,E_n)+\frac{\delta(x,E_n)}{\lambda+q(x)}$$
$$=\int\frac{q_n(x,dy)}{\lambda+q_n(x)}P^{\min}(\lambda,y,E_n)+\frac{\delta(x,E_n)}{\lambda+q_n(x)},$$

而当 $x\notin E_n$ 时，更有

$$P^{\min}(\lambda,x,E_n)\geqslant 0=\int\frac{q_n(x,dy)}{\lambda+q_n(x)}P^{\min}(\lambda,y,E_n)+\frac{\delta(x,E_n)}{\lambda+q_n(x)}.$$

因而，不论何种情况，我们均有

$$P^{\min}(\lambda,x,E_n)\geqslant\int\frac{q_n(x,dy)}{\lambda+q_n(x)}P^{\min}(\lambda,y,E_n)+\frac{\delta(x,E_n)}{\lambda+q_n(x)},$$
$$\lambda>0,\ x\in E,\ n\geqslant 1,$$

于是，由推论（2.3.6）、定理（2.2.5）和比较定理立得

$$P^{\min}(\lambda,x,E_n)\geqslant P_n(\lambda,x,E_n),\ \lambda>0,\ x\in E,\ n\geqslant 1.$$

由此及开头所证的事实，得

$$\lambda P^{\min}(\lambda,x,E_n)\geqslant\lambda P_n(\lambda,x,E_n)$$
$$=1-\lambda P_n(\lambda,x,E_n^c)$$
$$\geqslant 1-\lambda\varphi(x)/(\inf_{z\in E_n}\varphi(z)(\lambda-c_+)),\ \lambda>c_+,\ x\in E.$$

由上式得

$$\lambda P^{\min}(\lambda, x, E) = \lim_{n\to\infty}\lambda P^{\min}(\lambda, x, E_n)$$
$$\geqslant 1 - \lim_{n\to\infty} [\lambda\varphi(x)/(\inf_{z\in E_n} \varphi(z)(\lambda - c_+))$$
$$= 1, \qquad \lambda > c_+.$$

由此可见最小q过程不断（参见（2.5.16））， 从而q过程唯一。 ▌

平行地，我们也可以用非拉氏变换形式证明定理（2.3.7）。

（2.3.11）**注** 条件（2.3.2）是为保证(2.3.3)和（2.3.4）而引进的，它比较易于检查，因而十分有趣，如果只关心条件（2.3.2）蕴涵唯一性，那么，只需注意它蕴涵（2.3.7）的假设便已足够。为此，取$E_n = \{x \in E: q(x) \leqslant n\}$，并使用同样的$\varphi$和常数$c$。下面的例子表明，条件（2. 3.2）确实比（2.3.7）的假设强。

（2.3.12）**例** 取$E = \{1, 2, \cdots\}$。设$\{q_1, q_2, \cdots\}$是全体素数从小到大的排列。命

$$q_{i,i+1} = q_i,\ i \in E;\ q_{ij} = 0,\ j \neq i,\ i+1.$$

则$Q = (q_{ij})$是一个纯生的Q矩阵。

先证这个Q矩阵满足（2.3.7）的假设。取$c = 1$，$\varphi_1 = 1$，

$\varphi_i = \prod_{k=1}^{i-1}\left(1 + \frac{1}{q_k}\right)$，$i \geqslant 2$。由于$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{q_n}\right)$与$\sum_{n=1}^{\infty} 1/q_n$同时敛散，可见$\lim_{i\to\infty}\varphi_i = \infty$。取$E_n = \{1, 2, \cdots, n\}$，由$\varphi_i$的单调增性质易见（2.3.7）的假设满足，从而$Q$过程唯一。

往证条件（2.3.2）不成立。事实上，我们将证明（2.3.3）不成立。由方程（B_λ）容易解出：

$$p_{ik}(\lambda) = 0,\ k < i,\ p_{ii}(\lambda) = \frac{1}{\lambda + q_i},$$

$$p_{ij}(\lambda) = \frac{q_i \cdots q_{j-1}}{(\lambda + q_i)\cdots(\lambda + q_j)},\ j > i$$

于是

$$\sum_{j=1}^{\infty} P_{1j}(\lambda) q_j = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{q_1 \cdots q_j}{(\lambda+q_1)\cdots(\lambda+q_j)} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j$$

由于

$$\lim_{j\to\infty} j\left(\frac{a_j}{a_{j+1}} - 1\right) = \lambda \lim_{j\to\infty} \frac{j}{q_{j+1}} = 0, \quad \lambda>0.$$

可见上述级数对于一切 $\lambda>0$ 发散，故条件（2.3.3）不满足. ▌

§2.4 q 划分和 q 条件

本节先引进 q 划分的概念，它只依赖于给定的 q 对而与 q 过程的表现形式无关. 然后讨论相应的 q 条件.

(2.4.1) **引理** 对每 $A\in\mathscr{E}$, $\inf\limits_{x\in A} P^{\min}(\lambda, x, E)>0$，对于某 $\lambda_0(>0)$ 成立当且仅当它对一切 $\lambda(>0)$ 成立.

证 只需证明必要性. 设 $\lambda_0>0$ 满足假设条件，由预解方程

$$P^{\min}(\lambda, x, E) = P^{\min}(\lambda_0, x, E) + (\lambda_0-\lambda)\int P^{\min}(\lambda, x, dy) \cdot P^{\min}(\lambda_0, y, E)$$

知，

$$\inf_{x\in A} P^{\min}(\lambda, x, E) \geqslant \inf_{x\in A} P^{\min}(\lambda_0, x, E) > 0.$$

另一方面，若命

(2.4.2) $\quad z(\lambda, x) = 1 - \lambda P^{\min}(\lambda, x, E)$, $\lambda>0$, $x\in E$,

则由预解方程立知

(2.4.3) $\quad z(\lambda, x) - z(\mu, x) + (\lambda-\mu)\int P^{\min}(\lambda, x, dy)\, z(\mu, y) = 0$

这样，当 $\lambda\uparrow$ 时，$z(\lambda, x)\downarrow$，或即 $\lambda P^{\min}(\lambda, x, E)\uparrow$. 特别地，当 $\lambda\geqslant\lambda_0$ 时，

$$\inf_{x\in A} P^{\min}(\lambda, x, E) \geqslant \frac{\lambda_0}{\lambda} \inf_{x\in A} P^{\min}(\lambda_0, x, E) > 0. \qquad ▌$$

(2.4.4) **定义** 给定 q 对 $q(x) - q(x, A)$. 一个 $(E, \mathscr{E})$ 上

的可测划分$\{E_n\}_1^\infty$称为（关于此 q 对的）q 划分，倘若

$$\sup_{x\in E_n} q(x)<\infty, \qquad n\geqslant 1,$$

而且

$$\inf_{x\in E_n} P^{\min}(\lambda,x,E)>0,\ n\geqslant 1,\ \lambda>0.$$

(2.4.5) **注** 固定 $\lambda_0>0$，取

$$E_{m,n}(\lambda_0)=\{x\in E:\ n-1\leqslant q(x)<n,\ (m+1)^{-1}<$$
$$<\lambda_0 P^{\min}(\lambda_0,x,E)\leqslant m^{-1}\}$$

则由 (2.4.1) 知，$\{E_{m,n}\}_{m,n\geqslant 1}$ 是一个 q 划分。

自此以后，我们恒假定$\{E_n\}_1^\infty$是一个选定的 q 划分。

(2.4.6) **定理** 跳过程 $P(\lambda,x,A)$ 是 q 过程的充要条件是

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda[\lambda P(\lambda,x,A)-\delta(x,A)]=q(x,A)-q(x)I_A(x),$$
$$x\in E,\ A\in\mathscr{E}\cap E_n,\ n\geqslant 1.$$

此条件也称为 q 条件。

证 与推论 (1.4.4) 的证法类似。

(2.4.7) **定理** 对每 $n\geqslant 1$，定义两个方程如次：

$$(B_n)\quad \int[(\lambda+q(x))\delta(x,dy)-q(x,dy)]P(\lambda,y,A)$$
$$=\delta(x,A),\quad \lambda>0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E}\cap E_n.$$

$$(F_n)\quad \int P(\lambda,x,dy)[(\lambda+q(y))\delta(y,A)-q(y,A)]$$
$$=\delta(x,A),\quad \lambda>0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E}\cap E_n.$$

那么，(B_λ) 成立当且仅当 (B_n) 对于每 $n\geqslant 1$ 成立。同样地，(F_λ) 成立当且仅当 (F_n) 对于每 $n\geqslant 1$ 成立。

证 我们只证后一断言．前一断言类似可证。易见 (F_n) 对于一切 $n\geqslant 1$ 成立的充要条件是

$$\int P(\lambda,x,dy)(\lambda+q(y))\delta(y,A)$$
$$=\int P(\lambda,x,dy)q(y,A)+\delta(x,A),$$

$$\lambda>0,\ x\in E, A\in\mathscr{E}.$$

将此式两边视作关于 A 的测度，并对 $\delta(\cdot,A)/(\lambda+q(\cdot))$ 取积分，便得 (F_λ) . 反之，若 (F_λ) 成立，则视 (F_λ) 两边为关于 A 的测度，并对 $\delta(\cdot,A)(\lambda+q(\cdot))$ 取积分，即得上式. ∎

(2.4.8) **定理** 设 $P(\lambda,x,A)$ 满足引理 (1.4.1) 的条件 (i) 、 (ii) 和 (iii) . 如果对于每 $n\geqslant1$, (B_n) 都成立，或者对于每 $n\geqslant1$, (F_n) 都成立，则 $P(\lambda,x,A)$ 是 q 过程. 换言之，在条件 (i) — (iii) 之下，只要 (B_λ) 或 (F_λ) 之一成立，则它就是 q 过程.

证 首先注意，在定理 (2.2.5) 的证明 (a) 中，为验证连续条件和 q 条件，我们只用到方程 (B_λ) . 因此，只要 (B_λ) 成立,则 (1.4.1) 中的条件 (iv) 和 (v)也满足. 然后由(1.4.2)、(1.4.3) 和 $P(\lambda,x,A)$ 是一q 过程.

往证：若对每 n, (F_n) 成立，则 $P(\lambda,x,A)$ 是 q 过程.

令 $G_n=\sum_{k=1}^{n}E_k$, 则 $G_n\uparrow E$. 显然，对每 $n\geqslant1$, 若以 G_n 代替 E_n, 则 (F_n) 依然成立，且易见

$$\sup_{x\in G_n} q(x)<\infty.$$

任给 $x\in E$, 取 n 使 $x\in G_n$. 由方程 (F_n) 可见

$$\lambda P(\lambda,x,\{x\})=1+\int P(\lambda,x,dy)q(y,\{x\})$$
$$-P(\lambda,x,\{x\})q(x)\geqslant1-q(x)/\lambda.$$

从而有

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda P(\lambda,x,\{x\})=1.$$

更有

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda P(\lambda,x,A)\leqslant\lim_{\lambda\to\infty}[1-\lambda P(\lambda,x,\{x\})]=0,$$
$$x\notin A.$$

从而连续条件满足. 下面证明 q 条件.

首先，由方程 (F_n) 知，对每 $\lambda>0$，$x\in E$ 和 $A\in\mathscr{E}\cap G_n$，

$$\int P(\lambda,x,dy)\,q(y,A)<\infty.$$

其次，由预解方程知

$$\int P(\lambda,x,dy)\;q(y,A)+\int P(\mu,x,dy)\int\lambda P(\lambda,y,dz)\,q(z,A)$$

$$=\int P(\mu,x,dy)\,q(y,A)+\mu\int P(\mu,x,dy)\int P(\lambda,y,dz)\;q(z,A).$$

另一方面，对每 $x\in E$ 和 $A\in\mathscr{E}$，$P(\lambda,x,A)$ 是 λ 的减函数，因此，当 $\lambda\geqslant\lambda_0>0$ 时，

$$\int P(\lambda,x,dy)\,q(y,A)$$

$$\leqslant\int_{G_n}P(\lambda,x,dy)\,q(y,A)+\int_{G_n^c}P(\lambda_0,x,dy)\,q(y,A).$$

先令 $\lambda\to\infty$，次令 $n\to\infty$，即得

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int P(\lambda,x,dy)\,q(y,A)=0.$$

类似地可证

$$\lim_{\lambda\to\infty}\mu\int P(\mu,x,dy)\int P(\lambda,y,dz)\,q(z,A)=0.$$

这样，我们便得到

$$\text{(2.4.9)}\qquad\int P(\mu,x,dy)\,q(y,A)$$

$$=\lim_{\lambda\to\infty}\int P(\mu,x,dy)\int\lambda P(\lambda,y,dz)\,q(z,A),$$

$$\mu>0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E}\cap E_n,\ n\geqslant1.$$

特别地，

$$\infty>\int P(\mu,x,dy)\,q(y,A)$$

$$\geqslant P(\mu,x,\{x\})\ \varlimsup_{\lambda\to\infty}\lambda\int P(\lambda,x,dy)\,q(y,A)\quad.$$

由于 $P(\mu,x,\{x\})>0$，这表明

(2.4.10) $\overline{\lim_{\lambda\to\infty}}\int\lambda P(\lambda,x,dy)q(y,A)<\infty,$

$x\in E,\ A\in\mathscr{E}\cap E_n,\ n\geqslant 1.$

注意已证的连续条件：$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda P(\lambda,x,A)=\delta(x,A)(x\in E,A\in\mathscr{E})$，由定理（1.2.24）.(iv) 和（2.4.9）得

(2.4.11) $\underline{\lim_{\lambda\to\infty}}\int\lambda P(\lambda,x,dy)q(y,A)\geqslant q(x,A),$

$x\in E,\ A\in\mathscr{E}\cap E_n,\ n\geqslant 1.$

再用一次定理（1.2.24）和（2.4.9），得

$$\infty>\int P(\mu,x,dy)q(y,A)$$

$$\geqslant P(\mu,x,\{x\})\overline{\lim_{\lambda\to\infty}}\int\lambda P(\lambda,x,dy)q(y,A)$$

$$+\underline{\lim_{\lambda\to\infty}}\int_{E-\{x\}}P(\mu,x,dy)\int\lambda P(\lambda,y,dz)q(z,A)$$

$$\geqslant P(\mu,x,\{x\})\overline{\lim_{\lambda\to\infty}}\int\lambda P(\lambda,x,dy)q(y,A)$$

$$+\int_{E-\{x\}}P(\mu,x,dy)q(y,A).\qquad(\text{由}\ (2.4.11))$$

由于 $P(\mu,x,\{x\})>0$，可见

(2.4.12) $\overline{\lim_{\lambda\to\infty}}\int\lambda P(\lambda,x,dy)q(y,A)\leqslant q(x,A),$

$x\in E,\ A\in\mathscr{E}\cap E_n,\ n\geqslant 1.$

综合（2.4.11）和（2.4.12），得

(2.4.13) $\lim_{\lambda\to\infty}\int\lambda P(\lambda,x,dy)q(y,A)=q(x,A),$

$x\in E,\ A\in\mathscr{E}\cap E_n,\ n\geqslant 1.$

于是，由方程（F_n）和定理（1.2.24）得

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda[\lambda P(\lambda,x,A)-\delta(x,A)]$$

$$=\lim_{\lambda\to\infty}\int\lambda P(\lambda,x,dy)q(y,A)-\lim_{\lambda\to\infty}\int_A\lambda P(\lambda,x,dy)q(y,A)$$

$$=q(x,A)-I_A(x)q(x),$$
$$x\in E,\ A\in\mathscr{E}\cap E_n,\ n\geqslant 1.$$

此即是 q 条件. ∎

§2.5 流出空间和流入空间

本节将引进流出、流入空间. 我们将证明这些空间的维数与参数 $\lambda>0$ 无关.

记

(2.5.1) $$R(\lambda,\mu;x,A)=\delta(x,A)+(\lambda-\mu)P^{\min}(\mu,x,A),$$
$$\lambda,\mu>0,x\in E,A\in\mathscr{E},$$

则由预解方程立得

(2.5.2) **引理** 我们有

(2.5.3) $$\int R(\mu,\lambda;\ x,dy)R(\lambda,\nu;\ y,A)$$
$$=\int R(\lambda,\nu;\ x,dy)R(\mu,\lambda;\ y,A)=R(\mu,\nu;\ x,A)$$
$$\lambda,\mu,\nu>0,x\in E,A\in\mathscr{E}$$

(2.5.4) $$\int P^{\min}(\mu,x,dy)R(\mu,\lambda;\ y,A)$$
$$=\int R(\mu,\lambda;\ x,dy)P^{\min}(\mu,y,A)$$
$$=P^{\min}(\lambda,x,A),\quad \lambda,\mu>0,x\in E,A\in\mathscr{E}$$

特别地,

(2.5.5) $$\int R(\lambda,\mu;\ x,dy)R(\mu,\lambda;\ y,A)$$
$$=\delta(x,A),\quad \lambda,\mu>0,x\in E,A\in\mathscr{E}.$$

(2.5.6) **定义***) 称函数族$\{f_\lambda\in {}_b\mathscr{E}_+:\ \lambda>0\}$为协调的,如果

*) 协调族的概念来源于关于过程 $P^{\min}(\lambda,\ x,\ \cdot)$的预解方程.

$$f_\lambda=\int R(\mu,\lambda;\cdot,\ dy)f_\mu(y),\lambda,\mu>0;$$

称测度族$\{\varphi_\lambda\in\mathscr{L}_+:\ \lambda>0\}$是协调的，如果

$$\varphi_\lambda=\int\varphi_\mu(dx)R(\mu,\lambda;\ x,\cdot)\quad,\lambda,\mu>0.$$

再命

$$\mathscr{U}_\lambda=\{f\in{}_b\mathscr{E}_+:\ (\lambda+q(\cdot))f=\int q(\cdot,dy)f(y)\},\quad \lambda>0,$$

$$\mathscr{V}_\lambda=\left\{\varphi\in\mathscr{L}_+:\ \varphi=\int\varphi(dx)\int q(x,dy)(\lambda+q(y))^{-1}\right\},\lambda>0,$$

$$\mathscr{V}_\lambda^{\prime}=\left\{\varphi\in\mathscr{L}_+:\ \int\varphi(dx)[(\lambda+q(x))\delta(x,A)-q(x,A)]=0,\right.$$

$$\left.A\in\mathscr{E}\cap E_n,n\geqslant1\right\},\lambda>0.$$

使用定理（2.4.7）的证法可证

（2.5.7）**引理** 对每$\lambda>0$，$\mathscr{V}_\lambda=\mathscr{V}_\lambda^{\prime}$。

（2.5.8）**引理** 固定$\lambda>0$。

(i) 如f，$g\in{}_b\mathscr{E}_+$，且

$$\int[(\lambda+q(\cdot))\delta(\cdot,\ dy)-q(\cdot,dy)]f(y)\geqslant g,$$

则

$$f\geqslant\int P^{\min}(\lambda,\ \cdot,dy)g(y);$$

进而，若前一式中的等号成立且$\mathscr{U}_\lambda=\{0\}$，则$f=\int P^{\min}(\lambda,\ \cdot,\ dy)g(y)$。

(ii) 如$\mu,U\in\mathscr{L}_+$，且

$$\int\mu(dx)[(\lambda+q(x))\delta(x,A)-q(x,A)]\geqslant U(A),$$

$$A\in\mathscr{E}\cap E_n,n\geqslant1,$$

则

$$\mu\geqslant\int U(dx)P^{\min}(\lambda,x,\ \cdot\ );$$

进而，若前一式中的等号成立且 $\mathscr{V}_\lambda=\{0\}$，则

$$\mu=\int U(dx)P^{\min}(\lambda,x,\cdot).$$

证 我们只证 (ii)，(i) 的证明与 (ii) 类似. 由假设知

$$\int\mu(dx)(\lambda+q(x))\delta(x,A)$$

$$\geqslant\int\mu(dx)q(x,A)+U(A),\quad A\in\mathscr{E},$$

两边视作关于 A 的测度，并对 $\delta(\cdot,A)/(\lambda+q(\cdot))$ 取积分，我们看到：μ 是方程

$$\varphi\geqslant\int\varphi(dx)\int_{\cdot}q(x,dy)(\lambda+q(y))^{-1}+\int_{\cdot}U(dx)(\lambda+q(x))^{-1}$$

的一个非负解. 另一方面，由于 $P^{\min}(\lambda,x,A)$ 是方程 (F_λ) 的最小解，从而由定理 (2.1.21) . (ii) 知 $\int U(dx)P^{\min}(\lambda,x,\cdot)$ 是上述方程的最小解. 于是由比较定理立得前一项断言. 现在，我们有

$$\mu-\int U(dx)P^{\min}(\lambda,x,\cdot)\in\mathscr{V}_\lambda,$$

故后一断言是显然的. ▮

(2.5.9) **定义** 称函数族 $\{f_k\}_{k=1}^n\subset b\mathscr{E}_+$ 是线性无关的，如果对于任何的 $\{c_k\}_{k=1}^n\subset\boldsymbol{R}$，

$$\sum_{k=1}^n c_kf_k=0\Longrightarrow c_k=0,k=1,\cdots,n;$$

称测度族 $\{\varphi_k\}_{k=1}^n\subset\mathscr{L}_+$ 是线性无关的，如果对于任何的 $\{c_k\}_{k=1}^n\subset\boldsymbol{R}$，

$$\sum_{k=1}^n c_k\varphi_k=0\Longrightarrow c_k=0,k=1,\cdots,n.$$

$\mathscr{U}_\lambda$ 的极大线性无关组的个数称为 $\mathscr{U}_\lambda$ 的维数，记之为 $\dim\mathscr{U}_\lambda$. 类似地有 $\dim\mathscr{V}_\lambda$.

(2.5.10) 引理

(i) 给定 $\lambda_0>0$ 和 $f_{\lambda_0}\in\mathscr{U}_{\lambda_0}$. 置

$$f_\mu=\int R(\lambda_0,\mu;\ \cdot,dy)f_{\lambda_0}(y),\ \mu>0,$$

则 $f_\mu\in\mathscr{U}_\mu$, 且$\{f_\mu:\mu>0\}$是协调的.

(ii) 给定 $\lambda_0>0$ 和 $\varphi_{\lambda_0}\in\mathscr{V}_{\lambda_0}$. 置

$$\varphi_\mu=\int\varphi_{\lambda_0}(dx)R(\lambda_0,\mu;\ x,\cdot),\ \mu>0,$$

则 $\varphi_\mu\in\mathscr{V}_\mu$, 而且$\{\varphi_\mu:\mu>0\}$是协调的.

证 先证 (a) : $f_\mu\geqslant0$, $\mu>0$.

事实上, 当 $\mu\leqslant\lambda_0$ 时, 显然有

$$f_\mu=f_{\lambda_0}+(\lambda_0-\mu)\int P^{\min}(\mu,\ \cdot,dy)f_{\lambda_0}(y)\geqslant0.$$

若 $\mu\geqslant\lambda_0$, 则因 $f_{\lambda_0}\in\mathscr{U}_{\lambda_0}$, 从而

$$(\mu+q(x))f_{\lambda_0}(x)-\int q(x,dy)f_{\lambda_0}(y)=(\mu-\lambda_0)f_{\lambda_0}(x)\geqslant0,$$

$$x\in E,\ \mu\geqslant\lambda_0.$$

于是, 由引理 (2.5.8) . (i) 得

$$f_{\lambda_0}\geqslant(\mu-\lambda_0)\int P^{\min}(\mu,\ \cdot,dy)f_{\lambda_0}(y),\ \mu\geqslant\lambda_0.$$

故

$$f_\mu=f_{\lambda_0}+(\lambda_0-\mu)\int P^{\min}(\mu,\ \cdot,dy)f_{\lambda_0}(y)\geqslant0.$$

(b) 试证可测性.

由于 f_{λ_0}, $R(\lambda_0,\mu,\ \cdot,A)\in{}_b\mathscr{E}_+$, 从而由单调类定理立知 $f_\mu=\int R(\lambda_0,\mu;\ \cdot,dy)f_{\lambda_0}(y)$ 亦然.

(c) 利用 (2.5.3) 立得协调性. 由于 $P^{\min}(\lambda,x,A)$ 满足 (B_λ), $f_{\lambda_0}\in\mathscr{U}_{\lambda_0}$, 可见

$$\int q(x,dy)f_\mu(y)$$

$$=\int q(x,dy)\int R(\lambda_0,\mu;\ y,dz)f_{\lambda_0}(z)$$

$$=\int q(x,dy)f_{\lambda_0}(y)+(\lambda_0-\mu)\int q(x,dy)\int P^{\min}(\mu,y,dz)f_{\lambda_0}(z)$$

$$=(\lambda_0+q(x))f_{\lambda_0}(x)+(\lambda_0-\mu)\int P^{\min}(\mu,x,dy)f_{\lambda_0}(y)$$

$$\times(\mu+q(x))-(\lambda_0-\mu)f_{\lambda_0}(x)$$

$$=(\mu+q(x))\left[f_{\lambda_0}(x)+(\lambda_0-\mu)\int P^{\min}(\mu,x,dy)f_{\lambda_0}(y)\right]$$

$$=(\mu+q(x))f_\mu(x),\ x\in E,\ \mu>0.$$

综合 (a) 、 (b) 和 (c) 即得 (i) .

(ii) 的证明类似. 首先, 显然有 $\varphi_\mu\in\mathscr{L}$, $\mu>0$. 其次, 若 $\mu\leqslant\lambda_0$, 当然有 $\varphi_\mu\geqslant0$. 反之, 若 $\mu\geqslant\lambda_0$, 则由 $\varphi_{\lambda_0}\in\mathscr{V}_{\lambda_0}$ 得

$$\int\varphi_{\lambda_0}(dx)((\mu+q(x))\delta(x,A)-q(x,A))$$

$$=(\mu-\lambda_0)\varphi_{\lambda_0}(A)\geqslant0,\qquad A\in\mathscr{E}\cap E_n,\ n\geqslant1,\ \mu\geqslant\lambda_0,$$

于是由引理 (2.5.8) . (ii) 得

$$\varphi_{\lambda_0}(A)\geqslant\int(\mu-\lambda_0)\varphi_{\lambda_0}(dx)P^{\min}(\mu,x,A),A\in\mathscr{E}$$

$$\mu\geqslant\lambda_0.$$

因而

$$\varphi_\mu(A)=\varphi_{\lambda_0}(A)+(\lambda_0-\mu)\int\varphi_{\lambda_0}(dx)P^{\min}(\mu,x,A)$$

$$\geqslant0,\ A\in\mathscr{E},\ \mu\geqslant\lambda_0.$$

故总有 $\varphi_\mu\geqslant0$, 进而 $\varphi_\mu\in\mathscr{L}_+$. $\{\varphi_\mu\}$的协调性是显然的. 现在, 使用方程 (F_n) 以及 $\varphi_{\lambda_0}\in\mathscr{V}_{\lambda_0}$ 的事实, 便得

$$\int\varphi_\mu(dx)[(\mu+q(x))\delta(x,A)-q(x,A)]$$

$$=\int\varphi_{\lambda_0}(dz)\int(\delta(z,dx)+(\lambda_0-\mu)P^{\min}(\mu,z,dx))$$

$$\cdot[(\mu+q(x))\delta(x,A)-q(x,A)]$$

$$= \int \varphi_{\lambda_0}(dx)[(\lambda_0 + q(x))\delta(x,A) - q(x,A)]$$

$$+ (\mu - \lambda_0)\varphi_{\lambda_0}(A) + (\lambda_0 - \mu)\int \varphi_{\lambda_0}(dz)$$

$$\times \int P^{\min}(\mu, z, dx) \cdot [(\mu + q(x))\delta(x,A) - q(x,A)]$$

$$= (\mu - \lambda_0)\varphi_{\lambda_0}(A) + (\lambda_0 - \mu)\int \varphi_{\lambda_0}(dz)\delta(z,A)$$

$$= 0, \qquad A \in \mathscr{E} \cap E_n, \ n \geqslant 1. \quad \rrbracket$$

(2.5.11) **定理** $\dim \mathscr{U}_\lambda$ 和 $\dim \mathscr{V}_\lambda$ 与 $\lambda > 0$ 无关。从而可记作 $\dim \mathscr{U}$ 和 $\dim \mathscr{V}$。

证 设 $\{f_\lambda^{(k)}\}_{k=1}^n \subset \mathscr{U}_\lambda$ 线性无关。取

$$f_\mu^{(k)} = \int R(\lambda, \mu; \ \cdot, dy) f_\lambda^{(k)}(y), \ k = 1, \cdots, n,$$

则由引理（2.5.10）．(i) 知，$\{f_\mu^{(k)}\}_{k=1}^n \subset \mathscr{U}_\mu$。若 $\{c_k\}_1^n \subset \boldsymbol{R}$，使 $\sum_{k=1}^n c_k f_\mu^{(k)} = 0$，则由（2.5.5）得

$$\sum_{k=1}^n c_k f_\lambda^{(k)} = \sum_{k=1}^n c_k \int R(\mu, \lambda; \ \cdot, dy) \int R(\lambda, \mu; \ y, dz) f_\lambda^{(k)}(z)$$

$$= \int R(\mu, \lambda; \ \cdot, dy) \sum_{k=1}^n c_k f_\mu^{(k)}(y) = 0,$$

于是由 $\{f_\lambda^{(k)}\}$ 的线性无关性导出 $\{f_\mu^{(k)}\}$ 的线性无关性。这表明 $\dim \mathscr{U}_\lambda \leqslant \dim \mathscr{U}_\mu$。但 λ 与 μ 对称，故 $\dim \mathscr{U}_\lambda = \dim \mathscr{U}_\mu$。

类似地可证 $\dim \mathscr{V}_\lambda = \dim \mathscr{V}_\mu$。 $\rrbracket$

(2.5.12) **定义** 分别称 $\mathscr{U}_\lambda$ 和 $\mathscr{V}_\lambda$ 为流出、流入空间。$\mathscr{U}$ 中的元素称为流出解。当 $\dim \mathscr{U} < \infty$ 时，称为有限流出的。特别地，若 $\dim \mathscr{U}_\lambda = 0$，则称为零流出；若 $\dim \mathscr{U}_\lambda = 1$，则称为单流出。类似地可定义流入解，有限流入，零流入和单流入。

(2.5.13) **引理** 对于每 $\lambda > 0$，$\{z(\lambda, x) \equiv 1 - \lambda P^{\min}(\lambda, x, E) : x \in E\}$ 是方程

$$(2.5.14)\begin{cases}\xi(\lambda,\cdot)=\int\frac{q(\cdot,dy)}{\lambda+q(\cdot)}\xi(\lambda,y))+\frac{q(\cdot)-q(\cdot,E)}{\lambda+q(\cdot)},\\ 0\leqslant\xi(\lambda,\cdot)\leqslant 1.\end{cases}$$

的最大解. 它可用如下方式得到：若命

$$z^{(0)}(\lambda,\cdot)=1,$$

$$z^{(n+1)}(\lambda,\cdot)=\int\frac{q(\cdot,dy)}{\lambda+q(\cdot)}z^{(n)}(\lambda,y)+\frac{q(\cdot)-q(\cdot,E)}{\lambda+q(\cdot)},\qquad n\geqslant 0,$$

则

$$z^{(n)}(\lambda,\cdot)\downarrow z(\lambda,\cdot),\ n\to\infty.$$

特别地，若 $q(x)-q(x,A)$ 是保守的 q 对,则对每 $\lambda>0$, $z(\lambda,\cdot)$ 是方程

$$(2.5.15)\qquad\begin{cases}\xi(\lambda,\cdot)=\int\frac{q(\cdot,dy)}{\lambda+q(\cdot)}\xi(\lambda,y),\\ 0\leqslant\xi(\lambda,\cdot)\leqslant 1.\end{cases}$$

的最大解. 进而

$$z(\lambda,\cdot)=0\text{ 当且仅当 }\dim\mathscr{U}=0.$$

证 由定理 (2.2.5) 和定理 (2.1.12) 知, $\lambda P^{\min}(\lambda,\cdot,E)$ 是方程

$$\xi(\lambda,\cdot)=\int\frac{q(\cdot,dy)}{\lambda+q(\cdot)}\xi(\lambda,y)+\frac{\lambda}{\lambda+q(\cdot)}$$

的最小解. 注意 $0\leqslant\lambda P^{\min}(\lambda,x,E)\leqslant 1$ 及定理(2.1.5) 便可导出第一项断言. 其它断言的证明是容易的. ▌

由上述引理可立即导出一个非常有用的不断性准则：

(2.5.16) **定理** 保守最小 q 过程不断的充要条件是 $\dim\mathscr{U}=0$, 等价地, $z(\lambda,\cdot)=0$ 对某个 $\lambda>0$(从而对一切 $\lambda>0$) 成立.

我们将在 § 3.2 讨论这个结果的应用.

(2.5.17) **推论** 最小 q 过程不断的充要条件是 q 对保守零流出.

证 如非保守，则由 (B_λ) 立知最小 q 过程中断。 ▌

§ 2.6 保守单流出 q 过程的构造

当 q 过程非唯一时，一个十分有趣的问题是如何把一切 q 过程全部构造出来。本节就保守单流出情形讨论这个问题。

今设 $P(\lambda,x,A)$ 是任一q 过程，则由保守性及定理(1.2.25)知

$$(\lambda+q(x))Q(\lambda,x,A)-\int q(x,dy)Q(\lambda,y,A)=0,$$
$$\lambda>0, x\in E, A\in\mathscr{E}.$$

此处 $Q(\lambda,x,A)=P(\lambda,x,A)-P^{\min}(\lambda,x,A)\geqslant 0$。这表明对每 $\lambda>0$ 和 $A\in\mathscr{E}$，$Q(\lambda,\cdot,A)\in\mathscr{U}_\lambda$。由假设，$\dim\mathscr{U}_\lambda=1$，因而存在依赖于 λ 和 A 的函数 $\varphi_\lambda(A)$，使得 $Q(\lambda,\cdot,A)=z(\lambda,\cdot)\varphi_\lambda(A)$。易见 $\varphi_\lambda\in\mathscr{L}_+$。这样，$P(\lambda,x,A)$ 必取如下形式：

(2.6.1) $\quad P(\lambda,x,A)=P^{\min}(\lambda,x,A)+z(\lambda,x)\varphi_\lambda(A)$.

本节的目的是进一步刻画φ_λ，即找出关于φ_λ的条件，使得(2.6.1)式定义一个q 过程。由于如上定义的 $P(\lambda,x,A)$ 必定满足可测性条件，而且必定满足 (B_λ)（由保守性）。因此，由定理(2.4.8)，我们只需考虑范条件和预解条件*。

$P(\lambda,x,A)$ 满足预解条件当且仅当

$$(\varphi_\lambda(A)z(\lambda,x)-\varphi_\mu(A)z(\mu,x))+(\lambda-\mu)\Big(\int P^{\min}(\lambda,x,dy)\cdot$$
$$z(\mu,y)\varphi_\mu(A)+\int z(\lambda,x)\varphi_\lambda(dy)z(\mu,y)\varphi_\mu(A)$$
$$+\int z(\lambda,x)\varphi_\lambda(dy)P^{\min}(\mu,y,A)\Big)=0,$$

即

*) 以下证明只用到 $z(\lambda,\ \cdot)$为非零的最大解。

$$z(\lambda,x)\int\varphi_\lambda(dy)R(\lambda,\mu;\ y,A)-$$

$$\int R(\mu,\lambda;x,dy)z(\mu,y)\varphi_\mu(A)$$

$$+(\lambda-\mu)\int z(\lambda,x)\varphi_\lambda(dy)z(\mu,y)\varphi_\mu(A)=0.$$

但由（2.4.3），这等价于

$$z(\lambda,x)\int\varphi_\lambda(dy)R(\lambda,\mu;\ y,A)-z(\lambda,x)\varphi_\mu(A)$$

$$+(\lambda-\mu)\int z(\lambda,x)\varphi_\lambda(dy)z(\mu,y)\varphi_\mu(A)=0$$

或

$$(2.6.2)\qquad \int\varphi_\lambda(dy)R(\lambda,\mu;\ y,A)-\varphi_\mu(A)$$

$$+(\lambda-\mu)\int\varphi_\lambda(dy)z(\mu,y)\varphi_\mu(A)=0.$$

此步用到 $z(\lambda,\cdot)\neq0$。如果对某 $\lambda>0$，$\varphi_\lambda=0$，则由上式知，对一切 $\mu>0$，$\varphi_\mu=0$。此时

$$P(\lambda,x,A)=P^{\min}(\lambda,x,A),\ \lambda>0,x\in E,A\in\mathscr{E}.$$

否则，必定存在 $\mu_0>0$ 使 $\varphi_{\mu_0}\neq0$。进而，对一切 μ，$\varphi_\mu\neq0$。命

$$\eta_\lambda=\int\varphi_{\mu_0}(dx)R(\mu_0,\lambda;\ x,\cdot),\ \lambda>0$$

则 $\{\eta_\lambda:\ \lambda>0\}$ 是一协调族。在（2.6.2）中取 $\lambda=\mu_0$，得

$$\eta_\mu(A)=\left[1+(\mu-\mu_0)\int\varphi_{\mu_0}(dy)z(\mu,y)\right]\varphi_\mu(A)$$

我们注意 $1+(\mu-\mu_0)\int\varphi_{\mu_0}(dy)z(\mu,y)$ 与 A 无关。如果

$\int\varphi_{\mu_0}(dy)z(\mu,y)=0$，则 $1+(\mu-\mu_0)\int\varphi_{\mu_0}(dy)z(\mu,y)=1>0$，否则，$1+(\mu-\mu_0)\int\varphi_{\mu_0}(dy)z(\mu,y)>1-\mu_0\int\varphi_{\mu_0}(dy)\,z(\mu,y)\geqslant1-\mu_0\varphi_{\mu_0}(E)\geqslant0$（利用范条件）。因此，总有

$$1+(\mu-\mu_0)\int\varphi_{\mu_0}(dy)z(\mu,y)>0,\quad \mu>0.$$

这样，我们可命

$$\varphi_\lambda=m_\lambda\eta_\lambda,\quad m_\lambda>0,\quad \lambda>0.$$

代入（2.6.2）可见，$\{m_\lambda:\ \lambda>0\}$必须满足

$$m_\lambda=m_\mu\left[1+(\mu-\lambda)m_\lambda\int\eta_\lambda(dy)z(\mu,y)\right]$$

若命 $\sigma(\lambda,\mu)=\int\eta_\lambda(dy)z(\mu,y)$，则由上式得

$$m_\lambda-m_\mu=(\mu-\lambda)m_\lambda m_\mu\sigma(\lambda,\mu),$$

即

$$(2.6.3)\quad m_\mu^{-1}-\mu\sigma(\lambda,\mu)=m_\lambda^{-1}-\lambda\sigma(\lambda,\mu).$$

但由（2.5.3）和（2.5.4）得

$$\begin{aligned}&\int\eta_\mu(dy)P^{\min}(\lambda,y,A)\\
&=\int\varphi_{\mu_0}(dx)\int R(\mu_0,\mu;\ x,dy)P^{\min}(\lambda,y,A)\\
&=\int\varphi_{\mu_0}(dx)\int R(\mu_0,\lambda;\ x,dy)\times\\
&\quad\left(\int R(\lambda,\mu;\ y,dz)P^{\min}(\lambda,y,A)\right)\\
&=\int\eta_\lambda(dy)P^{\min}(\mu,y,A).\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\sigma(\lambda,\mu)&=\eta_\lambda(E)-\mu\int\eta_\lambda(dy)P^{\min}(\mu,y,E)\\
&=\eta_\lambda(E)-\mu\int\eta_\mu(dy)P^{\min}(\lambda,y,E)\\
&=\int\eta_\mu(dx)R(\mu,\lambda;\ x,E)\\
&\quad-\mu\int\eta_\mu(dx)P^{\min}(\lambda,x,E)\end{aligned}$$

$$=\eta_\mu(E)-\lambda\int\eta_\mu(dy)P^{\min}(\lambda,y,E)$$

代入（2.6.3）得

$$m_\mu^{-1}-\mu\eta_\mu(E)+\lambda\mu\int\eta_\mu(dy)P^{\min}(\lambda,y,E)$$

$$=m_\lambda^{-1}-\lambda\eta_\lambda(E)+\lambda\mu\int\eta_\lambda(dy)P^{\min}(\mu,y,E)\ .$$

故 $m_\lambda^{-1}-\lambda\eta_\lambda(E)=c$ 与 $\lambda>0$ 无关.

至此，我们已经证得

（2.6.4）**定理** 对于给定的保守单流出 q 对，每一个 q 过程可用如下方式得到：任取测度协调族$\{\eta_\lambda:\ \lambda>0\}$和常数 $c\geqslant 0$，然后令

$$P(\lambda,x,A)=P^{\min}(\lambda,x,A)+\frac{z(\lambda,x)}{c+\lambda\,\eta_\lambda(E)}\eta_\lambda(A)\ ,$$

$$\lambda>0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E}.$$

此处约定 $0/0=0$. 这个过程不断的充要条件是 $c=0$.

应当指出，上面的构造也适用于 $\dim\mathscr{U}>1$ 的情况. 特别地，我们有

（2.6.5）**推论** 设 q 对保守. 如果 $\varphi\in\mathscr{L}_+$ 满足

$$(2.6.6)\qquad \int\varphi(dy)P^{\min}(\lambda,y,E)<\infty,\ \lambda>0.$$

则对每 $c\geqslant 0$,

$$(2.6.7)\qquad P(\lambda,x,A)=P^{\min}(\lambda,x,A)+\frac{z(\lambda,x)\int\varphi(dy)P^{\min}(\lambda,y,A)}{c+\lambda\int\varphi(dy)P^{\min}(\lambda,y,E)},$$

$$\lambda>0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E}$$

定义了一个 q 过程.

证 只需验证$\left\{\int\varphi(dy)P^{\min}(\lambda,y,\cdot):\ \lambda>0\right\}$是协调的. 但这

可从（2.5.4）得到. ▌

§ 2.7 补充与注记

在§1.3里，我们已经看到可微性的处理并非容易. 实际上，由(1.5.6)或笔者的[9]知，适当的条件是需要的. 这是造成处理（B）和（F）比之（B_λ）和（F_λ）更为困难的原因所在. 但若有了可微性之后，许多讨论就是平行的. 例如说，我们有

(2.7.1) **引理** 设（$E,\mathscr{E},\mathscr{E}$）是具有可数基的内正则空间. 则（F）等价于（$F_\lambda$）.

证 由定理（1.3.30）知，$P(t,x,A)$ 有连续导数 $P'(t,x,A)$. 它的全变差$\leqslant q(x)$. 另一方面，由 $K-C$ 方程和 Fatou 引理知

$$
\begin{aligned}
&P'(t,x,A)\\
&\geqslant\int_{E-A}P(t,x,dy)q(y,A)-\int_A P(t,x,dy)q(y),\\
&\qquad\qquad\qquad t\geqslant 0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{R}.
\end{aligned}
$$

特别地，当 $A\in\mathscr{E}\cap E_n$ 时，

$$
\begin{aligned}
0&\leqslant\int P(t,x,dy)q(y,A)\leqslant\int_A P(t,x,dy)q(y,A)\\
&\quad+\int_A P(t,x,dy)q(y)+|P'(t,x,\cdot)|\\
&\leqslant q(x)+2\sup_{y\in A}q(y).
\end{aligned}
$$

这表明

$$\int_0^t\int P(s,x,dy)\int_A q(y,dz)e^{-q(z)(t-s)}$$

关于 t 连续. 余下的证明就容易了. 详见（2.2.1）之证. ▌

同样地，在可微性条件下，我们可导出柯氏向后不等式

$$P'(t,x,A) \geqslant \int q(x,dy)P(t,y,A) - q(x)P(t,x,A).$$

由此便可证通过方程（B）得到的最小解是最小的 q 过程。但在定理（2.2.5）中，我们使用拉氏变换形式，因而无需对空间施加限制，也无需对过程需加保守性之类的限制。

（2.7.2）**定义** 称 $(0,\infty)$ 上的函数 φ 是完全单调的，如果它有一切阶导数 $\varphi^{(n)}$，而且满足

$$(-1)^n\varphi^{(n)}(\lambda) \geqslant 0,\ \lambda>0,\ n\geqslant 0.$$

关于完全单调函数的主要结果有

（2.7.3）**表现定理** $(0,\infty)$ 上的函数 φ 完全单调的充要条件是：存在 $(0,\infty)$ 上的测度（不必有限）$F(dt)$，使得

$$(2.7.4)\qquad \varphi(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}F(dt)$$

此时，F 为概率测度的充要条件是 $\varphi(0)=1$。

（2.7.5）**反演公式** 如果（2.7.4）对每 $\lambda>0$ 成立，则在 F 的一切连续点上，

$$(2.7.6)\qquad F(t) = \lim_{a\to\infty}\sum_{n\leqslant at}\frac{(-a)^n}{n!}\varphi^{(n)}(a)$$

（2.7.7）**推论** 函数 φ 形如

$$(2.7.8)\qquad \varphi(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}f(t)dt$$

此处 $0\leqslant f\leqslant c<\infty$ 的充要条件是

$$(2.7.9)\qquad 0\leqslant\frac{(-a)^n\varphi^{(n)}(a)}{n!}\leqslant\frac{c}{a},\ a>0,\ n\geqslant 0.$$

以上结果可在 Feller[5]p439—440 中找到。

（2.7.10）．关于定理（2.2.5）最后一步的详细证明。

设 $P(t,x,A)$ 是任一跳过程，定义 $b\mathscr{E}$ 到自身的有界线性算子 $U^\alpha(\alpha>0)$ 如次：

$$U^\alpha f = \int_0^\infty e^{-\alpha t}\int P(t,x,dy)f(y)dt$$

往证

(2.7.11) $$D^n U^\alpha f = (-1)^n n! (U^\alpha)^{n+1} f, \quad n \geqslant 1$$

此处 $D = \dfrac{d}{d\alpha}$.

事实上，由预解方程知，若 α，$\beta>0$，$\alpha \neq \beta$，则

(2.7.12) $$\frac{U^\beta f - U^\alpha f}{\beta - \alpha} = -U^\beta U^\alpha f$$

再一次用预解方程，得

(2.7.13) $$\begin{aligned} |U^\alpha f(x) - U^\beta f(x)| &= |\beta - \alpha| \cdot |U^\alpha U^\beta f(x)| \\ &\leqslant \frac{|\beta - \alpha|}{\alpha\beta} |\alpha U^\alpha (\beta U^\beta) f(x)| \\ &\leqslant \frac{|\beta - \alpha|}{\alpha\beta} \|f\|. \end{aligned}$$

这表明，在每一个区间 $[\alpha_0, \infty)$ （$\alpha_0 > 0$）上，$\alpha \to U^\alpha f(x)$ 关于 x 一致连续. 于是，在 (2.7.12) 中令 $\beta \to \alpha$，便得 $DU^\alpha f = -(U^\alpha)^2 f$. 这表明：当 $n=1$ 时，(2.7.11) 成立. 一般地，显然有

(2.7.14) $$\begin{aligned} &(U^\alpha)^n f - (U^\beta)^n f \\ &= (U^\alpha - U^\beta)[(U^\alpha)^{n-1} + (U^\alpha)^{n-2} U^\beta + \cdots \\ &\quad + (U^\beta)^{n-1}] f. \end{aligned}$$

注意，当 $\alpha, \beta \geqslant \alpha_0 > 0$ 时，

$$\|(U^\alpha)^{n-1-i} (U^\beta)^i f\| \leqslant \|f\| / (\alpha^{n-1-i} \beta^i) \leqslant \|f\| / \alpha_0^{n-1},$$

可见

$$\|(U^\alpha)^n f - (U^\beta)^n f\| \leqslant \frac{n}{\alpha_0^{n-1}} \|f\| \cdot \|(U^\alpha - U^\beta) 1\|$$

$$\leqslant |\beta - \alpha| n \|f\| / \alpha^{n+1},$$

可见，在 $[\alpha_0, \infty)$ 上，$\alpha \to U^\alpha f(x)$ 也是关于 x 一致连续的. 现在，由 (2.7.14) 和 (2.7.12) 得

$$\frac{(U^\beta)^n f - (U^\alpha)^n f}{\beta - \alpha} = -U^\alpha U^\beta [(U^\alpha)^{n-1} + \cdots + (U^\beta)^{n-1}] f$$

$$\longrightarrow -n(U^{\alpha})^{n+1}f,\ \beta\longrightarrow\alpha.$$

或即

$$(2.7.15)\qquad D[(U^{\alpha})^{n}f]=-n(U^{\alpha})^{n+1}f,\ n\geqslant 1.$$

现在，我们利用此式来完成（2.7.11）的证明.

假设对n已真，那么

$$D^{n+1}U^{\alpha}f=D[D^{n}U^{\alpha}f]$$

$$=D[(-1)^{n}n!\,(U^{\alpha})^{n+1}f]\quad（由归纳假设）$$

$$=(-1)^{n}n!\,D[(U^{\alpha})^{n+1}f]$$

$$=(-1)^{n}n!\,(-1)(n+1)(U^{\alpha})^{n+2}f\quad（由（2.7.15））$$

$$=(-1)^{n+1}(n+1)!\,(U^{\alpha})^{n+2}f.$$

故（2.7.11）成立.

今设$P(t,x,A)$是任一q过程. 类子U^{α}如前面所定义. 类似地可定义相应于$P^{\min}(t,x,A)$的算子U^{α}_{0}. 由单调类定理和假设知

$$U^{\alpha}f\geqslant U^{\alpha}_{0}f,\qquad \alpha>0,\ f\in {}_{b}\mathscr{E}_{+}.$$

$$U^{\alpha}f,\ U^{\alpha}_{0}f\geqslant 0,\ \alpha>0,\ f\in {}_{b}\mathscr{E}_{+}$$

由此及（2.7.11）和（2.7.14），得

$$(-1)^{n}D^{n}[(U^{\alpha}-U^{\alpha}_{0})f]$$

$$=(-1)^{n}D^{n}U^{\alpha}f-(-1)^{n}D^{n}U^{\alpha}_{0}f$$

$$=n!\,[(U^{\alpha})^{n+1}f-(U^{\alpha}_{0})^{n+1}f]$$

$$=n!\,(U^{\alpha}-U^{\alpha}_{0})[(U^{\alpha})^{n}+(U^{\alpha})^{n-1}U^{\alpha}_{0}+\cdots+(U^{\alpha}_{0})^{n}]f\geqslant 0.$$

$$\alpha>0,\ n\geqslant 1.$$

因此，我们证得$(U^{\alpha}-U^{\alpha}_{0})f(x)\quad(x\in E)$关于$\alpha>0$是完全单调的. 特别地，取$f_{0}=I_{A}$,则$(U^{\alpha}-U^{\alpha}_{0})f_{0}(x)\quad(x\in E)$完全单调且

$$\left|\frac{(-\alpha)^{n}D^{n}(U^{\alpha}-U^{\alpha}_{0})f_{0}}{n!}\right|\leqslant\frac{D^{n}U^{\alpha}f_{0}}{n!}+\frac{D^{n}U^{\alpha}_{0}f_{0}}{n!}$$

$$\leqslant\frac{2}{\alpha}.\qquad(由(2.7.11))$$

可见（2.7.7）满足，故

$$P(t,x,A)-P^{\min}(t,x,A)\geqslant 0,\quad t\geqslant 0.$$

但A和x任意，故断言得证。

（2.7.16）**注** 上面所用的方法具有一般的意义。例如说，它可用于代替§1.4所用的Hille-Yosida定理，由预解算子构造相应的马氏半群（例如见Getoor［1］、§3）。

对于马链情形，最小解理论的系统研究属于侯振挺、郭青峰［1］。这里的一般形式来自陈木法［1］。其中定理（2.1.21）取自陈木法［1］和陈木法、郑小谷［1］。

柯氏向后、向前方程（B）和（F）最早由Kolmogorov［1］引进的。定理（2.2.5）在特殊形式下最早由Feller［1］所证。胡迪鹤［1］作了推广。这里，我们就一般形式作了细致的处理。方程（F_λ）属于陈木法［2］，定理5.2.在局部意义下等价于通常的柯氏向前方程。等价性定理（2.4.7）取自陈木法、郑小谷[1]。

定理（2.3.1）和定理(2.3.7)是新的。后者类似于Stroock和Varadhan[1；定理10.2.1]。关于条件（2.3.2），Basis［1］曾用过较强的类似物。他也用过条件（2.3.4）。关于定理（2.3.7）作者曾与唐守正作过有益的讨论。例（2.3.12）是属于郑君礼的。

§2.4基本上取自陈木法、郑小谷［1］。在该文中首次引进了q划分的概念。定理（2.4.7）的（i）的马链形式出自Feller［3］和Reuter［1］，一般形式属于胡迪鹤［1］。至于（ii），马链形式属于侯振挺［2］，这里是他的结果的自然推广。

“协调族”是杨向群［1］命名的。定理（2.5.11）和定理（2.5.16）的马链形式属于Feller［3］和Reuter［1］，一般形式属于胡迪鹤［1］。

定理（2.6.4）本质上属于Reuter［2］。这里，我们参考了杨向群[1]和胡迪鹤[1]。

第三章　唯一性准则

本章将首先研究满足柯氏向后或向前方程的 q 过程的唯一性准则，而后研究一般 q 过程的唯一性准则，我们也将介绍唯一性准则的一些应用．

§3.1　满足柯氏方程的唯一性准则

(3.1.1) 定义 称满足方程 (B_λ) 的 q 过程为 B_q 过程．类似地有 F_q 过程．

下面是满足柯氏向后方程 (B_λ) 的 q 过程的唯一性准则．

(3.1.2) **定理**　B_q 过程唯一的充要条件是 $\dim\mathscr{U}=0$．特别地，若 q 对保守，则 q 过程唯一的充要条件是 $\dim\mathscr{U}=0$．

证　使用定理 (2.5.16)、推论(2.6.5)和下述事实：因为最小 q 过程是 B_q 过程，对每 $\lambda>0$ 和 $A\in\mathscr{E}$，对任一 B_q 过程 $P(\lambda,x,A)$ 来说，

$$P(\lambda,\cdot,A)-P^{\min}(\lambda,\cdot,A)\in\mathscr{U}_\lambda,$$

从而 B_q 过程唯一等价于 $\dim\mathscr{U}_\lambda=\dim\mathscr{U}=0$．　▌

为研究 F_q 过程的唯一性，我们还要作些准备．下述结果是关于测度协调族的分解．

(3.1.3) **引理**　为使 $\{\eta_\lambda:\lambda>0\}$ 为测度协调族，充要条件是：存在一个满足

$$\text{(3.1.4)}\quad \int w(dx)P^{\min}(\lambda,x,\cdot)\in\mathscr{L}_+,\lambda>0.$$

的 $w\in\overline{\mathscr{L}}_+$ 和一个测度协调族 $\{\overline{\eta_\lambda}\in\mathscr{V}_\lambda:\lambda>0\}$，使

$$(3.1.5)\qquad \eta_\lambda=\int w(dx)P^{\min}(\lambda,x,\cdot)+\overline{\eta_\lambda},\ \lambda>0.$$ 此外，

分解式 (3.1.5) 中的 w 和 $\{\overline{\eta_\lambda}:\lambda>0\}$ 是由 $\{\eta_\lambda:\lambda>0\}$ 唯一决定的。换言之，分解是唯一的。

证 充分性是明显的，往证必要性。

设 $\{\eta_\lambda:\lambda>0\}$ 是一协调族，则

$$\eta_\nu(A)+(\nu-\lambda)\int\eta_\nu(dx)P^{\min}(\lambda,x,A)=\eta_\lambda(A)\geqslant 0.$$

因而

$$\nu\eta_\nu(A)\geqslant(1-\lambda^{-1}\nu)\int\eta_\nu(dx)\lambda[\lambda P^{\min}(\lambda,x,A)-\delta(x,A)]$$

固定 ν 并命 $\lambda\to\infty$，得

$$\begin{aligned}\nu\eta_\nu(A)&\geqslant\varliminf_{\lambda\to\infty}(1-\lambda^{-1}\nu)\int_{E-A}\eta_\nu(dx)\lambda^2P^{\min}(\lambda,x,A)\\&\quad+\varliminf_{\lambda\to\infty}(1-\lambda^{-1}\nu)\int_A\eta_\nu(dx)\lambda[\lambda P^{\min}(\lambda,x,A)-1]\\&\geqslant\int_{E-A}\eta_\nu(dx)q(x,A)-\int_A\eta_\nu(dx)q(x)\\&=\int\eta_\nu(dx)[q(x,A)-q(x)\delta(x,A)],\\&\qquad\qquad A\in\mathscr{E}\cap E_n,\ n\geqslant1.\end{aligned}$$

今定义

$$(3.1.6)\qquad w_\nu(A)=\nu\eta_\nu(A)-\int\eta_\nu(dx)[q(x,A)-q(x)\delta(x,A)],\quad A\in\mathscr{E}\cap E_n,\ n\geqslant1.$$

则

$$0\leqslant w_\nu(A)<\infty,\ A\in\mathscr{E}\cap E_n,\ n\geqslant1.$$

显然 w_ν 可唯一扩张到 $\mathscr{E}$ 上，仍然记作 w_ν，自然有 $w_\nu\in\overline{\mathscr{L}}_+$.

往证

$$(3.1.7) \quad \int w_\nu(dx) P^{\min}(\nu, x, A) \leqslant \eta_\nu(A), \quad A \in \mathscr{E}.$$

为此，使用方程（F_λ）的典型解法。当 $n=0$ 时，

$$\int w_\nu(dx) P^{(0)}(\nu, x, A) = 0 \leqslant \eta_\nu(A), \quad A \in \mathscr{E}.$$

设

$$\int w_\nu(dx) P^{(n)}(\nu, x, A) \leqslant \eta_\nu(A), \quad A \in \mathscr{E},$$

则

$$\int w_\nu(dx) P^{(n+1)}(\nu, x, A)$$

$$= \int w_\nu(dx) \left[\int P^{(n)}(\nu, x, dy) \int_A \frac{q(y, dz)}{\nu + q(z)} + \frac{\delta(x, A)}{\lambda + q(x)} \right]$$

$$\leqslant \int \eta_\nu(dy) \int_A \frac{q(y, dz)}{\nu + q(z)} + \int_A \frac{w_\nu(dx)}{\nu + q(x)} = \eta_\nu(A),$$

$$A \in \mathscr{E} \cap E_m, \quad m \geqslant 1.$$

最后一步用到（3.1.6）及此式之前的估计：

$$\int \eta_\nu(dx) q(x, A) \leqslant \eta_\nu(A) + \int_A \eta_\nu(dx) q(x) < \infty$$

$$A \in \mathscr{E} \cap E_m, \quad m \geqslant 1.$$

这样，我们已证得

$$\int w_\nu(dx) P^{(n)}(\nu, x, A) \leqslant \eta_\nu(A), \quad A \in \mathscr{E}$$

对一切 n 成立，在上式中令 $n \to \infty$ 即得（3.1.7）。现在，仍然固定 ν，并定义

$$(3.1.8) \quad \overline{\eta_\nu} = \nu \eta_\nu - \int w_\nu(dx) P^{\min}(\nu, x, \cdot).$$

那么，由（3.1.7）立知 $\overline{\eta_\nu} \in \mathscr{L}_+$。另一方面，由（3.1.8），（3.1.6）和（$B_\lambda$）得：对每 $A \in \mathscr{E} \cap E_n$，$n \geqslant 1$，

$$\int \overline{\eta_\nu}(dx) [(\nu + q(x)) \delta(x, A) - q(x, A)]$$

$$= w_\nu(A) - \int w_\nu(dx) \int P^{\min}(\nu, x, dy)\,[(\nu + q(y))\delta(y, A) -$$

$$- q(y, A)]$$

$$= w_\nu(A) - \int w_\nu(dx)\delta(x, A) = 0.$$

这表明$\overline{\eta_\nu} \in \mathscr{V}_\nu$.

往证如上得到的 w_ν 和 $\overline{\eta_\nu}$ 是由 η_ν 唯一决定的. 事实上, 若设 w'_ν 和 $\overline{\eta'_\nu}$ 也满足 (3.1.8), 则

$$\int w_\nu(dx) P^{\min}(\nu, x, A) + \overline{\eta_\nu}(A)$$

$$= \int w'_\nu(dx) P^{\min}(\nu, x, A) + \overline{\eta'_\nu}(A), \qquad A \in \mathscr{E}.$$

两边视作为关于 A 的测度, 并对函数

$$(\nu + q(\cdot))\delta(\cdot, A) - q(\cdot, A), \qquad A \in \mathscr{E} \cap E_n,\ n \geqslant 1$$

取积分, 注意 $P^{\min}(\lambda, x, \cdot)$ 满足 (F_n), $\overline{\eta_\nu}$, $\overline{\eta'_\nu} \in \mathscr{V}_\nu$ 便知上述积分可行, 而且, 我们得到

$$w_\nu(A) = w'_\nu(A), \qquad A \in \mathscr{E} \cap E_n,\ n \geqslant 1.$$

这说明 $w_\nu = w'_\nu$, 从而也有$\overline{\eta_\nu} = \overline{\eta'_\nu}$. 故对于每个固定的 ν, 分解式 (3.1.8) 是唯一的.

最后, 我们证明 w_λ 与 $\lambda > 0$ 无关. 由协调性和 (2.5.4) 得

$$\eta_\lambda = \int \eta_\nu(dx) R(\nu, \lambda; x, \cdot)$$

$$= \int w_\nu(dx) \int P^{\min}(\nu, x, dy) R(\nu, \lambda; y, \cdot)$$

$$+ \int \overline{\eta_\nu}(dx) R(\nu, \lambda; x, \cdot)$$

$$= \int w_\nu(dx) P^{\min}(\lambda, x, \cdot) + \int \overline{\eta_\nu}(dx) R(\nu, \lambda; x, \cdot).$$

由引理 (2.5.10). (ii) 知

$$\int \overline{\eta_\nu}(dx) R(\nu, \lambda; x, \cdot) \in \mathscr{V}_\lambda.$$

这说明

$$\int w_\nu(dx)P^{\min}(\lambda,x,\cdot)\in\mathscr{L}_+.$$

因此，w_ν 和 $\int\overline{\eta_\nu}(dx)R(\nu,\lambda;x,\cdot)$ 是 η_λ 的一组分解，故由前面所证的结论知

$$w_\lambda=w_\nu$$

而且

$$\overline{\eta_\lambda}=\int\overline{\eta_\nu}(dx)R(\nu,\lambda;x,\cdot)$$

前者表明 w_λ 与 $\lambda>0$ 无关；后者表明 $\{\overline{\eta_\mu}:\lambda>0\}$ 还是协调的。

(3.1.9) **引理** 设 $\{\eta_\lambda:\lambda>0\}$ 是测度的协调族，则

(3.1.10) $\eta_\lambda\downarrow 0,\ \lambda\uparrow\infty.$

如果再设 $\eta_\lambda\in\mathscr{V}_\lambda(\lambda>0)$，则

(3.1.11)
$$\begin{aligned}&\lambda\eta_\lambda(A)-\nu\eta_\nu(A)\\&=(\lambda-\nu)\int\eta_\lambda(dx)[\delta(x,A)-\nu P^{\min}(\nu,x,A)]\\&=(\lambda-\nu)\int\eta_\nu(dx)[\delta(x,A)-\lambda P^{\min}(\lambda,x,A)]\end{aligned}$$

$$\lambda,\nu>0,\quad A\in\mathscr{E}.$$

从而 $\lambda\eta_\lambda(E)\uparrow$，当 $\lambda\uparrow$.

证 由协调性得

(3.1.12)
$$\begin{aligned}\eta_\lambda&=\eta_\nu+(\nu-\lambda)\int\eta_\lambda(dx)P^{\min}(\lambda,x,\cdot)\\&=\eta_\nu+\nu\int\eta_\lambda(dx)P^{\min}(\lambda,x,\cdot)-\\&-\int\eta_\lambda(dx)\lambda P^{\min}(\lambda,x,\cdot)\end{aligned}$$

头一个等式表明 η_λ 是单调降的，第二个等式表明 $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\eta_\lambda=0$. 若还设 $\eta_\lambda\in\mathscr{V}_\lambda$，$\lambda>0$，则因 $P^{\min}(\lambda,x,\cdot)$ 满足 (F_n)，可见对每 $A\in\mathscr{E}$，我们有

$$\lambda\eta_\lambda(A)-\nu\eta_\nu(A)$$
$$=\sum_n[\lambda\eta_\lambda(A\cap E_n)-\nu\eta_\nu(A\cap E_n)]$$
$$=\sum_n\Big\{\int\eta_\lambda(dx)[q(x,AE_n)-q(x)\delta(x,AE_n)]-$$
$$-\int\eta_\nu(dx)[q(x,AE_n)-q(x)\delta(x,AE_n)]\Big\}$$
$$=\sum_n(\nu-\lambda)\int\eta_\nu(dx)\int P^{\min}(\lambda,x,dy)[q(y,AE_n)-$$
$$-q(y)\delta(y,AE_n)]$$

(由(3.1.12))

$$=(\nu-\lambda)\sum_n\eta_\nu(dx)[\lambda P^{\min}(\lambda,x,AE_n)-\delta(x,AE_n)]$$
$$=(\lambda-\nu)\int\eta_\nu(dx)[\delta(x,A)-\lambda P^{\min}(\lambda,x,A)].$$

这便得到（3.1.11）的第二个等式．对换 λ 和 ν，便得第一个等式． ∎

(3.1.13) **定理** 取测度协调族 $\{\overline{\eta_\lambda}\in\mathscr{V}_\lambda;\ \lambda>0\}$ 和满足

$$\int w(dx)P^{\min}(\lambda,x,E)<\infty,\ \lambda>0$$

的 $w\in\overline{\mathscr{L}}_+$，并命

$$\eta_\lambda=\int w(dx)P^{\min}(\lambda,x,\cdot)+\overline{\eta_\lambda}\ ,\ \lambda>0,$$

那么

$$(3.1.14)\qquad P(\lambda,x,A)\equiv P^{\min}(\lambda,x,A)+\frac{z(\lambda,x)\eta_\lambda(A)}{c+\lambda\eta_\lambda(E)},$$
$$\lambda>0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E}.$$

是一个跳过程，它是一个 q 过程当且仅当下述条件之一成立：

（i）$q(x)-q(x,A)$ 是保守的；

（ii）$w=0$；

(iii) $w(E)=\infty$;

(iv) $\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\overline{\eta_\lambda}(E)=\infty$.

证 (*a*) 首先，我们指出如下一些简单事实：如果 (i) 成立，则由 $\{\eta_\lambda: \lambda>0\}$ 是测度的协调族（引理 (3.1.3)）和定理 (2.6.4) 知断言已真。以下无妨设 $q(x)-q(x,A)$ 非保守。此时定理 (2.6.4) 的证明依然表明 (3.1.14) 定义了一个跳过程。这便证得第一项断言。

(*b*) 由于 $P^{\min}(\lambda,x,A)$ 是一个 q 过程，这样，由定理 (2.4.6) 知，(3.1.14) 所定义的 $P(\lambda,x,A)$ 成为 q 过程的充要条件是

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^2 z(\lambda,x)\eta_\lambda(E)/(c+\lambda\eta_\lambda(E))=0,$$

$$x\in E,\ A\in\mathscr{E}\cap E_n,\ n\geqslant 1.$$

(*c*) 注意当 $\lambda\uparrow\infty$ 时，$\lambda P^{\min}(\lambda,x,E)\uparrow 1$，$x\in E$。可见

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int w(dx)\lambda P^{\min}(\lambda,x,E)=w(E).$$

另一方面，由 (3.1.11) 可见，

$$\lambda\overline{\eta_\lambda}(E)\uparrow,\quad 当\ \lambda\uparrow$$

于是

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\eta_\lambda(E)=w(E)+\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\overline{\eta_\lambda}(E).$$

如果 $\lim_{\lambda\to\infty}\overline{\eta_\lambda}(E)+w(E)=0$，则由前一式子可见 $w=\overline{\eta_\lambda}=0$，从而 $\eta_\lambda=0$，$\lambda>0$。进而

$$P(\lambda,x,A)\equiv P^{\min}(\lambda,x,A),$$

此时引理是平凡的。故以下可设

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\overline{\eta_\lambda}(E)+w(E)\neq 0.$$

(*d*) 由于

$$\lim_{\lambda\to\infty}z(\lambda,x)=\lim_{\lambda\to\infty}[1-\lambda P^{\min}(\lambda,x,E)]=0,\ x\in E.$$

考虑到 $z(\lambda,\cdot)$ 满足方程 (2.5.14)，便得

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda z(\lambda,x)=q(x)-q(x,E),\quad x\in E.$$

(*e*) 固定 $\nu_0>0$. 对每 $\varepsilon>0$ 和每 $A\in\mathscr{E}\cap E_n$, $n\geqslant1$, 存在 $N=N(\nu_0,\varepsilon,A)$, 使得

$$\sum_{m=N+1}^{\infty}\int_{E_m}\eta_{\nu_0}(dx)q(x,A)<\varepsilon.$$

于是, 由 (3.1.10) 知, 只要 $\nu\geqslant\nu_0$, 就有

$$\int\eta_\nu(dx)q(x,A)\leqslant\sum_{m=1}^{N}\int_{E_m}\eta_\nu(dx)q(x,A)+\varepsilon.$$

由此及 (3.1.10) 知

(3.1.14) $$\lim_{\nu\to\infty}\int\eta_\nu(dx)q(x,A)=0,\quad A\in\mathscr{E}\cap E_n,\ n\geqslant1.$$

因此, 由引理 (3.1.3), (3.1.6) 和 (3.1.10) 得

$$\begin{aligned}\lim_{\nu\to\infty}\nu\eta_\nu(A)&=w(A)+\lim_{\nu\to\infty}\int\eta_\nu(dx)[q(x,A)-q(x)\delta(x,A)]\\&=w(A),\qquad A\in\mathscr{E}\cap E_n,\ n\geqslant1.\end{aligned}$$

(*f*) 由 (*d*), (*e*) 和 (*c*), 我们得到

$$\begin{aligned}&\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^2 z(\lambda,x)\eta_\lambda(A)/(c+\lambda\eta_\lambda(E))\\&=[q(x)-q(x,E)]w(A)/[c+w(E)+\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\overline{\eta_\lambda}(E)].\end{aligned}$$

由此及 (*a*), (*b*) 和 (*c*), 可见 $P(\lambda,x,A)$ 是 q 过程当且仅当条件 (i) — (iv) 之一成立。 ∎

现在, 我们可以给出本节的主要定理.

(3.1.15) **定理** F_q 过程唯一的充要条件是最小 q 过程不断或者 $\dim\mathscr{V}=0$.

证 先证充分性, 如最小 q 过程不断, 则结论显然. 否则, 必有异于 $P^{\min}(\lambda,x,A)$ 的 F_q 过程 $P(\lambda,x,A)$ 存在. 从而

$$0\neq P(\lambda,x,\cdot)-P^{\min}(\lambda,x,\cdot)\in\mathscr{V}_\lambda$$

这矛盾于 $\dim\mathscr{V}_\lambda=\dim\mathscr{V}=0$.

再证必要性. 设最小 q 过程中断且 $\dim\mathscr{V}\neq0$. 固定 $\lambda_0>0$ 并取 $\eta_{\lambda_0}\in\mathscr{V}_{\lambda_0}-\{0\}$, 然后命

$$\overline{\eta_\lambda}=\int\eta_{\lambda_0}(dx)R(\lambda_0,\lambda;x,\cdot).$$

则由引理(2.5.10). (ii)知$\{\overline{\eta_\lambda}\in\mathscr{V}_\lambda:\ \lambda>0\}$是协调的，在定理(3.1.13)中取$w=0$, $c=0$, 由于$z(\lambda,\cdot)\neq 0$(由(2.5.17)),我们便得到一个与最小q过程不同的满足方程(F_λ)的q过程.故F_q过程非唯一. ∎

§3.2 唯一性准则及其应用

下面是q过程的一般的唯一性准则.

(3.2.1) **定理** 给定q对$q(x)-q(x,A)$. q过程唯一的充要条件是下述三条均满足：

(i) 存在$\lambda>0$(从而对一切$\lambda>0$),

$$\inf_{x\in\dot{E}} P^{\min}(\lambda,x,E)>0,$$

此处

$$\dot{E}=\{x\in E:\ q(x,E)<q(x)\};$$

(ii) $\dim\mathscr{U}=0$;

(iii) $q(x)-q(x,A)$保守，或者它虽非保守但

$$\dim\mathscr{V}=0.$$

我们将在§3.4中证明这一定理. 本节先介绍它的一些应用.

(3.2.2) **推论** 如果$q(x,E)=0$, $x\in E$. 则q过程唯一的充要条件是 $\sup\limits_{x\in E} q(x)<\infty$.

证 易见$\dim\mathscr{U}=\dim\mathscr{V}=0$且$\dot{E}=E$. 又因

$$P^{\min}(\lambda,x,A)=\delta(x,A)/(\lambda+q(x))$$

可见

$$0<\inf_{x\in E} P^{\min}(\lambda,x,E)\iff\sup_{x\in E} q(x)<\infty.$$

为讨论有界q对情形，我们需要如下事实：

(3.2.3) **引理** 如$\eta_\lambda \in \mathscr{V}_\lambda - \{0\}$，则

$$\int \eta_\lambda(dx) q(x,E) = \infty.$$

特别地，若 $\sup\limits_{x \in E} q(x,E) < \infty$，则 $\dim \mathscr{V} = 0$.

证 只需证前一断言. 由 $\eta_\lambda \in \mathscr{V}_\lambda = \mathscr{V}_\lambda'$ 得

$$\int \eta_\lambda(dx)(\lambda + q(x))\delta(x,\cdot) = \int \eta_\lambda(dx) q(x,\cdot),$$

特别地

$$\lambda \eta_\lambda(E) + \int \eta_\lambda(dx) q(x) = \int \eta_\lambda(dx) q(x,E).$$

如果结论不真，则由 $\eta_\lambda(E) > 0$ 及上式得

$$0 \leqslant \int \eta_\lambda(dx)[q(x) - q(x,E)] = -\lambda \eta_\lambda(E) < 0,$$

这就导致矛盾. ▌

下述结果是推论 (2.3.6) 的改进.

(3.2.4) **定理** 若 q 对有界，则 q 过程唯一.

证 (a) 记 $c = \sup\limits_{x \in E} q(x) < \infty$. 若 $f_\lambda \in \mathscr{U}_\lambda$，则

$$f_\lambda(x) = \int \frac{q(x,dy)}{\lambda + q(x)} f_\lambda(y) \leqslant \left(\sup_x f_\lambda(x)\right) \frac{q(x,E)}{\lambda + q(x)}$$

$$\leqslant \frac{c}{\lambda + c} \sup_x f_\lambda(x), \quad x \in E.$$

可见

$$\sup_x f_\lambda(x) \leqslant \frac{c}{\lambda + c} \sup_x f_\lambda(x),$$

从而 $f_\lambda = 0$. 故 $\dim \mathscr{U} = 0$.

如果 q 对保守，则 $\dot{E} \neq \phi$，可见 (3.2.1) 的条件均满足. 于是，我们也得到推论 (2.3.6) .

(b) 由定理 (2.2.5) 和定理 (2.1.12) 知，$\lambda P^{\min}(\lambda, \cdot, E)$ 是方程

$$\xi(\lambda, \cdot) = \int \frac{q(\cdot, dy)}{\lambda + q(\cdot)} \xi(\lambda, y) + \frac{\lambda}{\lambda + q(\cdot)}$$

的最小解，可见

$$\inf_{x\in \dot{E}} \lambda P^{\min}(\lambda, x, E) \geqslant \inf_{x\in E} \lambda P^{\min}(\lambda, x, E) \geqslant \inf_{x\in E} \frac{\lambda}{\lambda+q(x)}$$

$$\geqslant \frac{\lambda}{\lambda+c} > 0,$$

从而（3.2.1）的条件（i）满足。

最后，由（a）、（b）和引理（3.2.3）立知（3.2.1）的条件全部满足，故本定理得证。 ▌

作为（3.2.1）的直接推论，我们有

（3.2.5）**推论** 若 $\dot{E}$ 是有限集，则 q 过程唯一的充要条件是 B_q 过程和 F_q 过程均唯一。

（3.2.6）**注** 定理（2.3.7）可由定理（3.2.1）导出，事实上，由于 q 保守，q 过程唯一当且仅当 $\dim\mathscr{U}=0$。然而，$\dim\mathscr{U}=0$ 等价于最小解不断。那里，我们以证明最小解不断的方式来达到唯一性。这里，我们企图说明，我们可对偶地证明 $\dim\mathscr{U}=0$。

首先，相应最小解的比较定理，我们有

（3.2.7）**比较引理** 设 $\overline{f}$ 是方程

$$(3.2.8)\qquad \begin{cases} f=\int \pi_1(\cdot, dy) f(y)+g_1, \\ 0\leqslant f\leqslant 1, \quad f\in \mathscr{E} \end{cases}$$

的最大解，而 $\widetilde{f}$ 是方程

$$(3.2.9)\qquad \begin{cases} f\leqslant \int \pi_2(\cdot, dy) f(y)+g_2, \\ 0\leqslant f\leqslant 1, \ f\in \mathscr{E}. \end{cases}$$

的任一解，此处 $g_i\in \mathscr{E}_i, \pi_i(\cdot, E)+g_i\leqslant 1$, $i=1,2$; $\pi_1\geqslant \pi_2$, $g_1\geqslant g_2$（逐元）. 那么 $\widetilde{f}\leqslant \overline{f}$. 进而，两个方程同时有或同时无非零解。

证 使用归纳法，只需注意方程（3.2.8）的最大解可用如

下方式得到：命

$$f^{(0)}=1,$$

$$f^{(n+1)}=\int\pi_1(\cdot,dy)f^{(n)}(y)+g_1\quad,\ n\geqslant 0,$$

则$f^{(n)}\downarrow\overline{f}$，当$n\uparrow\infty$. ∎

让我们回到(2.3.7)的证明. 命$z_n(\lambda,\cdot)=1-\lambda P^{\min}(\lambda,\cdot,\mathbf{E}_n)$，则$z_n(\lambda,\cdot)$是方程

$$\begin{cases}\xi(\lambda,\cdot)=\int\dfrac{q(\cdot,dy)}{\lambda+q(\cdot)}\xi(\lambda,y)+\dfrac{\lambda\delta(\cdot,E_n^c)}{\lambda+q(\cdot)},\\ 0\leqslant\xi(\lambda,\cdot)\leqslant 1.\end{cases}$$

的最大解. 同样地，$\widetilde{z}_n(\lambda,\cdot)\equiv 1-\lambda P_n(\lambda,\cdot,E_n)$（记号见（2.3.7））是方程

$$\begin{cases}\xi(\lambda,\cdot)=\int\dfrac{q_n(\cdot,dy)}{\lambda+q_n(\cdot)}\xi(\lambda,y)+\dfrac{\lambda\delta(\cdot,E_n^c)}{\lambda+q_n(\cdot)},\\ 0\leqslant\xi(\lambda,\cdot)\leqslant 1.\end{cases}$$

的最大解. 利用引理（3.2.7）的证法易见

$$z_n(\lambda,\cdot)\leqslant\widetilde{z}_n(\lambda,\cdot).$$

另一方面，如（2.3.7）所证

$$\begin{aligned}&P_n(\lambda,x,E_n^c)\\ &\leqslant\frac{1}{\inf\limits_{Z\in E_n}\varphi(z)}\int P_n(\lambda,x,dy)\varphi(y)\\ &\leqslant\quad\varphi(x)/(\inf_{Z\overline{\in}E_n}\ \varphi(z)(\lambda-c_+))\end{aligned}$$

最后，

$$\begin{aligned}z(\lambda,x)&=\lim_{n\to\infty}z_n(\lambda,x)\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\widetilde{z}_n(\lambda,x)\\ &=\overline{\lim_{n\to\infty}}\ P_n(\lambda,x,E_n^c)=0.\end{aligned}$$ ∎

下面考虑马链情形. 取

$$E=\{0,1,2,\cdots\}\equiv\mathbf{Z}_+.$$

(3.2.10) **定理** 设 $Q=(q_{ij}: i,j\in\mathbf{Z}_+)$ 是一个保守的Q矩阵，满足

$$q_{ij}=0,\quad \text{如 } j>i+1,\quad i,j\in\mathbf{Z}_+.$$

$$q_{i,i+1}>0,\ i\in\mathbf{Z}_+.$$

那么，Q过程唯一的充要条件是

$$(3.2.11)\qquad R\equiv\sum_{k=0}^{\infty} m_k=\infty.$$

此处

$$(3.2.12)\qquad \begin{cases} m_k=\sum_{i=0}^{k} F_k^{(i)}/q_{i,i+1}, & k\in\mathbf{Z}_+,\\ F_k^{(k)}=1,\ F_k^{(i)}=\sum_{j=i}^{k-1} q_k^{(j)}F_j^{(i)}/q_{k,k+1}, & \\ \qquad 0\leqslant i<k,\ k\in\mathbf{Z}_+, & \\ q_k^{(i)}=\sum_{j=0}^{i} q_{kj},\ 0\leqslant i<k,\ k\in\mathbf{Z}_+. & \end{cases}$$

证 分三步完成，先证

(*a*) 对每 $\lambda>0$，方程

$$(3.2.13)\qquad (\lambda+q_i)u_i=\sum_{j\neq i} q_{ij}u_j,\ u_0=1,\ i\in\mathbf{Z}_+$$

的每一个解 (u_i) 都是单调上升的。

事实上，方程 (3.2.13) 的解 (u_i) 就是

$$(3.2.14)\qquad u_0=1,\ u_{i+1}=\left[(\lambda+q_i)u_i-\sum_{j=0}^{i-1} q_{ij}u_j\right]/q_{i,i+1},\quad i\geqslant 0.$$

从而有

$$(3.2.15)\qquad u_{i+1}-u_i=\left[\sum_{j=0}^{i-1} q_{ij}(u_i-u_j)+\lambda u_i\right]/q_{i\,i+1},\ i\in\mathbf{Z}_+$$

然后由归纳法立得上述断言。

(*b*) 试证上述的 (u_i) 满足

$$(3.2.16)\qquad \lambda u_0 m_k \leqslant u_{k+1} - u_k \leqslant (u_1 - u_0) F_k^{(0)} + \lambda u_k m_k,\quad k \geqslant 0.$$

当 $k=0$ 时，由于

$$u_1 - u_0 = \lambda u_0 / q_{01} = \lambda u_0 m_0.$$

可见上式成立．假设对 $k<n$ 已真，那么，利用恒等式

$$(3.2.17)\qquad \sum_{i=0}^{k-1} q_{ki}(u_k - u_i) = \sum_{i=0}^{k-1} q_k^{(i)}(u_{i+1} - u_i),\quad k \geqslant 0,$$

(3.2.15) 和 (3.2.12)，以及 (a) 便得

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \left[\sum_{k=0}^{n-1} q_n^{(k)}(u_{k+1} - u_k) + \lambda u_n\right] / q_{n,n+1} \\
&\leqslant \left[\sum_{k=0}^{n-1} q_n^{(k)}((u_1 - u_0) F_k^{(0)} + \lambda u_k m_k) + \lambda u_n\right] / q_{n,n+1} \\
&\leqslant \left[(u_1 - u_0)\sum_{k=0}^{n-1} q_n^{(k)} F_k^{(0)} + \lambda u_n \left(\sum_{k=0}^{n-1} q_n^{(k)} m_k + 1\right)\right] / q_{n,n+1} \\
&= (u_1 - u_0) F_n^{(0)} + \lambda u_n \left[\sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=j}^{n-1} q_n^{(k)} F_k^{(j)} / q_{j,j+1} + F_n^{(n)}\right] / q_{n,n+1} \\
&= (u_1 - u_0) F_n^{(0)} + \lambda u_n \left[\sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{k=j}^{n-1} q_n^{(k)} F_k^{(j)} / q_{n,n+1}\right) / q_{j,j+1} \right. \\
&\qquad \left. + F_n^{(n)} / q_{n,n+1}\right] \\
&= (u_1 - u_0) F_n^{(0)} + \lambda u_n \left[\sum_{j=0}^{n-1} F_n^{(j)} / q_{j,j+1} + F_n^{(n)} / q_{n,n+1}\right] \\
&= (u_1 - u_0) F_n^{(0)} + \lambda u_n m_n
\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &\geqslant \left[\sum_{k=0}^{n-1} q_n^{(k)} (\lambda u_0 m_k) + \lambda u_n\right] / q_{n,n+1} \geqslant \\
&\geqslant \lambda u_0 \left(\sum_{k=0}^{n-1} q_n^{(k)} m_k + 1\right) / q_{n,n+1} = \lambda u_0 m_n.
\end{aligned}$$

于是由归纳法得（3.2.16）．

(c) 试证：Q过程唯一当且仅当$R=\infty$。

首先注意，Q过程唯一当且仅当方程（3.2.13）没有有界的非零解．这样，我们只需证明后者等价于$R=\infty$。今设$R<\infty$，而(u_i)是由（3.2.14）所构造的解．由（3.2.16）和（3.2.12）得

$$\begin{aligned}0\leqslant u_{k+1}u_k^{-1}-1&\leqslant(u_1-u_0)u_k^{-1}F_k^{(0)}+\lambda m_k\\&\leqslant(u_1-u_0)(F_k^{(0)}/q_{01})q_{01}+\lambda m_k\\&\leqslant[\lambda+(u_1-u_0)q_{01}]m_k.\end{aligned}$$

由于$\sum\limits_{k=0}^{\infty}m_k=R<\infty$，可见对于足够大的$k$，有

$u_{k+1}u_k^{-1}-1<1/2$，进而$\log(u_{k+1}\ u_k^{-1})\leqslant2\cdot(u_{k+1}u_k^{-1}-1)$，因而存在$C<\infty$使

$$\log u_k=\sum_{i=0}^{k-1}\log(u_{i+1}u_i^{-1})\leqslant CR<\infty,$$

故$u_k\uparrow u_\infty<\infty$．即方程(3.2.13)有有界非零解。

反之，若（3.2.13）有有界非零解，仍然记作(u_i)。那么，由（3.2.16）得

$$\begin{aligned}R=\sum_{k=0}^{\infty}m_k&\leqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1}-u_k)/\lambda\\&\leqslant\lim_{n\to\infty}u_n/\lambda=u_\infty/\lambda<\infty.\end{aligned}$$ ▮

我们注意，若把$q_{01}>0$换成$q_{01}=0$，则$\dim\mathscr{U}=0$当且仅当方程

$$(\lambda+q_i)u_i=\sum_{j\neq i}q_{ij}u_j,\quad 0\leqslant u_i\leqslant1,\quad i\in Z^+-\{0\}\text{只有零解．}$$

因此，若在（3.2.12）中把0换成1，把Z_+换成$Z_+-\{0\}$，并定义相应的$R'=\sum\limits_{k=1}^{\infty}m_k$。那么，我们便得到

(3.2.18) 推论 在（3.2.10）中，换$q_{01}>0$为$q_{01}=0$．那

么，Q 过程唯一的充要条件是 $R'=\infty$。

(3.2.19) **定义** 称 $Q=(q_{ij})$ 为生灭 Q 矩阵（保守），如 $q_{i,i+1}=b_i>0$，$q_{i,i-1}=a_i>0$；$q_{ij}=0$，如 $|i-j|\geqslant 2$。相应的过程称为生灭过程。

(3.2.20) **定理** 生灭过程唯一的充要条件是

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k}\frac{a_k\cdots a_{i+1}}{b_k\cdots b_{i+1}b_i}=\infty.$$

证 由 (3.2.10) 立得。 ▌

定理 (3.2.10) 是一个很好的结果，因为它是可计算的。可惜象这样完美的结果，已知的并不多。就说二维情形，即 $E=Z_+^2$，要判断一个 Q 矩阵是否是零流出的，也是不容易的。在本节的余下部分，我们将使用化高维为一维的思想，给出 Q 过程唯一性的充分条件。

(3.2.21) **定理** 设 E 为任一可数集。$Q=(q(x,y)：x,y\in E)$ 为保守 Q 矩阵。再设存在 E 的可数划分 $\{E_k\}_0^\infty$，使 $\sum_{k=0}^{\infty}E_k=E$ 且满足条件：

(3.2.22) 若 $q(x,y)>0$ 且 $x\in E_k$，则 $y\in\sum_{l=0}^{k+1}E_l$，$k=0,1,\cdots$

(3.2.23) $C_k=\sup\{q(x)：x\in E_k\}<\infty$，$k=0,1,\cdots$。

定义保守 Q 矩阵 $(q_{ij}：i,j\in Z_+)$ 如次：

$$(3.2.24)\qquad q_{ij}=\begin{cases}\sup\left\{\sum_{y\in E_j}q(x,y)：x\in E_i\right\}, & j=i+1,\\ \inf\left\{\sum_{y\in E_j}q(x,y)：x\in E_i\right\}, & j<i,\\ 0, & i\neq j \text{ 的其它情形。}\end{cases}$$

如果 (q_{ij}) 过程唯一（当 $q_{i,i+1}>0$ 时，即由 (3.2.11) 定义的 $R=\infty$），则 $(q(x,y))$ 过程也唯一。

证[*] 由定理（3.2.1），我们只需证明对每 $\lambda>0$，方程

(3.2.25) $$\begin{cases}(\lambda+q(x))u(x)=\sum_{y\neq x}q(x,y)u(y),\\ 0\leqslant u(x)\leqslant 1,\ x\in E\end{cases}$$

只有零解. 反证之，设对某 $\lambda>0$，方程（3.2.25）有非零解 $\{u(x):x\in E\}$. 命

(3.2.26) $$u_k=\sup\{u(x):x\in E_k\},\ k=0,1,\cdots$$

则 $(u_k:k\geqslant 0)$ 非零，对每 $k\geqslant 0$，选 $\varepsilon_k>0$ 和 $x^{(x)}\in E_k$ 使

(3.2.27) $$\varepsilon_k(\lambda+C_k)<\lambda/2,\ u(x^{(k)})>(1-\varepsilon_k)u_k.$$

用 $x^{(k)}$ 代替（3.2.25）中的 x，并使用（3.2.22），（3.2.23），（3.2.26）和（3.2.27）得

$$\lambda u_k/2+\left[\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{y\in E_j}q(x^{(k)},y)+\sum_{y\in E_k-\{x^{(k)}\}}q(x^{(k)},y)\right.$$
$$\left.+\sum_{y\in E_{k+1}}q(x^{(k)},y)\right]u_k$$
$$\leqslant u_k(\lambda-\varepsilon_k(\lambda+C_k))+q(x^{(k)})u_k$$
$$\leqslant(\lambda+q(x^{(k)}))(1-\varepsilon_k)u_k\leqslant(\lambda+q(x^{(k)}))u(x^{(k)})$$
$$=\sum_{y\neq x^{(k)}}q(x^{(k)},y)u(y)\leqslant\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{y\in E_j}q(x^{(k)},y)u_j+$$
$$+\sum_{y\in E_k-\{x^{(k)}\}}q(x^{(k)},y)u_k+\sum_{y\in E_{k+1}}q(x^{(k)},y)u_{k+1}.$$

即

(3,2,28) $$\lambda u_k/2+\sum_{j=0}^{k-1}\Big(\sum_{y\in E_j}q(x^{(k)},y)\Big)(u_k-u_j)$$
$$\leqslant\sum_{y\in E_{k+1}}q(x^{(k)},y)(u_{k+1}-u_k).$$

---

[*]）另一证法见(3. 5. 2)

由于 $u_k \geqslant 0$，$\sum_{y \in E_{k \pm 1}} q(x^{(k)}, y) \geqslant 0$，故由此式及归纳法易证 $u_k \uparrow$，$k \uparrow$。因而，由上式及（3.2.24）立得

$$\lambda u_k/2 + \sum_{j=0}^{k-1} q_{kj}(u_k - u_j) \leqslant q_{k,\ k+1}(u_{k+1} - u_k)$$

或

$$(\lambda/2 + q_k) u_k \leqslant \sum_{j \neq k} q_{kj} u_j, \quad 0 \leqslant u_k \leqslant 1, \quad k \geqslant 0.$$

故由引理（3.2.7）知，(q_{ij}) 过程非唯一。这与所设矛盾。】

在结束本节的时候，我们要给出四个例子。我们总设 S 有限，状态空间为 $E = \boldsymbol{Z}_+^S$。记

$$|x| = \sum_{u \in S} x(u), \quad x \in E.$$

若取 $E_k = \{x \in E: |x| = k\}$，$k \geqslant 0$，那么，使用定理（3.2.21），不难验证相应的 Q 过程都是唯一的。我们把验证的细节留给读者。

（3.2.29）　**单物种自催化模型：**

$$\mathrm{A} + X \xrightarrow{\lambda_1} 2X, \quad X + X \xrightarrow{\lambda_2} \mathrm{B}$$

这里有两个反应式。第一个反应式说的是：在参数 λ_1 之下，一个 X 粒子与一个 A 粒子生成一个新的 X 粒子；第二个反应式说的是：在参数 λ_2 之下，每两个 X 粒子相遇，两个都死去而产生一个 B 粒子。我们所关心的是 X 粒子的个数。A 和 B 是参加反应的反应物，在反应中保证持续地供给。

上面是在每一个小盒子 $u \in S$ 里的反应情况。然而，小盒子之间可以有相互扩散。例如说，X 粒子以 $p(u, v)$ 的速率从 u 跑到 v。

现在，已经不难写出这个模型的 Q 矩阵：

$$
(3.2.30)\qquad q(x,y)=\begin{cases}\lambda_1 a(u)x(u), & y=x+e_u,\\ \lambda_2\binom{x(u)}{2}, & y=x-2e_u,\\ x(u)p(u,v), & y=x-e_u+e_v,\\ & u\neq v,\\ 0, & y\neq x \text{ 的其它情形.}\end{cases}
$$

$$
q(x)=-q(x,x)=\sum_{y\neq x}q(x,y),\quad x\in \mathbf{Z}_+^S.
$$

此处 λ_1,λ_2，$a(u)$为正常数；$x(u)$表在 $u\in S$ 中 X 的粒子数；e_u 表在 u 处为 1，其它地方为 0 的 $\mathbf{Z}_+^S$中的单位向量、矩阵 $(p(u,v):u,v\in S)$ 非负．不妨设 $\sum_v p(u,u)\leqslant C<\infty$，$u\in S$.

在以下模型中，我们使用类似的记号。

(3.2.31) **Schlögl 模型**

$$
A+2X \underset{\lambda_2}{\overset{\lambda_1}{\rightleftarrows}} 3X,\qquad X \underset{\lambda_4}{\overset{\lambda_3}{\rightleftarrows}} B
$$

其 Q 矩阵为：

$$
(3.2.32)\qquad q(x,y)=\begin{cases}\lambda_1 a(u)\binom{x(u)}{2}+\lambda_4 b(u), & y=x+e_u\\ \lambda_2\binom{x(u)}{3}+\lambda_3 x(u), & y=x-e_u\\ x(u)p(u,v), & y=x-e_u+e_v,\ u\neq v\\ 0, & y\neq x \text{ 的其它情形}\end{cases}
$$

$$
q(x)=\sum_{y\neq x}q(x,y),\qquad x\in\mathbf{Z}_+^S.
$$

(3.2.33) **Lotka-Volterra 模型**

$$
A+X_1\xrightarrow{\lambda_1}2X_1,\ X_1+X_2\xrightarrow{\lambda_2}2X_2,
$$

$$
B+X_2\xrightarrow{\lambda_3}D+B,
$$

此时状态空间是 $E=(\mathbf{Z}_+^2)^S=\mathbf{Z}_+^{2S}$．在 $u\in S$，X_i 的粒子数记作 $x_i(u)$．当然，

$$|x| = \sum_{u \in S} (x_1(u) + x_2(u)) .$$

X_i从 u 跑到 v 的速率是 $p_i(u,v)$。那么，这个模型的 Q 矩阵为：

$$(3.2.34) \qquad q(x,y) = \begin{cases} \lambda_1 a(u) x_1(u), & y = x + e_{u1}, \\ \lambda_3 b(u) x_2(u), & y = x - e_{u2}, \\ \lambda_2 x_1(u) x_2(u), & y = x - e_{u1} + e_{u2}, \\ x_i(u) p_i(u,v), & y = x - e_{ui} + e_{vi}, \\ & i = 1, 2,\ u \neq v, \\ 0, & y \neq x \text{ 的其它情形}. \end{cases}$$

$$q(x) = \sum_{y \neq x} q(x,y), \quad x \in (\boldsymbol{Z}_+^2)^S.$$

此处 $e_{ui}(v,j) = 1$，如 $v = u$ 且 $j = i$；否则为 0。

(3.2.35) **Brusseltor 模型**

$$A \xrightarrow{\lambda_1} X_1, \quad B + X_1 \xrightarrow{\lambda_2} X_2 + D,$$

$$2X_1 + X_2 \xrightarrow{\lambda_3} 3X_1 \quad X_1 \xrightarrow{\lambda_4} C$$

其状态空间仍然是 $(\boldsymbol{Z}_+^2)^S$. 它的 Q 矩阵为：

$$(3.2.36) \qquad q(x,y) = \begin{cases} \lambda_1 a(u), & y = x + e_{u1}, \\ \lambda_4 x_1(u), & y = x - e_{u1}, \\ \lambda_2 b(u) x_1(u), & y = x - e_{u1} + e_{u2}, \\ \lambda_3 \binom{x_1(u)}{2} x_2(u), & y = x - e_{u2} + e_{u1}, \\ x_i(u) p_i(u,v), & y = x - e_{ui} + e_{vi}, \\ & i = 1,\ 2,\ u \neq v, \\ 0, & \text{其它的 } y \neq x. \end{cases}$$

$$q(x) = \sum_{y \neq x} q(x,y), \quad x \in (\boldsymbol{Z}_+^2)^S.$$

§3.3 若干引理

本节是为下一节证明本章的主要定理作准备的。

(3.3.1) **引理** 为使

$$c(\lambda)\equiv\inf_{x\in E} P^{\min}(\lambda,x,E)=0$$

对某 $\lambda>0$ 成立，充要条件是存在 $w\in\overline{\mathscr{L}}_+$，使

$$w(E_n)<\infty,\ n\geqslant 1,\ w(E)=\infty$$

而且

$$0<\int w(dx)P^{\min}(\lambda,x,E)<\infty,\ \lambda>0.$$

证 充分性是因

$$\infty>\int w(dx)P^{\min}(\lambda,x,E)\geqslant c(\lambda)w(E).$$

往证必要性。假定 $c(\lambda)=0$，则存在自然数的一个无穷子集$\boldsymbol{N}_0$，使得

$$\sum_{n\in N_0}\inf_{x\in E_n} P^{\min}(\lambda,x,E)<\infty.$$

进而，我们可选取子列$\{x_n\in E_n: n\in\boldsymbol{N}_0\}$，使

$$0<\sum_{n\in N_0}P^{\min}(\lambda,x_n,E)<\infty.$$

对于 $n\notin\boldsymbol{N}_0$，任取 $x_n\in E_n$，并置

$$w(\{x_n\})=\begin{cases}1, & 如\ \ n\in\boldsymbol{N}_0,\\ 0, & 如\ \ n\notin\boldsymbol{N}_0.\end{cases}$$

$$w(A)=\sum_{n\in N_0}w(A\cap\{x_n\}),\ A\in\mathscr{E},$$

则

$$w(E_n)=w(\{x_n\})\leqslant 1,\quad w(E)=\sum_n w(\{x_n\})=\infty$$

而且

$$0<\int w(dx)P^{\min}(\lambda, x, E)=\sum_{n\in N_0}P^{\min}(\lambda, x_m, E)<\infty. \quad ▌$$

(3.3.2) **引理** 如果对某 $\lambda>0$,

$$\inf_{x\in E} P^{\min}(\lambda, x, E)>0$$

则 $\dim \mathscr{U}=0$.

证 由定理 (2.2.5) 和定理 (2.1.18) 立见. ▌

(3.3.3) **引理**

(i) 如 $f\in{}_r\mathscr{E}$ 且

$$\int P^{\min}(\lambda, \cdot, dy)f(y)=0,$$

则 $f=0$;

(ii) 如 $\varphi\in\mathscr{L}$ 且

$$\int\varphi(dx)P^{\min}(\lambda, x, A)=0, A\in\mathscr{E}\cap E_n,\ n\geqslant1,$$

则 $\varphi=0$.

证 由方程 (B_λ) 可见

$$f=\int\delta(\cdot, dy)f(y)=(\lambda+q(\cdot))\int P^{\min}(\lambda, \cdot, dy)f(y)$$

$$-\int q(\cdot, dy)\int P^{\min}(\lambda, y, dz)f(z)=0.$$

从而 (i) 得证.

往证 (ii). 设 $\varphi^{\pm}$ 是 φ 的 Hahn 分解. 由假设,

$$\int\varphi^+(dx)P^{\min}(\lambda, x, A)=\int\varphi^-(dx)P^{\min}(\lambda, x, A),$$

$$A\in\mathscr{E}\cap E_n,\ n\geqslant1.$$

于是, 由单调类定理立知

$$\int\varphi^+(dx)\int P^{\min}(\lambda, x, dy)f(y)$$

$$=\int\varphi^-(dx)\int P^{\min}(\lambda, x, dy)f(y)$$

对一切 $f\in{}_b\mathscr{E}$ 成立。进而，对于 $f\in\mathscr{E}$，只要上式一方存在，则另一方也存在且相等。使用方程 (F_n)，便得

$$\begin{aligned}\varphi^+(A) &= \sum_n\int\varphi^+(dx)\delta(x,A)\\ &= \sum_n\int\varphi^+(dx)\int P^{\min}(\lambda,x,dy)[(\lambda+q(y))\delta(y,\\ &\qquad AE_n)-q(y,AE_n)]\\ &= \sum_n\int\varphi^-(dx)\int P^{\min}(\lambda,x,dy)[(\lambda+\\ &\qquad +q(y))\delta(y,AE_n)-q(y,AE_n)]\\ &= \varphi^-(A),\quad A\in\mathscr{E},\end{aligned}$$

从而由 $\varphi\in\mathscr{L}$ 立知 $\varphi=0$. ▌

(3.3.4) **引理** 设 G 为 $(E,\mathscr{E})$ 上的一个可测核，$0\leqslant G\leqslant 1$；$g\in{}_b\mathscr{E}_+$ 而 f^* 是方程

$$f=\int G(\cdot,dy)f+g$$

的最小解。若置 $D=\{x\in E:\ g(x)>0\}$，则

$$\sup_{x\in E} f^*(x)=\sup_{x\in D}f^*(x).$$

证 如常，令 $f^{(1)}=g$,

$$f^{(n+1)}=\int G(\cdot,dy)f^{(n)}(y)+g,\quad n\geqslant 1,$$

则

$$f^{(1)}(x)=g(x)\leqslant\sup_{y\in D}g(y)=\sup_{y\in D}f^{(1)}(y)\leqslant\sup_{y\in D}f^*(y),\quad x\in E,$$

若设

$$f^{(n)}(x)\leqslant\sup_{y\in D}f^*(y),\quad x\in E,$$

则当 $x\in E-D$ 时

$$f^{(n+1)}(x)=\int G(x,dy)f^{(n)}(y)+g(x)$$

$$= \int G(x,dy) f^{(n)}(y)$$
$$\leqslant \sup_{y\in D} f^{*}(y)\ G(x,E)$$
$$\leqslant \sup_{y\in D} f^{*}(y).$$

当 $x\in D$ 时，$f^{(n+1)}(x)\leqslant f^{*}(x)\leqslant \sup\limits_{y\in D} f^{*}(y)$ 更应成立。故由归纳法立得所欲证者。 ▮

(3.3.5) **引理** 如 $\dim\mathscr{U}=0$，则

$$\inf_{x\in E} P^{\min}(\lambda,x,E)=\inf_{x\in E} P^{\min}(\lambda,x,E).$$

证 我们已知，$z(\lambda,\cdot)$ 是方程

$$\begin{cases}\xi(\lambda,\cdot)=\displaystyle\int\frac{q(\cdot,dy)}{\lambda+q(\cdot)}\xi(\lambda,y)+\frac{q(\cdot)-q(\cdot,E)}{\lambda+q(\cdot)},\\ 0\leqslant\xi(\lambda,\cdot)\leqslant 1.\end{cases}$$

的最大解. 但由 $\dim\mathscr{U}=0$ 易见 $z(\lambda,\cdot)$ 也是此方程的最小解. 故由引理 (3.3.4) 导出我们所需的结论. ▮

§3.4 唯一性准则的证明

本节的目的是证明定理 (3.2.1)．下述定理是唯一性准则的另一种形式. 一旦证得此定理，便可立即得到 (3.2.1)．

(3.4.1) **定理** 给定 q 对 $q(x)-q(x,A)$，则 q 过程唯一的充要条件是下述两条件同时满足：

(i) 存在 $\lambda>0$ 使 $c(\lambda)\equiv\inf\limits_{x\in E} P^{\min}(\lambda,x,E)>0$;

(ii) F_q 过程唯一.

证 必要性. 条件 (ii) 显然是必要的. 如果条件 (i) 不满足，则最小 q 过程中断. 此时，依引理 (3.3.1)，我们可以构造出一个 $w\in\overline{\mathscr{L}_+}$，它满足 (3.1.13) 的假设. 在 (3.1.14) 中取 $c=0$，我们便得到一些不中断的 q 过程 (依赖于 $\overline{\eta_\lambda}$ 的选择). 这样，q 过程非唯一.

往证充分性．无妨设最小 q 过程中断，并设 $P(\lambda,x,A)$ 是任一 q 过程．记

$$(3.4.2)\quad \Psi(\lambda,x,A)=P(\lambda,x,A)-P^{\min}(\lambda,x,A),\quad \lambda>0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E}.$$

由于 $P^{\min}(\lambda,x,A)$ 满足 (F_n) 和定理（2.2.4），我们有

$$\lambda\Psi(\lambda,x,A)\geqslant\int\Psi(\lambda,x,dy)[q(y,A)-q(y)\delta(y,A)],$$

$$\lambda>0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E}\cap E_n,\ n\geqslant 1.$$

这样，

$$u(\lambda,x,A)\equiv\int\Psi(\lambda,x,dy)[(\lambda+q(y))\delta(y,A)-q(y,A)]\geqslant 0,$$

$$\lambda>0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E}\cap E_n,\ n\geqslant 1.$$

利用条件（ii），定理（3.1.15）和引理（2.5.8）．（ii）得

$$\Psi(\lambda,x,A)=\int u(\lambda,x,dy)P^{\min}(\lambda,y,A),$$

$$\lambda>0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E}.$$

由此及（3.4.2）得

$$(3.4.3)\quad P(\lambda,x,A)=P^{\min}(\lambda,x,A)+\int u(\lambda,x,dy)P^{\min}(\lambda,y,A).\quad \lambda>0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E}.$$

于是

$$\lambda\int u(\lambda,x,dy)P^{\min}(\lambda,y,E)\leqslant\lambda P(\lambda,x,E)\leqslant 1,$$

$$\lambda>0,\ x\in E.$$

再由条件（i）及引理（2.4.1）得

$$1\leqslant c^{-1}(\lambda)P^{\min}(\lambda,x,E),\ \lambda>0,\ x\in E.$$

综合上述两个事实，便得

$$(3.4.4)\quad \lambda u(\lambda,x,E)\leqslant\lambda\int u(\lambda,x,dy)c^{-1}(\lambda)P^{\min}(\lambda,y,E)$$

$$\leqslant c^{-1}(\lambda),\ \lambda>0,\ x\in E.$$

可见，对每 $\lambda>0$，$u(\lambda,\cdot,\cdot)$ 是 $(E,\ \mathscr{E})$ 上的一个有界可测核．另一方面，由于 $P(\lambda,x,A)$ 和 $P^{\min}(\lambda,x,A)$ 都满足预解方程，故由（3.4.3）得

$$\int[u(\lambda,x,dy)-u(\mu,x,dy)+(\lambda-\mu)\int P^{\min}(\lambda,x,dz)$$

$$\times u(\mu,z,dy)+(\lambda-\mu)\int u(\lambda,x,dz)\int P^{\min}(\lambda,z,dz')$$

$$\times u(\mu,z',dy)]P^{\min}(\mu,x,A)=0,$$

$$\lambda,\mu>0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E}.$$

由此及（3.4.4），（3.3.3）．（ii），我们得到

$$(3.4.5)\quad u(\lambda,x,A)-u(\mu,x,A)+$$

$$+(\lambda-\mu)\int P^{\min}(\lambda,x,dy)u(\mu,y,A)+$$

$$+(\lambda-\mu)\int u(\lambda,x,dy)\int P^{\min}(\lambda,y,dz)u(\mu,z,A)$$

$$=0,$$

$$\lambda,\mu>0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E}.$$

利用（3.4.4），我们可将（3.4.5）改写成

$$(3.4.6)\quad u(\mu,x,A)+(\mu-\lambda)\int P^{\min}(\lambda,x,dy)u(\mu,y,A)$$

$$=u(\lambda,x,A)+(\lambda-\mu)\int u(\lambda,x,dy)\int P^{\min}(\lambda,y,$$

$$dz)u(\mu,z,A),$$

$$\lambda,\mu>0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E}.$$

如果 $\lambda\geqslant\mu$，则上式右方显然非负，因而

$$u(\mu,x,A)\geqslant(\lambda-\mu)\int P^{\min}(\lambda,x,dy)u(\mu,y,A),$$

进而

$$(3.4.7)\quad \mu u(\mu,x,A)\geqslant(1-\mu\lambda^{-1})\lambda[\lambda\int P^{\min}(\lambda,x,dy)-$$

$$-\delta(x,dy)]u(\mu,y,A), \qquad \lambda\geqslant\mu$$

注意 $P^{\min}(\lambda,x,A)$ 满足方程（B_λ），从而由定理（1.2.25）和引理（1.4.1）．（Ⅴ）之证知

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda[\lambda P^{\min}(\lambda,x,A)-\delta(x,A)]=q(x,A)-q(x)\delta(x,A),$$
$$x\in E,\ A\in\mathscr{E}$$

这样，若在（3,4,7）的右方命 $\lambda\to\infty$，便得

$$\mu u(\mu,x,A)\geqslant\int[q(x,dy)-q(x)\delta(x,A)]u(\mu,y,A),$$

此步用到（3.4.4）和定理（1.2.24）．于是，我们可命

$$(3.4.8)\qquad V(\mu,x,A)\equiv\int[(\mu+q(x))\delta(x,dy)-q(x,dy)]u(\mu,y,A)\geqslant0,$$
$$\mu>0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E}.$$

另一方面，由条件（i）和引理（3.3.2），我们知道 $\dim\mathscr{U}=0$，因而由引理（2.5.8）（i）得

$$(3.4.9)\qquad u(\mu,x,A)=\int P^{\min}(\mu,x,dy)V(\mu,y,A).$$
$$\mu>0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E}.$$

代入（3.4.3），便得

$$(3.4.10)\qquad P(\lambda,x,A)=P^{\min}(\lambda,x,A)+\int P^{\min}(\lambda,x,dy)\times\int V(\lambda,y,dz)P^{\min}(\lambda,z,A),$$
$$\lambda>0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E}.$$

另一方面，将（3.4.9）代入（3.4.5），我们得到

$$\int P^{\min}(\lambda,x,dy)[V(\lambda,y,A)-V(\mu,y,A)+(\lambda-\mu)\times\int V(\lambda,y,dz)\int P^{\min}(\lambda,z,dz')\int P^{\min}(\mu,z',dz'')V(\mu,z'',A)]=0,$$
$$\lambda,\mu>0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E}.$$

由（3.3.3）（i）得

$$
(3.4.11)\quad \begin{aligned} & V(\lambda,y,A)-V(\mu,y,A)+(\lambda-\mu)\int V(\lambda,y,dz) \\ & \times\int P^{\min}(\lambda,z,dz')\int P^{\min}(\mu,z',dz'')V(\mu,z'',A) \\ & =0, \end{aligned}
$$

因此，由预解方程可见

$$
(3.4.12)\quad \begin{aligned} & V(\lambda,x,A)-V(\mu,x,A) \\ & +\int V(\lambda,x,dy)[P^{\min}(\mu,y,dz) \\ & -P^{\min}(\lambda,y,dz)]V(\mu,z,A)=0, \\ & \lambda,\mu>0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E}. \end{aligned}
$$

现在，我们来证明如下两件事实：

$$
(3.4.13)\quad \int V(\lambda,x,dy)\int P^{\min}(\lambda,y,dz)V(\mu,z,E)<\infty,
$$

$$
(3.4.14)\quad \int V(\lambda,x,dy)\int P^{\min}(\mu,y,dz)V(\mu,z,E)<\infty.
$$

由（3.4.4）和（3.4.8）知

$$
V(\lambda,x,E)<\infty,\ x\in E,\ \lambda>0.
$$

然而

$$
\int P^{\min}(\mu,x,dy)V(\mu,y,E)=u(\mu,x,E)=(\mu c(\mu))^{-1},
$$

从而

$$
(3.4.15)\quad \begin{aligned} & \int V(\lambda,x,dy)\int P^{\min}(\mu,y,dz)V(\mu,z,E) \\ & \leqslant\mu^{-1}c(\mu)^{-1}V(\lambda,x,E)<\infty. \end{aligned}
$$

此即是（3.4.14）。再则，由预解方程和（3.4.11）可见

$$
(3.4.16)\quad P^{\min}(\lambda,x,A)\downarrow;\ V(\lambda,x,A)\downarrow,\ 当\lambda\uparrow.
$$

因此，若$\lambda\leqslant\mu$，则由（3.4.14）得

$$
\int V(\lambda,x,dy)\int P^{\min}(\lambda,y,dz)V(\mu,z,E)
$$

$$\leqslant \int V(\lambda, x, dy) \int p^{\min}(\lambda, y, dz) V(\lambda, z, E) < \infty$$

同样地，若 $\lambda > \mu$，则

$$\int V(\lambda, x, dy) \int P^{\min}(\lambda, y, dz) V(\mu, z, E)$$

$$\leqslant \int V(\mu, x, dy) \int P^{\min}(\mu, y, dz) V(\mu, z, E) < \infty.$$

综合上述两种情况，便得（3.4.13）.

现在，让我们回到主要证明. 由（3.4.10）和 q 条件得

$$0 = \lim_{\lambda \to \infty} \lambda^2 [P(\lambda, x, A) - P^{\min}(\lambda, x, A)]$$

$$= \lim_{\lambda \to \infty} \lambda^2 \int P^{\min}(\lambda, x, dy) \int V(\lambda, y, dz) P^{\min}(\lambda, z, A),$$

$$x \in E, \quad A \in \mathscr{E} \cap E_n, \quad n \geqslant 1,$$

但

$$\lambda^2 \int P^{\min}(\lambda, x, dy) \int V(\lambda, y, dz) P^{\min}(\lambda, z, E_n)$$

$$\geqslant \lambda P^{\min}(\lambda, x, \{x\}) \int V(\lambda, x, dy) \lambda P^{\min}(\lambda, y, E_n)$$

于是有

$$(3.4.17) \quad \lim_{\lambda \to \infty} \int V(\lambda, x, dy) \lambda P^{\min}(\lambda, y, E_n) = 0.$$

$$x \in E, \quad n \geqslant 1.$$

另一方面，由（3.4.16）和定理（1.2.24）（i），

$$\varphi(x, \cdot) \equiv \lim_{\lambda \to \infty} V(\lambda, x, \cdot) \in \mathscr{L}_+$$

于是由（3.4.17）和定理（1.2.24）（ii），（iii）得

$$\varphi(x, E_n) = \lim_{\lambda \to \infty} \int \varphi(x, dy) \lambda P^{\min}(\lambda, y, E_n)$$

$$= \lim_{\lambda \to \infty} \int V(\lambda, x, dy) \lambda P^{\min}(\lambda, y, E_n) = 0$$

$$x \in E, \quad n \geqslant 1.$$

从而

$$V(\lambda,\cdot,E)\downarrow\varphi(\cdot,E)=\sum_n\varphi(\cdot,E_n)=0,\ \lambda\uparrow\infty.$$

由此及（3.4.15）得

$$0=\lim_{\lambda\to\infty}\int V(\lambda,x,dy)\int P^{\min}(\mu,y,dz)V(\mu,z,E)$$

$$\geqslant\overline{\lim_{\lambda\to\infty}}\int V(\lambda,x,dy)\int P^{\min}(\lambda,y,dz)V(\mu,z,E)$$

在（3.4.12）中令 $\lambda\to\infty$，得

$$V(\mu,\cdot,E)=0,\ \mu>0.$$

代入（3.4.10），得

$$P(\lambda,x,A)=P^{\min}(\lambda,x,A)$$

$$\lambda>0,x\in E,A\in\mathscr{E}$$

这就完成了定理的证明. ▌

（3.4.18） **定理**（3.2.1）**之证** 只需使用（3.4.1），（3.1.2），（3.1.15），（3.3.2）和（3.3.5）.

§3.5 补充与注记

我们已经得到了 q 过程的唯一性准则，它是全稳定情形最一般的准则. 所有条件都只依赖于 q 对及由 q 对完全决定的最小 q 过程. 可以说，我们所期望的只能如此. 而且，我们已经看到，在许多情况下它是十分有效的。另一方面，我们也已经指出，有时候，还是不容易验证，因此，针对各种具体情况，给出更具体的判准或较好的充分条件，也是一件有益的工作 .

下面，我们对定理（2.3.7）再作些讨论.

（3.5.1）注 若(3.2.10)中的 Q 过程唯一,则定理(2.3.7)的假设满足. 换言之，对这种 Q 过程，（2.3.7）的假设是必要的. 事实上，若这种 Q 过程唯一，则由 $\dim\mathscr{U}=0$ 立知方程（3.2.13）没有有界解. 然而，方程（3.2.13）的解唯一，它由（3.

2.14）递推地给出，而且对固定的 $\lambda>0$，方程（3.2.13）的解是单调上升的。这样，若过程唯一，就有

$$u_i \uparrow u_\infty = \infty, \text{ 当 } i \uparrow \infty.$$

今固定 $\lambda = \lambda_0 > 0$，并记它相应的解为 $(u_i : i \in E)$ 。在(2.3.7)中，取 $E_n = \{0, 1, \cdots, n\}$，$c = \lambda_0$，$\psi_i = u_i$，$i \in E$。则容易检查（2.3.7）的条件满足。

上述证明还可以一般化，设$\dim \mathscr{U} = 0$。那么，方程

$$(\lambda + q(x))\xi(\lambda, x) = \int q(x, dy)\xi(\lambda, y),$$

$$\lambda > 0, \ x \in E$$

的非负、非零有限解，只要存在，必定无界。因此，我们可取 $\varphi(x) = \xi(\lambda, x)$（无妨固定 λ），使得

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \infty, \quad \{x_n\} \subset E$$

且

$$\int q(x, dy)\varphi(y) \leqslant (\lambda + q(x))\varphi(x), \ x \in E.$$

这样，从某种意义上讲定理(2.3.7)实质上是$\dim \mathscr{U} = 0$的另一种描述方式。虽然一般地说，（2.3.7）不如“$\dim \mathscr{U} = 0$”的判准优越。因为它没有明确地给出 φ，而最大解有迭代解法。然而，它还是有用的。例如说，基于上述想法，我们可以给出定理（3.2.21）的另一证明。

（3.5.2）　定理（3.2.21）（$q_{i,i+1}>0$情形）的另一证明．

固定 $\lambda>0$。设 (u_i) 是方程（3.2.13)的唯一解。则由(q_{ij})过程的唯一性知 $u_i \uparrow \infty$，$i \uparrow \infty$。今取 $\varphi(x) = u_i$，如 $x \in E_i$，$i \geqslant 0$。则由（3.2.21）的假设知

$$\sum_{y \neq x} q(x, y)\varphi(y)$$

$$= \sum_{j=0}^{k+1} \sum_{y \in E_j} q(x, y) u_j + \sum_{y \in E_{k\pm 1}} q(x, y) u_{k+1}$$

$$+\sum_{y\in E_{k}-\{x\}} q(x,y)u_k$$

$$=\sum_{j=0}^{k-1}\Big(\sum_{y\in E_j} q(x,y)\Big)(u_j-u_k)+\sum_{y\in E_{k+1}} q(x,y)$$

$$\times(u_{k+1}-u_k)+q(x)u_k$$

$$\leqslant\sum_{j=0}^{k-1} q_{kj}(u_j-u_k)+q_{kk+1}(u_{k+1}-u_k)+q(x)u_k$$

$$\leqslant(\lambda+q(x))u_k=(\lambda+q(x))\varphi(x),\quad x\in E_k,\quad k\geqslant 0.$$

由此及假设条件易见 $(\varphi(x):\ x\in E)$ 满足（2.3.7）的假设，故 $(q(x,y):\ x,y\in E)$ 过程唯一. ∎

对于多维 Q 过程，（2.3.7）的下述简单推论也是有用的.

（3.5.3）推论 设 $E=\mathbf{Z}_+^S$，S 有限. 记

$$|x|=\sum_{u\in S}x(u)$$

若存在 $C\in R$，使

$$(3.5.4)\qquad \sum_{y\neq x}q(x,y)(|y|-|x|)\leqslant C(1+|x|),\quad x\in E$$

则Q 过程唯一.

证 只需在(2.3.7)中取 $E_n=\{x\in E:\ |x|\leqslant n\}$，$\varphi(x)=1+|x|$，$x\in E$，并使用这里的 C. ∎

这个推论也适用于 §3.2 的四种模型.

对于马链情形，定理（3.1.15）属于Reuter[4]. 定理（3.2.1）和定理（3.4.1）属于侯振挺［1］. 稍后，Reuter[5] 给出侯振挺定理的较为简单的证明. 这里的证法与后者相近.

定理（3.2.10）张建康［1］曾用概率方法得到. 这里的简单证明及定理（3.2.21）均取自严士健、陈木法［2］. §3.2中的四种模型是严士健、李占柄［1］研究过的.

抽象空间 q 过程的唯一性准则属于陈木法，郑小谷［1］. 除了上面指出的而外，本章的结果均取自陈、郑［1］. 只是关于

(2.3.7) 的讨论是新的.

关于唯一性准则更多的应用，尤其是非保守情形的应用请看侯振挺 [2] 第八章.

第四章　q过程的定性理论

在实际中，我们往往关心某一种特殊类型的 q 过程，例如说不断 q 过程．物理学上常关心满足柯氏向前方程（又称 Fokker－Planck 方程）的 q 过程．后面我们将看到，可配称 q过程或者同时满足、或者同时不满足柯氏向后、向前方程（见§7.3）．这样，自然关心各类 q 过程的存在唯一性问题．按照 q 过程是否中断、是否满足柯氏向后、向前方程，我们可以把一切 q 过程分为 22 种类型（不包括专论中断的类型）．所谓 q过程的定性理论，就是解决各种类型的 q 过程的存在、唯一性以及它的个数的各种可能性．这里，"定性"是相对于"定量"而言的，它指出各种可能性而不是如§2.6 那样给出定量的构造，即全部构造．

§4.1　结果的陈述

本节将描述定性理论，其证明将在余下各节逐步完成．

我们需要用到 $(E,\mathscr{E})$ 的如下扩充：

任取 $\triangle\notin E$，并记 $E_\triangle=E\cup\{\triangle\}$，$\mathscr{E}_\triangle=\sigma(\mathscr{E}\cup\{\triangle\})$．再命

$$(4.1.1)\quad \begin{cases} q_\triangle(\triangle)=0,\ q_\triangle(x)=q(x), x\in E,\\ q_\triangle(x,A)=I_E(x)[q(x,A-\{\triangle\})+I_A(\triangle)\times\\ [q(x)-q(x,E)]], x\in E_\triangle, A\in\mathscr{E}_\triangle. \end{cases}$$

那么，$q_\triangle(x)-q_\triangle(x,A)\ (x\in E_\triangle, A\in\mathscr{E}_\triangle)$是保守 q 对，记它所决定的最小 q 过程为 $P_\triangle^{\min}(\lambda,x,A)$．

（4.1.2）**引理**　对每$\lambda>0, x\in E$ 和 $A\in\mathscr{E}$，我们有

$$P_\triangle^{\min}(\lambda,x,A)=P^{\min}(\lambda,x,A).$$

证 由 $\lambda P_{\triangle}^{\min}(\lambda,\triangle,\{\triangle\})=1 \quad (\lambda>0)$,

$$P_{\triangle}^{\min}(\lambda,x,A)=\int_{E_\triangle}\frac{q_\triangle(x,dy)}{\lambda+q_\triangle(x)}P_{\triangle}^{\min}(\lambda,y,A)+\frac{\delta(x,A)}{\lambda+q_\triangle(x)}$$

$$=\int_E\frac{q(x,dy)}{\lambda+q(x)}P_{\triangle}^{\min}(\lambda,y,A)+\frac{\delta(x,A)}{\lambda+q(x)}$$

$$+\frac{q(x,\{\triangle\})}{\lambda+q(x)}P_{\triangle}^{\min}(\lambda,\triangle,A)$$

$$=\int_E\frac{q(x,dy)}{\lambda+q(x)}P_{\triangle}^{\min}(\lambda,y,A)+\frac{\delta(x,A)}{\lambda+q(x)},$$

$$x\in E,\ A\in\mathscr{E}$$

及最小解的典型解法立得.

相应于 $\mathscr{V}_\lambda(\lambda>0)$ 我们可定义

$$\mathscr{V}_\lambda^\triangle=\left\{\eta_\lambda^\triangle\in\mathscr{L}_*(\mathscr{E}_\triangle):\ \eta_\lambda^\triangle=\int_{E_\triangle}\eta_\lambda^\triangle(dx)\int_{\cdot}\frac{\delta_\triangle(x,dy)}{\lambda+q_\triangle(y)}\right\},$$

$$\lambda>0.$$

我们还要用到 $\mathscr{V}_\lambda$ 的如下子空间

$$\overline{\mathscr{V}}_\lambda=\left\{\eta_\lambda\in\mathscr{V}_\lambda:\ \int\eta_\lambda(dx)[q(x)-q(x,E)]<\infty\right\}$$

(4.1.3) **引理** 对每 $\lambda>0$, $\overline{\mathscr{V}}_\lambda$ 与 $\mathscr{V}_\lambda^\triangle$ 是一一对应的, 进而, 对于某 $\eta_\lambda\in\overline{\mathscr{V}}_\lambda$, 定义

$$\eta_\mu=\int\eta_\lambda(dx)R(\lambda,\mu;x,\cdot),\ \mu>0,$$

则 $\eta_\mu\in\overline{\mathscr{V}}_\mu$. 从而 $\mathscr{V}_\lambda=\overline{\mathscr{V}}_\lambda$ 对一切 $\lambda>0$ 同时成立或同时不成立. 特别地, $\dim\overline{\mathscr{V}}_\lambda$ 与 $\lambda>0$ 无关, 记作 $\dim\overline{\mathscr{V}}$. 我们有 $\dim\overline{\mathscr{V}}=\dim\mathscr{V}^\triangle$.

证 先设 $\eta_\lambda^\triangle\in\mathscr{V}_\lambda^\triangle$, 记 η_λ 为 $\eta_\lambda^\triangle$ 在 E 上的限制, 那么, 由

$$\eta_\lambda(A)=\eta_\lambda^\triangle(A)=\int_{E_\triangle}\eta_\lambda^\triangle(dx)\int_A\frac{q_\triangle(x,dy)}{\lambda+q_\triangle(y)}$$

$$=\int_E\eta_\lambda(dx)\int_A\frac{q(x,dy)}{\lambda+q(y)},\ A\in\mathscr{E}$$

及

$$\infty > \eta_\lambda^\Delta(\{\triangle\}) = \int_{E_\Delta} \eta_\lambda^\Delta(dx)\ \frac{q_\Delta(x,\{\triangle\})}{\lambda + q_\Delta(x)}$$

$$= \lambda^{-1}\int_E \eta_\lambda^\Delta(dx) q_\Delta(x,\{\triangle\})$$

$$= \lambda^{-1}\int \eta_\lambda(dx)[q(x) - q(x,E)].$$

知 $\eta_\lambda \in \overline{\mathscr{V}}_\lambda$. 反之，如 $\eta_\lambda \in \overline{\mathscr{V}}_\lambda$，则命

$$(4.1.4)\quad \eta_\lambda^\Delta(A) = \eta_\lambda(A - \{\triangle\}) + \lambda^{-1} I_A(\triangle)\int_E \eta_\lambda(dx)$$

$$\times[q(x) - q(x,E)],\ A \in \mathscr{E}_\Delta.$$

我们看到 $\eta_\lambda^\Delta \in \mathscr{V}_\lambda^\Delta$. 这便证得第一项断言. 由此对应关系立知 $\eta_\lambda = 0$ 当且仅当 $\eta_\lambda^\Delta = 0$。可见$\dim\overline{\mathscr{V}}_\lambda = \dim\mathscr{V}_\lambda^\Delta$ 与 $\lambda > 0$ 无关（利用定理（2.5.11）. 事实上，对任给的 $\lambda > 0$ 和 $\eta_\lambda \in \overline{\mathscr{V}}_\lambda$，命相应的 $\mathscr{V}_\lambda^\Delta$ 元素为 η_λ^Δ，再命

$$\eta_\mu^\Delta = \int \eta_\lambda^\Delta(dx) R_\Delta(\lambda,\mu;x,\cdot),\ \mu > 0.$$

并记 η_λ^Δ 在 E 上的限制为 $\widetilde{\eta}_\mu$. 由（2.5.10），（ii）知$\eta_\lambda^\Delta \in \mathscr{V}_\mu^\Delta$，从而依上面所证，$\widetilde{\eta}_\mu \in \overline{\mathscr{V}}_\mu$. 然而

$$\widetilde{\eta}_\mu(A) = \eta_\mu^\Delta(A) = \int \eta_\lambda^\Delta(dx) R(\lambda,\mu;x,A)$$

$$= \eta_\lambda^\Delta(A) + (\lambda - \mu)\int \eta_\lambda^\Delta(dx) P_\Delta^{\min}(\mu,x,A)$$

$$= \eta_\lambda(A) + \int \eta_\lambda(dx) P_\Delta^{\min}(\mu,x,A) + \eta_\lambda^\Delta(\{\triangle\}) P_\Delta^{\min}(\mu,\triangle,A)$$

$$= \eta_\lambda(A) + \int \eta_\lambda(dx) P^{\min}(\mu,x,A)\quad (\text{由}(4.1.2))$$

$= \eta_\mu(A)$，$A \in \mathscr{E}$，$\mu > 0$. ∎

为简化陈述，我们使用如下代码：

G：一般的，

B：满足方程（B_λ）

F：满足方程（F_λ）

N：不中断

和

C：保守

P：正条件 $\inf\limits_{\lambda\in E} P^{\min}(\lambda,x,E)>0, \lambda>0$.

以及关联词

∪：或者，

上横（—）：非

但我们略去"∩：并且"不写．它们的顺序自然是先"非"，次"并且"，然后"或者"．例如说，$N(\overline{B}\cup\overline{F})$ 表示不中断的、不满足向后方程或者不满足向前方程的 q 过程．

让我们再回顾一下几种等价条件：

(4.1.5) $\inf\limits_{\lambda\in E} P^{\min}(\lambda,x,E)>0$ 当且仅当：P 成立且 $\dim\mathscr{U}=0$（见(3.3.2) 和 (3.3.4)）．

(4.1.6) $\dim\mathscr{V}=0$ 当且仅当

$$\eta_\lambda\in\mathscr{V}_\lambda \Longrightarrow \int\eta_\lambda(dx)q(x,E)<\infty \quad (见(3.2.3))．$$

以后（见(4.3.23)），我们也将证明：

(4.1.7) **引理** 在条件 P和 $\dim\mathscr{U}=0$ 之下，对每 $\eta_\lambda\in\mathscr{V}_\lambda$，

$$(4.1.8)\qquad \int\eta_\lambda(dx)[q(x)-q(x,E)]=\infty$$

当且仅当

$$(4.1.9)\qquad \lim_{\mu\to\infty}\mu\eta_\mu(E)=\infty,$$

此处

$$(4.1.10)\qquad \eta_\mu\equiv\int\eta_\lambda(dx)R(\lambda,\mu;x,\cdot)\ ,\ \mu>0.$$

最后，由引理 (4.1.3)知，条件"$\mathscr{V}_\lambda=\overline{\mathscr{V}}_\lambda$"等价于条件"$\dim\mathscr{V}=\dim\overline{\mathscr{V}}$"，与 $\lambda>0$ 无关．从而也可以写成 $\mathscr{V}=\overline{\mathscr{V}}$．

类　　型	个数	充　分　必　要　条　件
G	1	$[C\cup P(\dim\mathscr{V}=0)](\dim\mathscr{U}=0)$
	∞	$\overline{C}(\dim\mathscr{V}>0)\cup\overline{P}\cup(\dim\mathscr{U}>0)$
BUF	1	$[C\cup(\dim\mathscr{V}=0)](\dim\mathscr{U}=0)$
	∞	$\overline{C}(\dim\mathscr{V}=0)\cup(\dim\mathscr{U}>0)$
B	1	$\dim\mathscr{U}=0$
	∞	$\dim\mathscr{U}>0$
F	1	$C(\dim\mathscr{U}=0)\cup(\dim\mathscr{V}=0)$
	∞	$[\overline{C}\cup(\dim\mathscr{U}>0)](\dim\mathscr{V}>0)$
BF	1	$\dim\mathscr{U}=0)\cup(\dim\overline{\mathscr{V}}=0)$
	∞	$(\dim\mathscr{U}>0)(\dim\overline{\mathscr{V}}>0)$
$\overline{B}\cup\overline{F}$	0	$[C\cup P(\dim\mathscr{V}=0)](\dim\mathscr{U}=0)$
	∞	$\overline{C}\ [\overline{P}\cup(\dim\mathscr{V}>0)]\cup(\dim\mathscr{U}>0)$
$\overline{B}$	0	$C\cup P(\dim\mathscr{U}=\dim\mathscr{V}=0)$
	∞	$\overline{C}\ [\overline{P}\cup(\dim\mathscr{U}>0)]\cup(\dim\mathscr{V}>0)]$
$\overline{B}F$	0	$C\cup(\dim\mathscr{V}=0)$
	∞	$\overline{C}(\dim\mathscr{V}>0)$
$\overline{F}$	0	$[C\cup P(\mathscr{V}=\overline{\mathscr{V}})](\dim\mathscr{U}=0)$
	∞	$\overline{C}\ [\overline{P}(\mathscr{V}\cup\mathscr{V})]\cup(\dim\mathscr{U}>0)$
$B\overline{F}$	0	$\dim\mathscr{U}=0$
	∞	$\dim\mathscr{U}>0$
$\overline{B}\overline{F}$	0	$C\cup P(\mathscr{V}=\overline{\mathscr{V}})(\dim\mathscr{U}=0)$
	∞	$\overline{C}\ [\overline{P}\cup(\mathscr{V}\neq\overline{\mathscr{V}})\cup(\dim\mathscr{U}>0)]$

1

类　　型	个数	充　分　必　要　条　件
NG	0	$\overline{C}P(\dim\mathscr{U}=\dim\mathscr{V}=0)$
	1	$[C\cup P(\dim\mathscr{V}=\dim\mathscr{V}=1)](\dim\mathscr{U}=0)$
	∞	$(\dim\mathscr{U}>0)\cup\overline{C}\ [\overline{P}\cup(\dim\mathscr{V}=1)\cup(\dim\mathscr{V}=1\neq\dim\overline{\mathscr{V}})$
$N(B\cup F)$	0	$\overline{C}(\dim\mathscr{V}=0)$
	1	$C(\dim\mathscr{U}=0)\cup\overline{C}\ (\dim\mathscr{V}=1)$
	∞	$C(\dim\mathscr{U}>0)\cup\overline{C}\ (\dim\mathscr{V}>1)$
NB	0	$\overline{C}$
	1	$C(\dim\mathscr{U}=0)$
	∞	$C(\dim\mathscr{U}>0)$
NF	0	$[C(\dim\mathscr{U}>0)\cup\overline{C}](\dim\mathscr{V}=0)$
	1	$C(\dim\mathscr{U}=0)\cup(\dim\mathscr{V}=1)$
	∞	$[C(\dim\mathscr{U}>0)\cup\overline{C}](\dim\mathscr{V}>1)$
NBF	0	$\overline{C}\cup(\dim\mathscr{U}>0)(\dim\mathscr{V}=0)$
	1	$C[(\dim\mathscr{U}=0)\cup(\dim\mathscr{V}=1)]$
	∞	$C(\dim\mathscr{U}>0)(\dim\mathscr{V}>1)$
$N(\overline{B}\cup\overline{F})$	0	$[\overline{C}\cup P(\dim\mathscr{V}=0)](\dim\mathscr{U}=0)$
	1	$\overline{C}P(\dim\mathscr{V}=\dim\mathscr{V}=1)(\dim\mathscr{U}=0)$
	∞	$\overline{C}\ [\overline{P}\cup(\mathscr{V}\neq\overline{\mathscr{V}})\cup(\dim\mathscr{U}>0)\cup(\dim\mathscr{V}>1)$

2

类　　型	个数	充　分　必　要　条　件
$N\overline{B}$	0	$C\cup P(\dim\mathscr{U}=\dim\mathscr{V}=0)$
	1	$\overline{C}P(\dim\mathscr{U}=0)(\dim\mathscr{V}=\dim\overline{\mathscr{V}}=1)$
	∞	$\overline{C}\ [\overline{P}\cup(\mathscr{V}\neq\overline{\mathscr{V}})\cup(\dim\mathscr{U}>0)\cup(\dim\mathscr{V}>1)]$
$N\overline{B}F$	0	$C\cup(\dim\mathscr{V}=0)$
	1	$\overline{C}\ (\dim\mathscr{V}=0)$
	∞	$\overline{C}\ (\dim\mathscr{V}>1)$
$N\overline{F}$	0	$[C\cup P(\mathscr{V}=\overline{\mathscr{V}})](\dim\mathscr{U}=0)$
	∞	$\overline{C}\ [\overline{P}\cup(\mathscr{V}\neq\overline{\mathscr{V}})]\cup(\dim\mathscr{U}>0)$
$NB\overline{F}$	0	$C(\dim\mathscr{U}=0)\cup\overline{C}$
	∞	$C(\dim\mathscr{U}>0)$
$N\overline{B}\overline{F}$	0	$C\cup P(\mathscr{V}=\overline{\mathscr{V}})(\dim\mathscr{U}=0)$
	=	$\overline{C}\ [\overline{P}\cup(\mathscr{V}\neq\overline{\mathscr{V}})\cup(\dim\mathscr{U}>0)]$

现在，我们把所有的 22 种类型及每种类型 q 过程的可能的个数和相应的判别准则列成以上两个表：表一和表二. 我们用 C、P、$\dim\mathscr{U}$、$\dim\mathscr{V}$ 和 $\dim\overline{\mathscr{V}}$ 这五个条件及其组合表出所有判准. 表一基本上是依条件由弱到强的顺序排列的；表二由表一添加条件 N 得到. 从两个表中可以看出可能的个数的明显的规律性. 此外，型 B 和 $B\overline{F}$ 的两种结果不同，却有相同的条件；型 $\overline{F}$ 和 $N\overline{F}$，型 $\overline{B}\overline{F}$ 和 $N\overline{B}\overline{F}$ 不仅有相同的结果，而且有同样的判准.

§4.2 结果的证明

自本节开始，我们逐步证明上述结果。其中最困难的是 $\overline{B}\,\overline{F}$ 型 q 过程*)，我们将在下一节讨论。本节讨论如下几种类型：

$$B,\ F,\ BF,\ B\cup F,\ G.$$

(4.2.1) **F 型**

因为最小 q 过程是 F 型的，从而 F_q 过程总存在。唯一性见定理 (3.1.15)。反之，如 $C\cup(\dim\mathscr{V}>0)$，则由引理 (3.2.7) 立知 $z(\lambda,\cdot)\neq 0$。又有 $\dim\mathscr{V}>0$ 和引理 (2.5.10)，(ii)知存在协调族 $\{\overline{\eta_\lambda}\in\mathscr{V}_\lambda-\{0\}:\lambda>0\}$。这样，在定理 (3.1.13) 中取 $w=0$，让 C 变动，我们便得到无穷多个 F_q 过程。

为研究 B 型和 BF 型 q 过程，我们还需若干准备。

(4.2.2) **引理** 设 q 对保守且 $\dim\mathscr{V}>0$，则存在无穷多个 NB_q 过程。

证 任取 $y\in E$，并命

$$P_y(\lambda,x,A)=P^{\min}(\lambda,x,A)+z(\lambda,x)\frac{P^{\min}(\lambda,y,A)}{\lambda P^{\min}(\lambda,y,E)},$$

$$\lambda>0,x\in E,A\in\mathscr{E},$$

则由推论(2.6.5)知它是 q 过程，而且是不断的。注意 $z(\lambda,\cdot)\neq 0$，由连续条件易证，对每 $y_1\neq y_2$，当 λ 充分大时 $P_{y_1}(\lambda,\cdot,\{y_1\})\neq P_{y_2}(\lambda,\cdot,\{y_1\})$，可见 $P_{y_1}(\lambda,x,A)$ 是异于 $P_{y_2}(\lambda,x,A)$ 的 q 过程。如果 E 为无穷集，则断言已真。若 E 为有限集，则 q 对有界，从而由 (2.3.6) 和 (2.5.16) 知 $\dim\mathscr{V}=0$。这矛盾于我们的假设。 ▌

下面，我们将把问题归结为 B 型。我们仍然使用上节开头

---

*) 以后也写成 $\overline{BF}_q$ 过程，余类推。

的记号.

(4.2.3) **引理** 每一个 $q_\triangle$ 过程在 $(E,\mathscr{E})$ 上的限制是一个 B_q 过程；每一个 $F_{q_\triangle}$ 过程在 $(E,\mathscr{E})$ 上的限制是一个 BF_q 过程；而且，两个 $F_{q_\triangle}$ 过程相等当且仅当它们有相同的限制.

证 若记 $P(\lambda,x,A)$ 为 $P_\triangle(\lambda,x,A)$ 在 $(E,\mathscr{E})$ 上的限制，则由

$$P(\lambda,x,A)=P_\triangle(\lambda,x,A)=\int_{E_\triangle}\frac{q_\triangle(x,dy)}{\lambda+q_\triangle(x)}P_\triangle(\lambda,y,A)+\frac{\delta(x,A)}{\lambda+q_\triangle(x)}$$

$$=\int\frac{q(x,dy)}{\lambda+q(x)}P(\lambda,y,A)+\frac{\delta(x,A)}{\lambda+q(x)},$$

$$\lambda>0,\ x\in E, A\in\mathscr{E}.$$

及

$$P(\lambda,x,A)-P(\mu,x,A)+(\lambda-\mu)\int P(\lambda,x,dy)P(\mu,y,A)$$

$$=P_\triangle(\lambda,x,A)-P_\triangle(\mu,x,A)+(\lambda-\mu)\int_E P_\triangle(\lambda,x,dy)$$

$$P_\triangle(\mu,y,A)+(\lambda-\mu)P_\triangle(\lambda,x,\{\triangle\})P_\triangle(\mu,\triangle,A)$$

$$=P_\triangle(\lambda,x,A)-P_\triangle(\mu,x,A)+(\lambda-\mu)\int_{E_\triangle}P_\triangle(\lambda,x,dy)$$

$$\cdot P_\triangle(\mu,y,A)$$

$$=0,\qquad \lambda,\mu>0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E}$$

立得第一项断言. 类似地，由

$$P(\lambda,x,A)=P_\triangle(\lambda,x,A)=\int P_\triangle(\lambda,x,dy)\int_A\frac{q_\triangle(y,dz)}{\lambda+q_\triangle(z)}+\frac{\delta(x,A)}{\lambda+q_\triangle(x)}$$

$$=\int P(\lambda,x,dy)\int_A\frac{q(y,dz)}{\lambda+q(z)}+\frac{\delta(x,A)}{\lambda+q(x)},$$

$$\lambda>0,x\in E,A\in\mathscr{E}$$

及前一项断言立得第二项断言。由此及

$$P_{\Delta}(\lambda,\triangle,A)=\lambda^{-1}\delta(\triangle,A),\ \lambda>0,\ A\in\mathscr{E}_{\Delta},$$

$$P_{\Delta}(\lambda,x,\{\triangle\})-\lambda^{-1}\int_{E_{\Delta}}P_{\Delta}(\lambda,x,dy)q_{\Delta}(y,\{\triangle\})$$

$$=\lambda^{-1}\int P(\lambda,x,dy)[q(y)-q(y,E)],\ \lambda>0,x\in E.$$

可见 $P_{\Delta}(\lambda,x,A)$ 由它的限制 $P(\lambda,x,A)$ 完全决定。

(4.2.4) **引理** 每一个 BF_q 过程是某个 $F^{q_{\Delta}}$ 过程在 $(E,\mathscr{E})$ 上的限制。从而 $F^{q_{\Delta}}$ 过程和它的限制是一对的。

证 只需取

$$P_{\Delta}(\lambda,x,A)=I_E(x)[P(\lambda,x,A-\{\triangle\})+I_A(\triangle)\lambda^{-1}\cdot$$

$$\cdot\int P(\lambda,x,dy)d(y)]+\lambda^{-1}I_A(\triangle),$$

$$\lambda>0,x\in E_{\Delta},\ A\in\mathscr{E}_{\Delta}.$$

此处

$$(4.2.5)\qquad d(x)=q(x)-q(x,E),\ x\in E,$$

它是非保守量。这便得到前一断言。然后结合 (4.2.3) 便得后一断言。 ▌

(4.2.6) **引理** 若记

$$\mathscr{U}_{\lambda}^{\Delta}=\{f_{\lambda}^{\Delta}\in{}_b\mathscr{E}_{*}:\ (\lambda+q_{\Delta}(x))f_{\lambda}^{\Delta}(x)=\int_{E_{\Delta}}q_{\Delta}(x,dy)f_{\lambda}^{\Delta}(y),$$

$$x\in E_{\Delta}\},\ \lambda>0$$

则 $\mathscr{U}_{\lambda}$ 与 $\mathscr{U}_{\lambda}^{\Delta}$ 是一一对应的:

$$f_{\lambda}^{\Delta}(x)=f_{\lambda}(x)I_E(x),\ x\in E_{\Delta}.$$

特别地,$\dim\mathscr{U}=\dim\mathscr{U}^{\Delta}$。

证 可直接验证。 ▌

(4.2.8) **B 型**

由于最小 q 过程是 B_q 过程,因而 B_q 过程总存在,唯一性见定理 (3.1.2)。若非唯一且保守,则由引理 (4.2.2) 知必定

有无穷多个. 在非保守情形, $\dim\mathscr{U}^{\Delta}=\dim\mathscr{U}>0$, 从而由引理 (4.2.2) 知, 存在无穷多个 q_{Δ} 过程. 而且它们在 $(E,\mathscr{E})$ 上的限制不同. 进而由引理 (4.2.3) 知存在无穷多个 B_q 过程. ▌

(4.2.7) **BF 型.**

由于最小 q 过程是 BF 型的, 因而 BF_q 过程总存在. 如 $\dim\mathscr{U}=0$, 则 B_q 过程唯一, 从而 BF_q 过程也唯一. 如果 $\dim\overline{\mathscr{V}}=0$ 则由引理 (4.1.3) 知 $\dim\mathscr{V}^{\Delta}=0$, 于是 $F_{q_{\Delta}}$ 过程唯一, 再由引理 (4.2.4) 知 BF_q 过程唯一. 反之, 若 $\dim\mathscr{U}>0$ 且 $\dim\overline{\mathscr{V}}>0$, 则由 (4.1.3) 和 (4.2.6) 知 $\dim\mathscr{U}^{\Delta}>0$ 且 $\dim\mathscr{V}^{\Delta}>0$. 故有无穷多个 $F_{q_{\Delta}}$ 过程. 于是由 (4.2.4) 知有无穷多个 BF_q 过程.

(4.2.9) **B∪F 型.**

只要注意 $B\cup F_q$ 过程总存在, 它唯一的充要条件是 B_q 过程和 F_q 过程同时唯一.

(4.2.10) **G 型.**

存在唯一性前一章已经解决. 我们只需再证, 若非唯一, 则必定有无穷多个. 但我们已证, 若 $\overline{C}$ $(\dim\mathscr{V}>0)$, 则有无穷多个 F_q 过程; 而若 $\dim\mathscr{U}>0$, 有无穷多个 B_q 过程; 从而 q 过程有无穷多个, 因此, 我们只需再证: 若 P 不真, 则有无穷多个 q 过程. 然而, 我们有如下更一般的结果:

(4.2.11) **引理.** 若 q 对非保守且

$$\inf_{x\in B} P^{\min}(\lambda,x,E)=0,\ \lambda>0,$$

则存在无穷多个 $N\,B\overline{F_q}$ 过程; 若 q 对保守且 $\dim\mathscr{U}=0$, 则存在无穷多个 $NB\overline{F_q}$ 过程.

证 由引理 (3.3.1) 和定理 (3.1.13) 知, 存在 $w\in\mathscr{L}_+$, 使

$$w(E_n)<\infty,\ n\geqslant1;\ w(E)=\infty;$$

$$0<\int w(dx)P^{\min}(\lambda,x,E)<\infty,\ \lambda>0$$

且

$$(4.2.12)\quad P(\lambda,x,A)=P^{\min}(\lambda,x,A)+\frac{z(\lambda,x)\int w(dy)P^{\min}(\lambda,y,A)}{\lambda\int w(dy)P^{\min}(\lambda,y,E)},$$

$$\lambda>0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E},$$

是不断的 q 过程. 但由非保守性, $z(\lambda,\cdot)\notin\mathscr{U}_\lambda$, 从而它不是 B_q 过程. 另一方面, 由于 $P^{\min}(\lambda,x,A)$ 是 BF_q 过程, 我们得到

$$\infty>\int w(dx)P^{\min}(\lambda,x,E)\geqslant\int w(dx)(\lambda+q(x))^{-1}>0$$

以及

$$\int\left(\int w(dx)P^{\min}(\lambda,x,dy)\right)\int q(y,dz)/(\lambda+q(z))$$

$$=\int w(dx)P^{\min}(\lambda,x,E)-\int w(dx)/(\lambda+q(x))$$

$$<\int w(dx)P^{\min}(\lambda,x,E).$$

从而

$$P(\lambda,x,E)-P^{\min}(\lambda,x,E)$$

$$>\int[P(\lambda,x,dy)-P^{\min}(\lambda,x,dy)]\int q(y,dz)/(\lambda+q(z)).$$

这说明 $P(\lambda,x,A)$ 也不是 F_q 过程.

现在, 任取 $x_1\in E$, 并命

$$w_n(A)=w(A)+2^{-n}I_A(x_1),A\in\mathscr{E},\ n\geqslant1.$$

用 w_n 代替上述 w, 我们得到一族 $N\,\overline{B\,F_q}$ 过程 $\{P_n(\lambda,x,A):n\geqslant1\}$. 现在, 我们只需再证

$$m\neq n\Longrightarrow P_m(\lambda,x,A)\neq P_n(\lambda,x,A).$$

如若不然, 则由引理 (3.3.2) 及假设知

$$\frac{\int w_m(dx)\,\mathrm{P}^{\min}(\lambda,x,A)}{\int w_m(dx)\,\mathrm{P}^{\min}(\lambda,x,E)}=\frac{\int w_n(dx)\,\mathrm{P}^{\min}(\lambda,x,A)}{\int w_n(dx)\,\mathrm{P}^{\min}(\lambda,x,E)},$$

利用向前方程 (F_n)，即得

$$\frac{w_m(\mathrm{E}_k)}{\int w_m(dx)\,\mathrm{P}^{\min}(\lambda,x,E)}=\frac{w_n(\mathrm{E}_k)}{\int w_n(dx)\,\mathrm{P}^{\min}(\lambda,x,E)},\quad k\geqslant 1$$

特别地

$$w_m(E_k)/w_n(E_k)=\text{常数},\ k\geqslant 1,$$

但 $w_m(E)_1)\neq w_n(E_1)$，$w_m(E_2)=w_n(E_2)$，这便导致矛盾。

至于后一断言，注意由引理 (3.3.2) 知，我们依然有 $\inf\limits_{x\in E}\mathrm{P}^{\min}(\lambda,x,\mathbf{E})=0$. 因此，只需把上述证明中的"但由非保守性，……不是 B_q 过程"换成"由保守性，它是 B_q 过程"，其它地方无需任何改动。 ▌

§4.3 结果的证明（续）

本节证明表一的后六种类型：$\overline{B}\,\overline{F}$，$B\overline{F}$，$\overline{F}$，$\overline{B}F$，$\overline{B}$ 和 $\overline{B}\cup\overline{F}$ 的判准。主要部分是关于 $\overline{B}\,\overline{F}$。

(4.3.1) **引理** 对每个协调族 $\{\eta_\lambda\in\mathscr{V}_\lambda:\lambda>0\}$，我们有

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\eta_\lambda(E)\geqslant\mu\eta_\mu(E)+\int\eta_\mu(dx)d(x)$$

进而，若对于某 $\mu>0$，

$$\int\eta_\mu(dx)d(x)=\infty,$$

则 $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda\eta_\lambda(E)=\infty$。

证 首先，由 (2.4.3) 和引理 (2.5.13) 知

(4.3.2) $\quad z(\lambda,\cdot)\downarrow 0$，当 $\lambda\uparrow\infty$；

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda z(\lambda,x)=d(x),\quad x\in E.$$

另一方面，由（3.1.9）知，

$$\lambda\eta_\lambda(E)\uparrow，\text{当}\ \lambda\uparrow\infty,$$

于是由

$$\lambda\eta_\lambda(E)=\lambda\eta_\mu(E)+(\mu-\lambda)\int\eta_\mu(dx)\lambda P^{\min}(\lambda,x,E)$$

$$=\mu\eta_\mu(E)-\mu\int\eta_\mu(dx)[1-\lambda P^{\min}(\lambda,x,E)]$$

$$+\int\eta_\mu(dx)\lambda[1-\lambda p^{\min}(\lambda,x,E)]$$

立得本引理。 ∎

（4.3.3）**引理** 设 q 对非保守，对于某 $\lambda>0$，$\eta_\lambda\in\mathscr{V}_\lambda$. 如果（4.1.10）所定义的协调族 $\{\eta_\mu:\mu>0\}$ 满足（4.1.9），特别地，如果 $\mathscr{V}_\lambda\neq\overline{\mathscr{V}}_\lambda$，则存在无穷多个 $N\overline{B}\overline{F}_q$ 过程.

证 特款来自引理（4.3.1）和（4.1.3）. 不失不一般性，可设存在协调族 $\{\eta_\lambda\in\mathscr{V}_\lambda:\lambda>0\}$ 使 $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda\eta_\lambda(E)=\infty$. 对每 $n\geqslant1$，任取 $x_n\in E_n$，并命

$$w_n(A)=\delta(x_n,A),\ A\in\mathscr{E}.$$

于是，对每 $n\geqslant1$，定理（3.1.13）提供了一个 q 过程：

$$P_n(\lambda,x,A)=P^{\min}(\lambda,x,A)+z(\lambda,x)\left[\int w_n(dy)P^{\min}(\lambda,y,A)+\right.$$

$$\left.+\eta_\lambda(A)\right]\Big/\left[\lambda\int w_n(dy)P^{\min}(\lambda,y,E)+\lambda\eta_\lambda(E)\right],$$

$$\lambda>0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E}.$$

然后仿引理（4.2.11）的证法易完成本引理的证明. ∎

下面是本章的关键性结果.

（4.3.4）**引理** 若 P 成立，$\dim\mathscr{U}=0$ 且 $\mathscr{V}_\lambda=\overline{\mathscr{V}}_\lambda$，则每一个 q 过程都是 F_q 过程.

证 设 $P(\lambda,x,A)$ 是任一 q 过程. 由向后方程和向后不等式，我们得到

$$P(\lambda,x,A)-P^{\min}(\lambda,x,A)$$

$$\geqslant \int \frac{q(x,dy)}{\lambda+q(x)}[P(\lambda,y,A)-P^{\min}(\lambda,y,A)].$$

这表明

$$F(\lambda,x,A)\equiv\int[(\lambda+q(x))\delta(x,dy)-q(x,dy)]\times$$
$$\times[P(\lambda,y,A)-P^{\min}(\lambda,y,A)]\geqslant 0,$$
$$\lambda>0, x\in E,\ A\in\mathscr{E}.$$

于是由条件 P，引理（3.3.2）和引理（2.5.8）．(i) 得

$$(4.3.5)\quad P(\lambda,x,A)=P^{\min}(\lambda,x,A)+\int P^{\min}(\lambda,x,dy)$$
$$\times F(\lambda,y,A),\ \lambda>0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E}.$$

这样，我们看到

$$(4.3.6)\quad \int P^{\min}(\lambda,x,dy)F(\lambda,y,E)\leqslant\lambda^{-1},$$
$$\lambda>0,\ x\in E,$$

$$(4.3.7)\quad F(\lambda,x,E)\leqslant(\lambda P^{\min}(\lambda,x,\{x\}))^{-1}<\infty,$$
$$\lambda>0,\ x\in E.$$

于是，由预解方程，不仅有

$$\int P^{\min}(\lambda,\cdot,dy)\Big\{F(\lambda,y,A)-F(\mu,y,A)+$$
$$(\lambda-\mu)\int F(\lambda,y,dz)\Big[P^{\min}(\mu,z,A)$$
$$+\int P^{\min}(\mu,z,dx)F(\mu,x,A)\Big]\Big\}=0.$$
$$\lambda>0,\ A\in\mathscr{E},$$

而且大括号内的函数是关于 $P^{\min}(\lambda,x,\cdot)$可积的，从而由引理（3.3.3)．(i) 知

$$(4.3.8)\quad \int F(\lambda,x,dy)R(\lambda,\mu;y,A)$$
$$=F(\mu,x,A)+(\mu-\lambda)\int F(\lambda,x,dy)$$

$$\times \int P^{\min}(\mu, y, dz) F(\mu, z, A),$$

$$\lambda,\ \mu>0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E}.$$

如果 $\mu\geqslant\lambda$，上式右方非负；如果 $\lambda>\mu$，则上式左方非负．因而两边都是非负的．以下固定 λ 和 x，并命

$$(4.3.9)\quad \rho_\mu^{(\lambda,x)} = \int F(\lambda, x, dy) R(\lambda, \mu; y, \cdot)$$

则$\{\rho_\mu^{(\lambda,x)}:\ \mu>0\}$是测度的协调族．因此，由分解引理（3.1.3）知，存在与 μ 无关的 $\beta^{(\lambda,x)}\in\overline{\mathscr{L}}_+$ 和协调族$\{\overline{\rho}_\mu^{(\lambda,x)}\in\mathscr{V}_\mu:\ \mu>0\}$使

$$(4.3.10)\quad \begin{cases} \int \beta^{(\lambda,x)}(dy) P^{\min}(\mu, y, \cdot) \in \overline{\mathscr{L}}_+, \\ \rho_\mu^{(\lambda,x)} = \int \beta^{(\lambda,x)}(dy) P^{\min}(\mu, y, \cdot) + \overline{\rho}_\mu^{(\lambda,x)}, \\ \beta^{(\lambda,x)} = \int \rho_\mu^{(\lambda,x)}(dy) [(\mu+q(y))\delta(y,\cdot) - \\ \qquad - q(y,\cdot)], \end{cases}$$

在每 E_n $(n\geqslant1)$ 上．

特别地，取 $\mu=\lambda$，我们得到

$$(4.3.11)\quad \begin{cases} \rho_\lambda^{(\lambda,x)} = F(\lambda, x, \cdot), \\ F(\lambda, x, \cdot) = \int \beta^{(\lambda,x)}(dy) P^{\min}(\lambda, y, \cdot) \\ \qquad + \overline{\rho}_\lambda^{(\lambda,x)}(\cdot). \\ \beta^{(\lambda,x)} = \int F(\lambda, x, dy) [(\lambda+q(y))\delta(y,\cdot) \\ \qquad - q(y,\cdot)], \end{cases}$$

在每 $E_n(n\geqslant1)$ 上．

从而，若记

$$c(\mu) = \inf_{x\in E} P^{\min}(\mu, x, E),$$

则由上式得

$$(4.3.12)\quad \mu F(\mu, x, E) \geqslant \int \beta^{(\mu,x)}(dy) \mu P^{\min}(\mu, y, E)$$

$$\geqslant c(\mu)\beta^{(\mu,x)}(E),$$

$$(4.3.13)\quad 1\geqslant \mu P(\mu,x,E)$$
$$=\mu P^{\min}(\mu,x,E)+\int P^{\min}(\mu,x,dy)\mu F(\mu,y,E)$$
$$\geqslant c(\mu)+c(\mu)\int P^{\min}(\mu,x,dy)\beta^{(\mu,y)}(E).$$

但由条件 P，$\dim\mathscr{U}=0$ 和 (3.3.5) 知

$$c(\mu)>0,\qquad \mu>0$$

可见

$$(4.3.14)\quad \int P^{\min}(\mu,x,dy)\beta^{(\mu,y)}(E)\leqslant c(\mu)^{-1}(1-c(\mu))<\infty$$

由此及 (4.3.7) 得

$$(4.3.15)\quad \int F(\lambda,x,dy)\int P^{\min}(\mu,y,dz)\beta^{(\mu,z)}(E)<\infty$$

另一方面，视 (4.3.8) 的两边为关于 A 的测度，并对函数 $(\mu+q(\cdot))\delta(\cdot,A)-q(\cdot,A)$ 取积分，利用 (4.3.9)，(4.3.10) 第三式和 (4.3.11) 第三式，得

$$(4.3.16)\quad \beta^{(\lambda,x)}=\beta^{(\mu,x)}+(\mu-\lambda)\int F(\lambda,x,dy)\times\int P^{\min}(\mu,y,dz)\beta^{(\mu,z)},$$

在每 E_n，$(n\geqslant 1)$ 上。

往证

$$(4.3.17)\quad \lim_{\lambda\to\infty}\beta^{(\lambda,x)}(E)=0.$$

事实上，由 (4.3.16) 知，

$$\beta^{(\lambda,x)}\downarrow\qquad 当\ \lambda\uparrow.$$

从而由定理 (1.2.24)．(i) 知，存在 $\varphi^x\in\mathscr{L}_+$ 使

$$\beta^{(\lambda,x)}\downarrow\varphi^x,\ 当\ \lambda\uparrow\infty.$$

现在，由 (4.3.5) 得

$$\overline{\lim_{\lambda\to\infty}}\lambda F(\lambda,x,A)=\overline{\lim_{\lambda\to\infty}}\lambda P^{\min}(\lambda,x,\{x\})\lambda F(\lambda,x,A)$$

$$\leqslant \overline{\lim_{\lambda\to\infty}} \lambda \int P^{\min}(\lambda, x, dy) \lambda F(\lambda, y, A)$$

$$= \overline{\lim_{\lambda\to\infty}} \lambda^2 [P(\lambda, x, A) - P^{\min}(\lambda, x, A)],$$

$$A \in \mathscr{E} \cap E_n, \quad n \geqslant 1.$$

于是由（4.3.11）第三式得

$$\varphi^x(A) = \lim_{\lambda\to\infty} \beta^{(\lambda,x)}(A) \leqslant \lim_{\lambda\to\infty} [\lambda F(\lambda, x, A) + \\ + \int_A F(\lambda, x, dy) q(y)] = 0,$$

$$A \in \mathscr{E} \cap E_n, \quad n \geqslant 1.$$

这便证得（4.3.17）. 次证：

$$(4.3.18) \quad \int \overline{\rho}_\nu^{(\lambda,x)}(dy) \beta^{(\mu,y)}(E) < \infty, \quad \lambda, \mu, \nu > 0.$$

设 $P(\lambda, x, A)$ 为任一 q 过程，若命 $\xi(\lambda, x) = 1 - \lambda P(\lambda, x, E)$，则由预解方程得

$$\int \mu P(\mu, x, dy) \lambda \xi(\lambda, y)$$

$$= \mu(1 - \mu P(\mu, x, \{x\})) \lambda P(\lambda, x, E) + \int_{E\setminus\{x\}} \mu^2 P(\mu, x, \\ dy) \xi(\lambda, y) - \mu^2 P(\mu, x, E - \{x\})$$

$$\geqslant \mu(1 - \mu P(\mu, x, \{x\})) \lambda P(\lambda, x, E) \\ + \sum_n \int_{E_n\setminus\{x\}} \mu^2 P(\mu, x, dy) \xi(\lambda, y) \\ - \mu[1 - \mu P(\mu, x, \{x\})].$$

令 $\mu \to \infty$，即得

$$(4.3.19) \quad (\lambda + q(x))(1 - \lambda P(\lambda, x, E)) \\ \geqslant \int q(x, dy)(1 - \lambda P(\lambda, y, E)), \quad \lambda > 0, \quad x \in E.$$

于是，由 $F(\lambda, x, A)$ 的定义得

$$F(\lambda, x, E) = (\lambda + q(x)) P(\lambda, x, E) - \int q(x, dy) P(\lambda, y, E) - 1 \\ \leqslant \lambda^{-1}[q(x) - q(x, E)] < \infty, \qquad \lambda > 0.$$

这样，由（4.3.12）及上式得

$$\int \overline{\rho}_{\nu}^{(\lambda,x)}(dy)\beta^{(\mu,y)} \leqslant (c(\mu))^{-1}\int \overline{\rho}_{\nu}^{(\lambda,x)}dy\mu F(\mu,y,E)$$

$$\leqslant (c(\mu))^{-1}\int \overline{\rho}_{\nu}^{(\lambda,x)}(dy)[q(y)-q(y,E)],$$

但由假设，$\mathscr{V}_{\lambda}=\overline{\mathscr{V}}_{\lambda}$，故由 $\overline{\rho}_{\nu}^{(\lambda,x)} \in \mathscr{V}_{\lambda}$ 知（4.3.18）成立. 现在，使用我们曾用于证明（3.4.13）和（3.4.14）的手法，可由（4.3.14）和（4.3.15）导出

$$\int \beta^{(\lambda,x)}(dy)\int P^{\min}(\mu,y,dz)\beta^{(\mu,z)}(E)<\infty, \tag{4.3.20}$$

$$\int \beta^{(\lambda,x)}(dy)\int P^{\min}(\lambda,y,dz)\beta^{(\mu,z)}(E)<\infty. \tag{4.3.21}$$

把（4.3.11）的第二式代入（4.3.16），并使用（4.3.18），（4.3.20），（4.3.21），预解方程和 $\{\overline{\rho}_{\mu}^{(\lambda,x)}: \mu>0\}$ 的协调性，得

$$\beta^{(\lambda,x)}(E)=\beta^{(\mu,x)}(E)+ \tag{4.3.22}$$

$$+(\mu-\lambda)\int \beta^{(\lambda,x)}(dy)\int P^{\min}(\lambda,y,dz)\int P^{\min}(\mu,z,dz')\beta^{(\mu,z')}(E)$$

$$+(\mu-\lambda)\int \overline{\rho}_{\lambda}^{(\lambda,x)}(dy)\int P^{\min}(\mu,y,dz)\beta^{(\mu,z)}(E)$$

$$=\beta^{(\mu,x)}(E)+\int \beta^{(\lambda,x)}(dy)\int P^{\min}(\lambda,y,dz)\beta^{(\mu,z)}(E)$$

$$-\int \beta^{(\lambda,x)}(dy)\int P^{\min}(\mu,y,dz)\beta^{(\mu,z)}(E)$$

$$+\int \overline{\rho}_{\lambda}^{(\lambda,x)}(dy)\beta^{(\mu,y)}(E)$$

$$-\int \overline{\rho}_{\mu}^{(\lambda,x)}(dy)\beta^{(\mu,y)}(E).$$

另一方面，由 $\{\overline{\rho}_{\mu}^{(\lambda,x)}: \mu>0\}$ 的协调性和预解方程得

$$\overline{\rho}_{\mu}^{(\lambda,x)}\downarrow,\ P^{\min}(\mu,x,\cdot)\downarrow,\ \text{当}\ \mu\uparrow$$

由此及（4.3.17）和控制收敛定理，在（4.3.22）中命$\mu\to\infty$，便得

$$\beta^{(\lambda,x)}(E)=0,\ \lambda>0,\ x\in E,$$

将它代入（4.3.11）的第二式，得

$$F(\lambda,x,\cdot)=\overline{\rho}_{\lambda}^{(\lambda,x)},\ \lambda>0,\ x\in E,$$

故由上面两式及（4.3.10）立知$P(\lambda,x,A)$是F_q过程.

（4.3.23） **引理（4.1.7）之证.**

由引理（4.3.1）知，若（4.1.8）成立，则（4.1.9）也成立. 反之，若（4.1.9）成立，则在条件P和$\dim\mathscr{U}=0$之下，（4.1.8）也必须成立，否则由引理（4.3.3）和引理（4.3.4）导致矛盾. 】

（4.3.24） **$\overline{B}\ \overline{F}$型**

若q对保守，则由定理（1.2.25）知，每一个q过程都是B型的，从而不存在$\overline{B}\overline{F}_q$过程，若$q$对非保守且$P(\dim\mathscr{U}=0)$（$\mathscr{V}_\lambda=\overline{\mathscr{V}}_\lambda$）成立，则由引理（4.3.4）知，也不存在$\overline{B}\overline{F}_q$过程.若$\overline{C}(\overline{P}\cup(\dim\mathscr{U}>0))$成立，则由引理（4.2.11）知，存在无穷多个$N\overline{B}\,\overline{F}_q$过程；若$\overline{C}$和$\mathscr{V}_\lambda\neq\overline{\mathscr{V}}_\lambda$同时成立，则由引理（4.3.3）知，也存在无穷多个$N\overline{B}\,\overline{F}_q$过程. 】

为叙述方便，以下用$|D|$表D型q过程的个数.

（4.3.25） **$B\overline{F}$型**

若$\dim\mathscr{U}=0$，则$|B|=|BF|=1$，从而$|B\overline{F}|=0$. 由引理（4.2.6）知，若$\dim\mathscr{U}>0$，则$\dim\mathscr{U}^{\Delta}>0$. 特别地$z^{\Delta}(\lambda,\cdot)==I_E(\cdot)z(\lambda,\cdot)$是$\mathscr{U}_\lambda^{\Delta}$的最大解，倘若$z(\lambda,\cdot)$是$\mathscr{U}_\lambda$的最大解. 然后，引理（4.2.2）已构造出无穷多个以$y\in E$为参数族的NB_{q_Δ}过程：$P_{\Delta y}(\lambda,x,A)$，容易验证，只要$q_\Delta(y)\neq0$，$P_{\Delta y}$就是$\overline{F}$型$q_\Delta$过程. 因为$\{y:\ q_\Delta(y)\neq0\}$必定是无穷集，否则将矛盾于$\dim\mathscr{U}^{\Delta}>0$的假设. 这样，$|B\overline{F}_{q_\Delta}|=\infty$，注意对于不同的$y\in E$，$P_{\Delta y}$在$E$上的限制不同，因而由引理（4.2.3）和（4.2.4）

知 $|B\overline{F}|=\infty$。 ▌

(4.3.26) $\overline{\mathbf{F}}$型

如条件

$$\overline{C}[\overline{P}\cup(\dim\mathscr{U}>0)\cup(\mathscr{V}\neq\overline{\mathscr{V}}_\lambda)$$

成立，则 $|\overline{B}\,\overline{F}|=\infty$；从而 $|\overline{F}|=\infty$。如

$$\overline{C}P(\dim\mathscr{U}=0)(\mathscr{V}=\overline{\mathscr{V}})$$

成立，则由引理（4.3.4）知 $|\overline{F}|=0$。如 $C(\dim\mathscr{U}=0)$，则 $|G|=|F|=1$，从而也有 $|\overline{F}|=1$。剩下的情况是 $C(\dim\mathscr{U}>0)$，这可由引理（4.2.11）导出。 ▌

(4.3.27) $\overline{\mathbf{B}}\,\overline{\mathbf{F}}$型

如保守，则每一 q 过程为 B 型，从而 $|\overline{B}F|=0$；如 $\dim\mathscr{V}=0$，则 $|F|=1$，它即是最小 q 过程，从而 $|\overline{B}F|=0$；如 $\overline{C}(\dim\mathscr{V}>0)$，则在定理（3.1.13）中取 $w=0$，让 C 变动，便知 $|\overline{B}F|=\infty$。 ▌

(4.3.28) $\overline{\mathbf{B}}$型

如保守，显然有 $|\overline{B}|=0$；如 $\overline{C}P(\dim\mathscr{U}=\dim\mathscr{V}=0)$，则 $|G|=1=|B|$，也有 $|\overline{B}|=0$；如 $\overline{C}[\overline{P}\cup(\dim\mathscr{U}>0)]$，则由引理（4.2.11）知 $|\overline{B}|\geqslant|N\overline{B}\,\overline{F}|=\infty$；如 $\overline{C}(\dim\mathscr{V}>0)$，则由（4.3.28）知 $|\overline{B}|\geqslant|\overline{B}F|=\infty$。 ▌

(4.3.29) $\overline{\mathbf{B}}\cup\overline{\mathbf{F}}$型

它是 $\overline{\mathbf{B}}$型和 $\overline{\mathbf{F}}$型条件的组合。 ▌

§4.4 结果的证明（再续）

本节证明表二中十一种类型的判准。

(4.4.1) **NB型**

如果 q 对非保守，$P(\lambda,x,A)$ 是任一 B_q 过程，则由

$$\lambda P(\lambda,x,E)=\int\frac{q(x,dy)}{\lambda+q(x)}\lambda P(\lambda,y,E)+\frac{\lambda}{\lambda+q(x)}$$

$$\leqslant\frac{q(x,E)}{\lambda+q(x)}+\frac{\lambda}{\lambda+q(x)},$$

知，$P(\lambda,x,A)$中断，从而 $|NB|=0$；

如 q 对保守且 $\dim\mathscr{U}=0$，则显然有 $|NB|=1$；

如 q 对保守且 $\dim\mathscr{U}>0$，则由引理(4,2.2)知 $|NB|=\infty$。

(4.4.2) **NF 型**

如 $\dim\mathscr{V}=0$，则 $|F|=1$，它即是最小 q 过程。但不论 $C(\dim\mathscr{U}>0)$ 或 $\overline{C}$，最小 q 过程都是中断的。从而 $|NF|=0$；

如 $C(\dim\mathscr{U}=0)$，则 $|G|=1$，最小 q 过程不断，从而 $|NF|=1$；而若 $\dim\mathscr{V}=1$，则存在 $\eta_\lambda\in\mathscr{V}_\lambda-\{0\}$，则由 (3.1.13) 知，不管 $z(\lambda,\cdot)$ 是否为零，

$$P(\lambda,x,A)=P^{\min}(\lambda,x,A)+z(\lambda,x)\eta_\lambda(A)/(\lambda\eta_\lambda(E))$$

总是一个 NF_q 过程。另一方面，如 $\overline{P}(\lambda,x,A)$ 是任一 NF_q 过程，则由 $\dim\mathscr{V}=1$ 知，必有

$$\overline{P}(\lambda,x,\cdot)-P^{\min}(\lambda,x,\cdot)=\rho(x)\eta_\lambda(\cdot)$$

从而由 $\overline{P}(\lambda,x,A)$ 的不断性知 $\rho(x)=z(\lambda,x)/(\lambda\eta_\lambda(E))$，故此时 $|NF|=1$。

最后，如果 $C(\dim\mathscr{U}>0)$ 或 $\overline{C}$，则 $z(\lambda,\cdot)\neq 0$。若还有 $\dim\mathscr{V}>1$，我们可取两个线性无关的 $\eta_\lambda^{(1)}$，$\eta_\lambda^{(2)}\in\mathscr{V}_\lambda$，以及任意的 $c\in\mathbb{R}_+$，使得

$$P_c(\lambda,x,A)=P^{\min}(\lambda,x,A)+z(\lambda,x)[c\eta_\lambda^{(1)}(A)+\eta_\lambda^{(2)}(A)]$$
$$/[c\lambda\eta_\lambda^{(1)}(E)+\lambda\eta_\lambda^{(2)}(E)],$$
$$\lambda>0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E}.$$

是一个 NF_q 过程．由线性无关性易见对于不同的 c，$P_c(\lambda,x,A)$ 是不同的 q 过程。 ▮

(4.4.3) **NBF 型**

注意只要 $|NB|$ 和 $|NF|$ 之一为 0，就有 $|NBF|=0$；若 $|NB|=|NF|=1, \infty$，则必定有 $|NBF|=1, \infty$。剩下的是 $C(\dim\mathscr{U}>0)(\dim\mathscr{V}=1)$ 的情况．此时，$|NF|=1$，且每一 q 过程必为 B 型的，故也有 $|NBF|=1$。 ▮

(4.4.4) $\mathbf{N(B\cup F)}$ 型

这是 NB 型和 NF 型判准的综合．

(4.4.5) **NG 型**

如 $\overline{C}P(\dim\mathscr{U}=\dim\mathscr{V}=0)$，则 q 过程唯一且中断，从而 $|NG|=0$。

如 $C(\dim\mathscr{U}=0)$，显然有 $|NG|=1$。

如 $\overline{C}P(\dim\mathscr{U}=0)(\dim\mathscr{V}=\dim\overline{\mathscr{V}}=1)$，则由 (4.3.4) 知 $|\overline{F}|=0$，再由 $|NF|=1$ 立得 $|NG|=1$。

如 $C(\dim\mathscr{U}>0)$，则 $|NG|\geqslant|NB|=\infty$；如 $\overline{CP}$，则由引理 (4.2.11) 知 $|NG|=\infty$；如 $\dim\mathscr{V}>1$，则 $|NG|\geqslant|NF|=\infty$；最后，如 $\overline{C}(\dim\mathscr{V}=1\neq\dim\overline{\mathscr{V}})$，则由引理 (4.3.3) 知 $|NG|=\infty$。 ▮

(4.4.6) $\mathbf{N\overline{B}\overline{F}}$ 型

重复 $\overline{B}\overline{F}$ 型之证，见 (4.3.24)． ▮

(4.4.7) $\mathbf{NB\overline{F}}$ 型

如 $C(\dim\mathscr{U}=0)$，则 $|G|=1=|F|$，从而 $|NB\overline{F}|=0$；如 $\overline{C}$，则 $|NB\overline{F}|\leqslant|NB|=0$. 反之，如 $C(\dim\mathscr{U}>0)$，则由 (4.2.11) 知 $|NB\overline{F}|=\infty$。 ▮

(4.4.8) $\mathbf{N\overline{F}}$ 型

与 $\overline{F}$ 型相同，参考 (4.3.26) 之证。 ▮

(4.4.9) $\mathbf{N\overline{B}F}$ 型

如 $C\cup\overline{C}$ $(\dim\mathscr{V}=0)$，则 $|N\overline{B}F|\leqslant|N\overline{B}|=0$ 或者 $|N\overline{B}F|\leqslant|NF|=0$。

如 $\overline{C}$ $(\dim\mathscr{V}=1)$，则 $|NF|=1$，且 (4.4.2) 的证明可见，

这个 NF_q 过程也是 $\overline{B}$ 型的，从而 $|N\overline{B}\overline{F}|=1$.

如 $\overline{C}(\dim\mathscr{V}>1)$，则 (4.4.2) 的证明中所构造的无穷多个 NF_q 过程都是 $\overline{B}_q$ 过程. 故也有 $|N\overline{B}\overline{F}|=\infty$. ▮

(4.4.10) **N$\overline{\mathbf{B}}$型**

如 $C\cup\overline{C}P(\dim\mathscr{U}=\dim\mathscr{V}=0)$，则 $0\leqslant|N\overline{B}|\leqslant|\overline{B}|=0$.

如 $\overline{C}P(\dim\mathscr{U}=0)$ $(\dim\mathscr{V}=\dim\overline{\mathscr{V}}=1)$，则可依次读出 $|NB|=0$，$|N\overline{B}\overline{F}|=0$ (由(4.3.4))，$|B|=1$(因 $\dim\mathscr{U}=0$)，$|NF|=1$. 从而 $|N\overline{B}|=1$.

如 $\overline{C}[\overline{P}\cup(\mathscr{V}_\lambda\neq\overline{\mathscr{V}}_\lambda)\cup(\dim\mathscr{U}>0)]$，则 $|N\overline{B}|\geqslant|N\overline{B}\overline{F}|=\infty$；如 $\overline{C}(\dim\mathscr{V}>1)$，则 $|N\overline{B}|\geqslant|NG|=\infty$. ▮

(4.4.11) **N($\overline{\mathbf{B}}\cup\overline{\mathbf{F}}$)型**

这是 $N\overline{B}$ 和 $N\overline{F}$ 的组合. ▮

§4.5 补充与注记

侯振挺、郭青峰[1]最早就马链情形完成了 Q 过程的定性理论这一深刻、繁难的工作. 郑小谷[2]把侯、郭的工作推广到抽象空间. 这需要寻找新的分析证明以代替原先有关的概率证法.

本章基本上取材于侯、郭[1]和郑[2]. 这里，我们引进了空间 $\overline{\mathscr{V}}_\lambda(\lambda>0)$，使条件更为清晰. 我们也补遗了两种简单类型 $\overline{B}\cup\overline{F}$ 和 $N(\overline{B}\cup\overline{F})$.

第五章　q 过程的耦合

耦合（coupling）工具的发展主要是因为无穷质点马尔可夫过程（又称无穷粒子系统）的研究。现在已经清楚，对于一般随机过程的研究，它也是有用的工具。本章中，我们将先讨论耦合的基本条件。然后，在以下各节里，依次研究这些条件。在最后一节，我们将给出耦合的几种基本形式。

本章也是下一章的准备。我们总假定 q 对保守。

§ 5.1　耦合的基本条件

本节将导出耦合的三个基本条件：边缘性、正则性和保序性。为了说明耦合的意义和用法，我们来看看一个古典的例子。

取状态空间为 $E=\{0,1,\cdots,N\}$的离散参数马氏链$\{X_n\}_n\geqslant 0$，设它的一步转移矩阵是 $(P_{ij}:i,j\in E)$ 。记 n 步转移矩阵为 $(P_{ij}^{(n)}:i,\ j\in E)$ 。

(5.1.1) **定理**　若存在 $m_0>0$ 使

(5.1.2)　$\min\limits_{i,j\in E}P_{ij}^{(m_0)}\equiv\varepsilon_0>0$

则极限

(5.1.3)　$\lim\limits_{n\to\infty}P_{ij}^{(n)}\equiv\mu_j$

存在、严格正且为一个平稳分布。

证　设$\{X_n^{(1)}\}_{n\geqslant 0}$和$\{X_n^{(2)}\}_{n\geqslant 0}$是两个独立的、分别以 i 和 j 为出发点并具有同一转移矩阵 (P_{ij}) 的马氏链。我们把它们放在同一个空间$E\times E\equiv\widetilde{E}$上，得到一个二元过程$\widetilde{X}_n=(X_n^{(1)},\ X_n^{(2)})$，$n\geqslant 0$。先证 $X_n^{(1)}$ 和 $X_n^{(2)}$ 必在某一步相遇。事实上，它们在前 m_0

步相遇的概率

$$\geqslant \sum_{k=0}^{N} P_{ik}^{(m_0)} P_{jk}^{(m_0)} \geqslant N\varepsilon_0^2 \equiv \varepsilon > 0.$$

从而，前 m_0 步不相遇的概率$\leqslant 1-\varepsilon$. 简单的分解表明，在前 mm_0 步不相遇的概率$\leqslant (1-\varepsilon)^m \to 0$，当 $m\to\infty$，这便证得上述断言.

现在，我们修改$\widetilde{X}_n$ 如次：在 $X_n^{(1)} = X_n^{(2)}$ 之前，保持$\widetilde{X}_n$不动；自它们相遇的时刻起，把 $X_n^{(1)}$ 和 $X_n^{(2)}$ 取为一样的轨道. 这当然不会影响过程 $\widetilde{X}_n$的马氏性. 而且，$\widetilde{X}_n$的两个边缘分布恰是原来两个过程的分布，即

$$(5.1.4)\qquad \begin{aligned} &\widetilde{P}^{(i,j)}[\widetilde{X}_n \in \{i'\}\times E] = P_{ii'}^{(n)},\\ &\widetilde{P}^{(i,j)}[\widetilde{X}_n \in E\times\{j'\}] = P_{jj'}^{(n)}. \end{aligned}$$

此处 $\widetilde{P}^{(i,j)}$ 为$\{\widetilde{X}_n\}$的分布. 进而

$$\begin{aligned} &|P_{jk}^{(m)} - P_{ik}^{(m)}|\\ &= |\widetilde{P}^{(i,j)}[X_m^{(1)} = k \neq X_m^{(2)}] - \widetilde{P}^{(i,j)}[X_m^{(1)} \neq k = X_m^{(2)}]|\\ &\leqslant \widetilde{P}^{(i,j)}[X_n^{(1)} \neq X_n^{(2)},\ n\leqslant m] \to 0,\ m\to\infty, \end{aligned}$$

后一个不等式是因为：若在 n 处 $X_n^{(1)} = X_n^{(2)}$，则对于每 $m\geqslant n$，$X_m^{(1)} = X_m^{(2)}$. 最后，由于 $\max\limits_i P_{ik}^{(n)}$ 和 $\min\limits_i P_{ik}^{(n)}$ 对每 $k\in E$，分别是 n 的减函数和增函数. 由此容易完成定理的证明.

上述修正后的$\{\widetilde{X}_n\}_{n\geqslant 0}$是$\{X_n^{(1)}\}_{n\geqslant 0}$和$\{X_n^{(2)}\}_{n\geqslant 0}$的一种耦合. 这个耦合使我们立即导出所需的极限性质. 这里，我们已经看出耦合的第一个基本条件（5.1.4），我们称之为边缘性.

设（E_i，$\mathscr{E}_i$）为任意的可测空间，$(X_t^{(i)})_{t\geqslant 0}$ 为其上的马尔过程($i=1,2$). 作乘积空间 $\widetilde{E} = E_1\times E_2$，$\widetilde{\mathscr{E}} = \mathscr{E}_1\times\mathscr{E}_2$. 再设 $(\widetilde{X}_t)_{t\geqslant 0}$ 为($\widetilde{E}$，$\widetilde{\mathscr{E}}$）上的马氏过程，为使$(\widetilde{X}_t)$ 为 $(X_t^{(1)})$和$(X_t^{(2)})$的耦合，我们要求：

（5.1.5）**边缘性**

$$\widetilde{P}^{(x_1,x_2)}[\widetilde{X}_t\in A_1\times E_2]=P^{x_1}[X_t^{(1)}\in A_1],$$
$$\widetilde{P}^{(x_1,x_2)}[\widetilde{X}_t\in E_1\times A_2]=P^{x_2}[X_t^{(2)}\in A_2],$$
$$X_i\in E_i,\ A_i\in\mathscr{E}_i,\ i=1,2,\ t\geqslant 0.$$

对于q过程来说，我们可以使用转移函数将上述条件改写为

$$(5.1.6)\qquad \begin{aligned}&\widetilde{P}(t,(x_1,x_2),A_1\times E_2)=P_1(t,x_1,A_1)\\&\widetilde{P}(t,(x_1,x_2),E_1\times A_2)=P_2(t,x,A_2)\\&\qquad x_i\in E_i,\ A_i\in\mathscr{E}_i,\ i=1,\ 2,\ t\geqslant 0.\end{aligned}$$

我们自然希望耦合过程也是一个q过程，它有q对$\widetilde{q}(\widetilde{x})-\widetilde{q}(\widetilde{x},\widetilde{A})$ $(\widetilde{x}\in\widetilde{E},\widetilde{A}\in\widetilde{\mathscr{E}})$，且满足

(5.1.7) **正则性** $q(\widetilde{x})-q(\widetilde{x},\widetilde{A})$ 是保守q对，而且相应的q过程唯一。

以后，我们称这种q对为正则的。

有时候，我们使用耦合过程来比较一个q过程从不同的出发点出发之间的序关系，此时，自然有$E_1=E_2\equiv E$，$\mathscr{E}_1=\mathscr{E}_2\equiv\mathscr{E}$。在$E$上有半序关系“$\leqslant$”。我们的目的是希望知道耦合过程是否具有

(5.1.8) **保序性**

$$x_1\leqslant x_2\Longrightarrow\widetilde{P}^{(x_1,x_2)}[X_t^{(1)}\leqslant X_t^{(2)}]=1,\ t\geqslant 0,\ (x_1,\ x_2)\in\widetilde{E}.$$

称E上的$\mathscr{E}$可测函数f是单调增的，如果

$$(5.1.9)\qquad x_1\leqslant x_2\Longrightarrow f(x_1)\leqslant f(x_2),\quad (x_1,\ x_2)\in\widetilde{E}.$$

这样，如果(5.1.6)-(5.1.8)满足，则对于每个非负单调增函数f，我们将有

$$(5.1.10)\qquad x_1\leqslant x_2\Longrightarrow P_t^{(1)}f(x_1)\leqslant P_t^{(2)}f(x_2),\quad (x_1,x_2)\in\widetilde{E},\ t\geqslant 0.$$

此处

$$(5.1.11)\qquad P_t^{(i)}f(x)=\int P_i(t,x,dy)f(y),\ i=1,2.$$

§5.2 边缘性

本节研究边缘性条件（5.1.6）的更为方便的等价形式。

若记$\widetilde{q}(\widetilde{x})-\widetilde{q}(\widetilde{x},\widetilde{A})$所决定的最小$q$过程为$\widetilde{P}(t,\widetilde{x},\widetilde{A})$，那么，由保守性立得

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{\widetilde{P}(t,\widetilde{x},\widetilde{A})-\delta(\widetilde{x},\widetilde{A})}{t}=\widetilde{q}(\widetilde{x},\ \widetilde{A})-\widetilde{q}(\widetilde{x})I_{\widetilde{A}}(\widetilde{x})$$

$$\widetilde{x}\in\widetilde{E},\quad \widetilde{A}\in\widetilde{\mathscr{E}}.$$

从而由（5.1.6）得

$$\begin{aligned}
&q_1(x_1,\ A_1)-q_1(x_1)I_{A_1}(x_1)\\
&=\lim_{t\downarrow 0}\frac{P_1(t,x_1,A_1)-\delta(x_1,A_1)}{t}\\
&=\lim_{t\downarrow 0}\frac{\widetilde{P}(t,\ (x_1,x_2),A_1\times E_2)-\delta(x_1,A_1)}{t}\\
&=\widetilde{q}((x_1,x_2),\ A_1\times E_2)-\widetilde{q}(x_1,\ x_2)I_{A_1}(x_1),
\end{aligned}$$

$$(x_1,\ x_2)\in\widetilde{E},\quad A_1\in\mathscr{E}_1.$$

于是，由单调类定理立得

$$\begin{aligned}
&\int q_1(x_1,dy_1)f(y_1)-q_1(x_1)f(x_1)\\
&=\int\widetilde{q}((x_1,\ x_2),dy_1,dy_2)f(y_1)-\widetilde{q}(x_1,x_2)f(x_1),
\end{aligned}$$

$$(x_1,\ x_2)\in\widetilde{E},\quad f\in{}_b\mathscr{E}_1.$$

使用算子形式将是方便的．定义

$$\Omega_i g_i(x_i)=\int q_i(x_i,\ dy_i)(g_i(y_i)-g_i(x_i))$$

$$g_i\in{}_b\mathscr{E}_i,\quad i=1,\ 2.$$

$$\widetilde{\Omega}f(x_1,x_2)=\int\widetilde{q}((x_1,\ x_2),dy_1,dy_2)(f(y_1,y_2)-f(x_1,x_2))$$

$$(x_1,\ x_2)\in\widetilde{E},\quad f\in{}_b\widetilde{\mathscr{E}}.$$

这样，若将$f\in {}_b\mathscr{E}_i$视为$f\in {}_b\widetilde{\mathscr{E}}$，则我们已有

$$(5.2.1)\quad \widetilde{\Omega} f(\cdot, x_2) = \Omega_1 f \quad 与 x_2 无关，f\in {}_b\mathscr{E}_1,$$
$$\widetilde{\Omega} f(x_1, \cdot) = \Omega_2 f \quad 与 x_1 无关，f\in {}_b\mathscr{E}_2.$$

换言之，我们已证得

(5.2.2) **引理** (5.1.6)$\Longrightarrow$(5.2.1).

下面，我们将证明 (5.2.1)$\Longrightarrow$(5.1.6). 为此，需要几条简单的引理.

(5.2.3) **引理** 设$q(x)-q(x, A)$和$q_n(x)-q_n(x,A)$ $(n\geqslant 1)$是一列q对，若对于每$x\in E$和$A\in\mathscr{E}$,

$$q_n(x, A)\longrightarrow q(x, A),\ n\to\infty,$$

则

(i) 对于每$\lambda>0$，$x\in E$和$A\in\mathscr{E}$,

$$\varliminf_{n\to\infty} P_n^{\min}(\lambda, x, A)\geqslant P^{\min}(\lambda, x, A);$$

(ii) 若还设$q(x)-q(x,A)$正则，则对于每$\lambda>0$，$x\in E$和$A\in\mathscr{E}$,

$$\lim_{n\to\infty} P_n^{\min}(\lambda, x, A)=P(\lambda, x, A).$$

此处$P_n^{\min}(\lambda, x, \cdot)$和$P^{\min}(\lambda, x, \cdot)$分别表示由$q_n(x)-q_n(x, \cdot)$和$q(x)-q(x,A)$所决定的最小$q$过程。当$q$对正则时，略去min不写。

对于非拉氏变换形式，结论亦真.

证 由向后方程及定理 (1.2.24). (iv) 得

$$\varliminf_{n\to\infty} P_n^{\min}(\lambda, x, A)$$

$$\geqslant\varliminf_{n\to\infty}\int\frac{q_n(x,dy)}{\lambda+q_n(x)}P_n^{\min}(\lambda,y,A)+\lim_{n\to\infty}\frac{\delta(x,A)}{\lambda+q_n(x)}$$

$$\geqslant\int\frac{q(x,dy)}{\lambda+q_n(x)}\varliminf_{n\to\infty}P_n^{\min}(\lambda,y,A)+\frac{\delta(x, A)}{\lambda+q(x)}$$

然后由比较定理（2.1.11）和定理（2.2.5）立得（i）.

往证（ii）.若存在 λ_0, x_0 和 A_0 使

$$\varliminf_{n\to\infty} P_n^{\min}(\lambda_0, x_0, A) > P(\lambda_0, x_0, A)$$

则由已证的（i）知

$$\begin{aligned}1 &\geqslant \varliminf_{n\to\infty} \lambda_0 P_n^{\min}(\lambda_0, x_0, E)\\ &\geqslant \varliminf_{n\to\infty} \lambda_0 P_n^{\min}(\lambda_0, x_0, A_0) + \varliminf_{n\to\infty} \lambda_0 P_n^{\min}(\lambda_0, x_0, A_0^c)\\ &> \lambda_0 P(\lambda_0, x_0, A_0) + \lambda_0 P(\lambda_0, x_0, A_0^c) = 1.\end{aligned}$$

导致矛盾. 类似地可证最后的断言. ▮

(5.2.4) **引理** 若 $q_1(x)$ 和 $q_2(x)$ 有界，则

$$(5.2.1) \Longrightarrow (5.1.6).$$

证 设 $\tilde{q}(\tilde{x})-\tilde{q}(\tilde{x},\cdot)$ 满足（5.2.1），则

$$\begin{aligned}(5.2.5)\quad \tilde{q}(x_1,x_2) &= \tilde{q}((x_1,x_2),\ (E_1\times E_2)-\{(x_1,x_2)\})\\ &\leqslant \tilde{q}((x_1,x_2),(E_1-\{x_1\})\times E_2)\\ &\quad + \tilde{q}((x_1,x_2),E_1\times(E_2-\{x_2\}))\\ &= q_1(x_1)+q_2(x_2),\quad (x_1,\ x_2)\in\tilde{E}.\end{aligned}$$

从而 $\tilde{q}(\tilde{x})$ 也是有界的. 进而, $\Omega_i(i=1,\ 2)$ 和 $\tilde{\Omega}$ 分别是 $_b\mathscr{E}_i(i=1,\ 2)$ 和 $_b\tilde{\mathscr{E}}$ 上的有界线性算子，而且相应的马氏半群有表现

$$P_i(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\Omega_i^n,\quad i=1,\ 2$$

(5.2.6)

$$\tilde{P}(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\tilde{\Omega}^n.$$

另一方面，由（5.2.1）知

$$\tilde{\Omega}f(\cdot,x) = \Omega_1 f \qquad \text{与 } x_2 \text{ 无关}$$

进而由归纳法得

$$\tilde{\Omega}^n f(\cdot,\ x_2) = \Omega_1^n f \qquad \text{与 } x_2 \text{ 无关},\ n\geqslant 1$$

由此及（5.2.6）即得（5.1.6）. ▮

(5.2.7) **注** 每一个 q 对可用有界q对逼近.事实上,只需取

$$q_n(x)=q(x)\wedge n,\ q_n(x,\ A)=\frac{q_n(x)}{q_n(x)}q(x,\cdot),\ \ n\geqslant 1,$$

此处约定 $0/0=0$. 或者命 $E_n=\{x\in E: q(x)\leqslant n\}$, 并取
$q_n(x,dy)=I_{E_n}(x)q(x,dy)$, $q_n(x)=q_n(x,E)$.

(5.2.8) **定理** 设 $q_i(x_i)-q_i(x_i,\ \cdot)$ $(i=1,\ 2)$ 是任给的两个 q 对, $\widetilde{q}(\widetilde{x})-\widetilde{q}(\widetilde{x},\ \cdot)$ 是满足 (5.2.1) 的 q 对, 再设三个 q 对均正则. 如果存在有界 q 对序列 $q_i^{(n)}(x_i)-q_i^{(n)}(x_i,\ \cdot)$ 及相应的满足 (5.2.1) 的 q 对序列 $\widetilde{q}^{(n)}(\widetilde{x})-\widetilde{q}^{(n)}(\widetilde{x},\ \cdot)$, 使得

$$(5.2.9)\quad \begin{cases} q_i^{(n)}(x_i,A_i)\xrightarrow[n\to\infty]{} q_i(x_i,A_i),\ x_i\in E_i, A_i\in\mathscr{E}_i,\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad i=1,2.\\ \widetilde{q}^{(n)}(\widetilde{x},\widetilde{A})\xrightarrow[n\to\infty]{}\widetilde{q}(\widetilde{x},\ \widetilde{A})\ ,\ \widetilde{x}\in\widetilde{E},\widetilde{A}\in\widetilde{\mathscr{E}}. \end{cases}$$

那么, $(5.1.6)\Longleftrightarrow(5.2.1)$.*)

证 由引理 (5.2.2) , 我们只需再证$(5.2.1)\Longrightarrow(5.1.6)$.
由条件 (5.2.1) 和引理 (5.2.4) 知

$\widetilde{P}^{(n)}(t,(x_1,x_2),A_1\times E_2)=P_1^{(n)}(t,x_1,A_1)$ 与 x_2 无关,
从而$\widetilde{P}^{(n)}(\lambda,(x_1,x_2),A_1\times E_2)=\widetilde{P}_1^{(n)}(\lambda,x_1,A_1)$ 与 x_2 无关
但由引理 (5.2.3) . (ii) 知

$$\lim_{n\to\infty}\widetilde{P}^{(n)}(\lambda,(x_1,x_2),A_1\times E_2)=\widetilde{P}(\lambda,(x_1,x_2),A_1\times E_2)\ ,$$

$$\lim_{n\to\infty}P_1^{(n)}(\lambda,x_1,A_1)=P_1(\lambda,x_1,A_1)\ ,$$

故

$\widetilde{P}(\lambda,\ (x_1,x_2),\ A_1\times E_2)=P_1(\lambda,x_1,A_1)$ 与 x_2 无关,
由定理 (1.5.3) 立得 (5.1.6) . ▌

*). 后面我们将排除这里的有界逼近条件, 见(5.6.1).

§5.3 正则性

关于q过程的正则性，第二、三章已有详尽的讨论．本节研究耦合q过程的正则性和它的两个边缘过程的正则性之间的关系．首先，我们有如下的一般性结果．

(5.3.1) **定理** 设q对$q_i(x_i)-q_i(x_i,\ \cdot)$ $(i=1,2)$及其耦合q对$\widetilde{q}(\widetilde{x})-\widetilde{q}(\widetilde{x},\ \cdot)$满足条件(5.2.1)．若耦合$q$对正则，则每个边缘$q$对必定正则．

证 分别用$z_i(\lambda,\cdot)$和$\widetilde{z}(\lambda,\cdot)$表示方程

$$\begin{cases} z_i(\lambda,\cdot)=\displaystyle\int\frac{q_i(\cdot,dy_i)}{\lambda+q_i(\cdot)}z(\lambda,y_i), \\ 0\leqslant z_i(\lambda,\cdot)\leqslant 1, \qquad i=1,2. \end{cases}$$

和方程

$$\begin{cases} \widetilde{z}(\lambda,\cdot)=\displaystyle\int\frac{\widetilde{q}(\cdot,dy_1,dy_2)}{\lambda+\widetilde{q}(\cdot)}\ \widetilde{z}(\lambda,(y_1,y_2)), \\ 0\leqslant\widetilde{z}(\lambda,\cdot)\leqslant 1 \end{cases}$$

的最大解．往证

$$(5.3.2)\qquad \widetilde{z}(\lambda,(x_1,x_2))\geqslant z_1(\lambda,x_1)\vee z_2(\lambda,x_2),\qquad (x_1,x_2)\in\widetilde{E}.$$

由比较引理(3.2.7)，为证$\widetilde{z}(\lambda,(\cdot,x_2))\geqslant z_1(\lambda,\cdot)$，我们只需证明

$$z_1(\lambda,x_1)\leqslant\int\frac{\widetilde{q}((x_1,x_2),dy_1,dy_2)}{\lambda+\widetilde{q}(x_1,x_2)}z_1(\lambda,y_1),$$

$$x_1\in E_1.$$

但由(5.2.1)知

$$\int\widetilde{q}((x_1,x_2),dy_1,dy_2)z_1(\lambda,y_1)$$

$$= \int q_1(x_1, dy_1) z_1(\lambda, y_1) + \widetilde{q}(x_1, x_2) z_1(\lambda, x_1) - q_1(x_1) z_1(\lambda, x_1)$$

$$= (\lambda + \widetilde{q}(x_1, x_2)) z_1(\lambda, x_1).$$

故证得 $\widetilde{z}(\lambda, (\cdot, x_2)) \geqslant z_1(\lambda, \cdot)$．对偶地，我们有 $\widetilde{z}(\lambda, (x_1, \cdot)) \geqslant z_2(\lambda, \cdot)$．由（5.3.2）及定理（2.5.16）立得本定理． ▌

上述定理在一定程度上简化了我们的研究，因为我们只需考虑耦合 q 对的正则性便已足够．然而，一方面耦合 q 对比原先的边缘 q 对复杂；另一方面，事先给定的是边缘 q 对，对于它们，满足条件（5.2.1）的耦合有多种取法（参见§5.5）．因此，自然关心何时可由边缘 q 对的正则性导出耦合 q 对的正则性．

由（5.3.2）可见

$$\inf_{x_2 \in E_2} \widetilde{z}(\lambda, (x_1, x_2)) \geqslant z_1(\lambda, x_1), \ x_1 \in E_1,$$

$$\inf_{x_1 \in E_1} \widetilde{z}(\lambda, (x_1, x_2)) \geqslant z_2(\lambda, x_2), \ x_2 \in E_2.$$

这预示了从边缘过程的正则性导出耦合过程的正则性的困难．因为，从边缘的正则性，我们所能期望的结果是 $\inf_{x_1 \in E_1} \widetilde{z}(\lambda, (x_1, x_2)) = \inf_{x_2 \in E_2} \widetilde{z}(\lambda, (x_1, x_2)) = 0$，但这并不能直接推出 $\widetilde{z}(\lambda, (x_1, x_2)) = 0$，$(x_1, x_2) \in \widetilde{E}$．下面的结果使用不同的方法，也是相当一般的．

（5.3.3）**定理**　如果边缘 q 对 $q_i(x_i) - q_i(x_i, \cdot)$（$i = 1, 2$）满足（2.3.7）的假设，则每一个满足（5.2.1）的耦合 q 对必定正则．

证　对于 $q_i(x_i) - q_i(x_i, \cdot)$，记（2.3.7）中相应的划分和函数为 $E_i^{(n)}$，φ_i 和 c_i，$i = 1, 2$．取

$$\widetilde{E}_n = E_1^{(n)} \times E_2^{(n)}, \ n \geqslant 1,$$

$$\widetilde{\varphi}(x_1, x_2) = \varphi_1(x_1) + \varphi_2(x_2), \ (x_1, x_2) \in \widetilde{E}.$$

则 $\{\widetilde{E}_n\}_1^\infty \subset \widetilde{\mathscr{E}}$ 且 $\widetilde{E}_n \uparrow \widetilde{E}$，由（5.2.5）知

$$\widetilde{q}(x_1,x_2) \leqslant \widetilde{q}_1(x_1) + \widetilde{q}_2(x_2), \quad (x_1,x_2) \in \widetilde{E}.$$

从而

$$\sup_{(x_1,x_2)\in\widetilde{E}_n} \widetilde{q}(x_1,x_2) \leqslant \sup_{x_1\in E_1^{(n)}} q_1(x_1) + \sup_{x_2\in E_2^{(n)}} q_2(x_2) < \infty,$$

再则

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \inf_{\widetilde{x}\in\widetilde{E}_n^c} \widetilde{\varphi}(x_1,x_2) \\
&= \lim_{n\to\infty} \inf_{\widetilde{x}\in\widetilde{E}_n^c} (\varphi_1(x_1) + \varphi_2(x_2)) \\
&\geqslant \lim_{n\to\infty} (\inf_{x_1\in(E_1^{(n)})^c} \varphi_1(x_1) \wedge \inf_{x_2\in(E_2^{(n)})^c} \varphi_1(x_2)) \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

由假设

$$\int q^i(x_i,dy_i)\varphi_i(y_i) \leqslant (c_i + q_i(x_i))\varphi_i(x_i), \quad x_i \in E_i, i = 1, 2.$$

故由（5.2.1）得

$$\begin{aligned}
&\int \widetilde{q}((x_1,x_2),dy,dy_2)\widetilde{\varphi}(y_1,y_2) \\
&= \widetilde{q}(x_1,x_2)\varphi_1(x_1) + \int q_1(x_1,dy_1)\varphi_1(y_1) - q_1(x_1)\varphi_1(x_1) \\
&\quad + \widetilde{q}(x_1,x_2)\varphi_2(x_2) + \int q_2(x_2,dy_2)\varphi_2(y_2) - \\
&\quad q_2(x_2)\varphi_2(x_2) \\
&\leqslant \widetilde{q}(x_1,x_2)\widetilde{\varphi}(x_1,x_2) + (c_1 \vee c_2)\,\widetilde{\varphi}(x_1,x_2) \\
&= (c_1 \vee c_2 + \widetilde{q}(x_1,x_2))\,\widetilde{\varphi}(x_1,x_2), \\
&\qquad (x_1,x_2) \in \widetilde{E}.
\end{aligned}$$

可见 $\widetilde{q}(\widetilde{x}) - \widetilde{q}(\widetilde{x},\cdot)$ 也满足（2.3.7）的假设。 ∎

使用这里的证法，或者由（2.3.11），我们得到

(5.3.4) **推论** 若边缘q对同时满足（2.3.2）—(2.3.4)之一，则一切满足（5.2.1）的耦合q对是正则的.

由定理（5.3.3）和（3.5.2）得

(5.3.5) **推论** 若边缘Q矩阵满足（3.2.21）（相应地，满足（3.2.10）），则一切满足（5.2.1）的耦合q对是正则的。

一般情形的解答见（5.6.5）.

§5.4 保序性

本节研究保序性，假定$E_1=E_2=E$，$\mathscr{E}_1=\mathscr{E}_2=\mathscr{E}$. 在$E$上赋有可测的半序“$\leqslant$”；并设$\{(x,y)\in\widetilde{E}: x\leqslant y\}\equiv\widetilde{F}$是$\widetilde{\mathscr{E}}$可测的. 而且耦合$q$对正则. 现在，我们可改写（5.1.8）为

(5.1.8) 保序性：对每$(x_1,x_2)\in\widetilde{F}$和$t\geqslant 0$,

$$\widetilde{P}(t,(x_1,x_2),\widetilde{F})=1.$$

由保守性，在上式中取导数，得

$$(5.4.1)\qquad \widetilde{q}((x_1,x_2),\widetilde{F}^c)=0,\quad (x_1,x_2)\in\widetilde{F}.$$

事实上，我们有

(5.4.2) **定理** (5.1.8)$\Longleftrightarrow$(5.4.1).

证 只需再证(5.4.1)$\Longrightarrow$(5.1.8). 首先注意，

$$\widetilde{P}^{(0)}(\lambda,(x_1,x_2),\widetilde{F}^c)=\frac{\delta((x_1,x_2),\widetilde{F}^c)}{\lambda+\widetilde{q}(x_1,x_2)}=0,$$
$$(x_1,x_2)\in\widetilde{F}.$$

若设

$$\widetilde{P}^{(n)}(\lambda,(x_1,x_2),\widetilde{F}^c)=0,\quad (x_1,x_2)\in\widetilde{F},$$

则

$$\widetilde{P}^{(n+1)}(\lambda,(x_1,x_2),\widetilde{F}^c)$$

$$= \int \frac{\widetilde{q}((x_1, x_2), dy_1, dy_2)}{\lambda + \widetilde{q}(x_1, x_2)} \widetilde{P}^{(n)}(\lambda, (y_1, y_2), \widetilde{F}^c) + \widetilde{P}^{(0)}(\lambda, (x_1, x_2), \widetilde{F}^c)$$

$$= \int_{\widetilde{F}} \frac{\widetilde{q}((x_1, x_2), dy_1, dy_2)}{\lambda + \widetilde{q}(x_1, x_2)} \widetilde{P}^{(n)}(\lambda, (y_1, y_2), \widetilde{F}^c) \text{（由(5.4.1)）}$$

$$= 0, \qquad \text{（由归纳假设）} \quad (x_1, x_2) \in \widetilde{F}$$

故由归纳法得

$$\widetilde{P}^{(n)}(\lambda, (x_1, x_2), \widetilde{F}^c) = 0, \quad (x_1, x_2) \in \widetilde{F}, \ n \geq 1$$

进而由定理（2.2.5）和（2.1.5）知

$$\widetilde{P}(\lambda, (x_1, x_2), \widetilde{F}^c) = 0, \ (x_1, x_2) \in \widetilde{F}, \ \lambda > 0.$$

故由拉氏变换的唯一性定理得（5.1.8）. ∎

§5.5 耦合的形式

本节将介绍几种耦合，从这里我们可以看到耦合形式的多样性。

设 μ_1, μ_2 为$\mathscr{E}$上的两个有限测度，$(\mu_1 - \mu_2)^{\pm}$ 为 $\mu_1 - \mu_2$ 的 Jordan－Hahn 分解，令

$$\mu_1 \wedge \mu_2 = \mu_1 - (\mu_1 - \mu_2)^{+}$$

则显然有 $\mu_1 \wedge \mu_2 = \mu_2 \wedge \mu_1$.

今设 $q_i(x_i) - q_i(x_i, \cdot)$ 为 $(E_i, \mathscr{E}_i)$ $(i = 1, 2)$ 上的两个 q 对，常用的是如下情形：

$E_1 \subset E_2$（相应地，$E_2 \subset E_1$）且$E_1 \in \mathscr{E}_2$（相应地，$E_2 \in \mathscr{E}_1$）. 此时，若补定义

$$q_1(x) = 0, \ x \in E_2 - E_1,$$

我们可将 $q_1(x_1) - q_1(x_1, \cdot)$自然地延拓到 $(E_2, \mathscr{E}_2)$上. 因此，

以下我们只考虑：

$$E_1 = E_2 = E,\ \mathscr{E}_1 = \mathscr{E}_2 = \mathscr{E}.$$

下面是最简单的一种耦合。

(5.5.1) 独立耦合

$$\begin{aligned}\widetilde{\Omega}f(x_1,x_2) &= \int q_1(x_1,dy_1)(f(y_1,x_2)-f(x_1,x_2)) \\ &\quad + \int q_2(x_2,dy_2)(f(x_1,y_2)-f(x_1,x_2)) \\ &= (\Omega_1 f(\cdot,\ x_2))(x_1) + (\Omega_2 f(x_1,\cdot))(x_2), \\ &\qquad (x_1,x_2)\in\widetilde{E}, f\in{}_b\widetilde{\mathscr{E}}.\end{aligned}$$

这里，两个边缘过程独立地运动.

也许，下面的耦合是最有用的.

(5.5.2) 基本耦合

$$\begin{aligned}&\widetilde{\Omega}f(x_1,x_2) \\ &= \int (q_1(x_1,\cdot)-q_2(x_2,\cdot))^+(dy)(f(y,x_2)-f(x_1,x_2)) \\ &\quad + \int (q_2(x_2,\cdot)-q_1(x_1,\cdot))^+(dy)(f(x_1,y)-f(x_1,x_2)) \\ &\quad + \int (q_1(x_1,\cdot)\wedge q_2(x_2,\cdot))(dy)(f(y,y)-f(x_1,x_2)), \\ &\qquad (x_1,x_2)\in\widetilde{E},\ f\in{}_b\widetilde{\mathscr{E}}.\end{aligned}$$

相应的q对在可测矩形上的值是：

$$\begin{aligned}(5.5.3)\qquad \widetilde{q}\ ((x_1,x_2),A_1\times A_2) &= I_{A_2}(x_2)(q_1(x_1,\cdot)-q_2(x_2,\cdot))^+(A_1) \\ &\quad + I_{A_1}(x_1)(q_2(x_2,\cdot)-q_1(x_1,\cdot))^+(A_2) \\ &\quad + (q_1(x_1,\cdot)\wedge q_2(x_2,\cdot))(A_1\cap A_2), \\ &\qquad x_i\in E_i, A_i\in\mathscr{E}_i, i=1,2.\end{aligned}$$

它显然满足 (5.2.1) 这个耦合的意义是：两个边 缘 过程在保持马氏性的条件下以最大可能一起运动.

往证：对于这种耦合，条件 (5.4.1) 成为

(5.5.4)　**保序性**：对于每 $(x_1, x_2) \in \widetilde{F}$，

$$(q_1(x_1, \cdot) - q_2(x_2, \cdot))^+(\{y \in E:\ y > x_2\}) = 0$$

且

$$(q_2(x_2, \cdot) - q_1(x_1, \cdot))^+(\{y \in E:\ y < x_1\}) = 0.$$

事实上，由（5.5.2）得

$$\begin{aligned}
&\int \widetilde{q}((x_1, x_2), dy_1, dy_2) f(y_1, y_2) \\
=& \int (q_1(x_1, \cdot) - q_2(x_2, \cdot))^+(dy_1) f(y_1, x_2) + \\
&+ \int (q_2(x_2, \cdot) - q_1(x_1, \cdot))^+(dy_2) f(x_1, y_2) \\
&+ \int (q_1(x_1, \cdot) \wedge q_2(x_2, \cdot))(dy) f(y, y). \\
&\qquad (x_1, x_2) \in \widetilde{E},\ f \in {}_b\widetilde{\mathscr{E}}.
\end{aligned}$$

特别地，

$$\begin{aligned}
&\widetilde{q}((x_1, x_2), \widetilde{F}^c) \\
=& \int (q_1(x_1, \cdot) - q_2(x_2, \cdot))^+(dy_1) I_{\widetilde{F}^c}(y_1, x_2) \\
&+ \int (q_2, (x_2 \cdot) - q_1(x_1, \cdot))^+(dy_2) I_{\widetilde{F}^c}(x_1, y_2) \\
&+ \int (q_1(x_1, \cdot) \wedge q_2(x_2, \cdot))(dy) I_{\widetilde{F}^c}(y, y) \\
=& (q_1(x_1, \cdot) - q_2(x_2, \cdot))^+(\{y \in E:\ y > x_2\}) \\
&+ (q_2(x_2, \cdot) - q_1(x_1, \cdot))^+(\{y \in E:\ y < x_1\}).
\end{aligned}$$

这表明（5.5.4）$\Longleftrightarrow$（5.4.1）.

现在，取 $E = \{0, 1, \cdots\}$。则相应于（5.5.2）的耦合是

(5.5.5)　$\widetilde{\Omega} f(i_1, i_2)$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k \geq 0} \left(q_{i_1 k}^{(1)} - q_{i_2 k}^{(2)}\right)^+ (f(k,\ i_2) - f(i_1, i_2)) \\
&+ \sum_{k \geq 0} (q_{i_2 k}^{(2)} - q_{i_1 k}^{(1)})^+ (f(i_1, k) - f(i_1, i_2))
\end{aligned}$$

$$+\sum_{k>0} q_{i_1 k}^{(1)} \wedge q_{i_2 k}^{(2)} (f(k,k) - f(i_1,i_2))$$

$$(i_1,i_2)\in\widetilde{E}, f\in {}_b\widetilde{\mathscr{E}}.$$

此时，条件（5.5.4）成为

（5.5.6） 对每 $(i_1,i_2)\in\widetilde{E}$， $i_1\leqslant i_2$，

$$q_{i_1,i_2+1}^{(1)}\leqslant q_{i_2,i_2+1}^{(2)}, \qquad q_{i_1,i_1-1}^{(1)}\geqslant q_{i_2,i_1-1}^{(2)}$$

如果 $((q_{ij}^{(1)}) = (q_{ij}^{(2)})$，则条件（5.5.6）可解释为：随着行号的增加，在Q矩阵对角线的上方，每列元素单调上升；而在下方，每列元素单调下降。

如果 $(q_{ij}^{(1)})$ 和 $(q_{ij}^{(2)})$ 是零同的：

$$q_{ij}^{(1)}=0\Longleftrightarrow q_{ij}^{(2)}=0, i,j\in E.$$

则我们还可以有更细致的耦合形式，为书写简便，记

$$\mathrm{I}_{1k}^{\pm}f(i_1,i_2) = q_{i_1,i_1\pm k}^{(1)}[f(i_1\pm k,i_2) - f(i_1,i_2)]$$

$$\mathrm{I}_{2k}^{\pm}f(i_1,i_2) = q_{i_2,i_2\pm k}^{(2)}[f(i_1,i_2\pm k) - f(i_1,i_2)]$$

$$\mathrm{II}_{1k}^{\pm}f(i_1,i_2) = (q_{i_1,i_1\pm k}^{(1)} - q_{i_2,i_2\pm k}^{(2)})^{+}(f(i_1\pm k,i_2) - f(i_1,i_2)),$$

$$\mathrm{II}_{2k}^{\pm}f(i_1,i_2) = (q_{i_2,i_2\pm k}^{(2)} - q_{i_1,i_1\pm k}^{(1)})^{+}(f(i_1,i_2\pm k) - f(i_1,i_2)),$$

$$\mathrm{II}_{k}^{\pm}f(i_1,i_2) = q_{i_1,i_1\pm k}^{(1)}\wedge q_{i_2,i_2\pm k}^{(2)}(f(i_1\pm k,i_2\pm k) - f(i_1,i_2)).$$

此处$k\geqslant1$. 若有某k，上述 $q_{\cdot,\cdot\pm k}$ 无意义，则约定为0. 现在，可以写出耦合的算子形式：

（5.5.7） $\widetilde{\Omega}f(i_1,i_2)$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}(\mathrm{I}_{1k}^{+}+\mathrm{I}_{2k}^{+})f(i_1,i_2)\,\mathrm{I}_{\Delta_1^c}(i_1,i_2)$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}(\mathrm{I}_{1k}^{-}+\mathrm{I}_{2k}^{-})f(i_1,i_2)\,\mathrm{I}_{\Delta_2^c}(i_1,i_2)$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}(\mathrm{II}_{1k}^{+}+\mathrm{II}_{2k}^{+}+\mathrm{II}_{k}^{+})f(i_1,i_2)\,\mathrm{I}_{\Delta_1}(i_1,i_2)$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}(\mathrm{II}_{1k}^{-}+\mathrm{II}_{2k}^{-}+\mathrm{II}_{k}^{-})f(i_1,i_2)\,\mathrm{I}_{\Delta_2}(i_1,i_2),$$

$$(i_1, i_2) \in \widetilde{E}, \quad f \in {}_b\widetilde{\mathscr{E}}.$$

此处 $\triangle_1$ 和 $\triangle_2$ 分别是"生"、"死"关于序关系的例外集：

$$\triangle_1 = \{j > 0: \text{存在 } i \text{ 使 } q_{i,i+j}^{(1)} > 0\}$$

$$\triangle_2 = \{j > 0: \text{存在 } i \text{ 使 } q_{i,i-j}^{(1)} > 0\}$$

为求得保序条件，只需看 II_{1k}^{+} 和 II_{2k}^{-} 两项．于是得到

$$(5.5.8) \quad \begin{aligned} & q_{i_1, i_1+k}^{(1)} \leqslant q_{i_2, i_2+k}^{(2)}, \quad k \geqslant 1, \quad (i_1, i_2) \in \triangle_1, \\ & q_{i_1, i_1-k}^{(1)} \geqslant q_{i_2, i_2-k}^{(2)}, \quad k \geqslant 1, \quad (i_1, i_2) \in \triangle_2. \end{aligned}$$

如果 $q_i(x_i) = 1$，$x_i \in E_i, i = 1, 2$．则 $q_i(x_i, \cdot)$ 本身就是 q 过程 $P_i(t, x_i, \cdot)$ 所导出的跳跃过程的一步转移概率．这样，相应于离散参数的马氏过程的耦合（例如见 Griffeath[2]）可以直接应用于连续参数的情形．例如说，取

$$(5.5.9) \quad \begin{aligned} & \widetilde{q}((x_1, x_2), A_1 \times A_2) \\ & = (q_1(x_1, \cdot) \wedge q_2(x_2, \cdot))\ (A_1 \cap A_2) \\ & + \frac{(q_1(x_1, \cdot) - q_2(x_2, \cdot))^{+}(A_1)\,(q_2(x_2, \cdot) - q_1(x_1, \cdot))^{+}(A_2)}{\|q_1(x_1, \cdot) - q_2(x_2, \cdot)\|} \\ & \qquad (x_1, x_2) \in \widetilde{E}, A_i \in \mathscr{E}_i, i = 1, 2. \end{aligned}$$

此处，两个概率测度 μ 和 ν 的差的范数定义为

$$\|\mu - \nu\| = (\mu - \nu)^{+}(E) = (\mu - \nu)^{-}(E) = (\nu - \mu)^{+}(E)$$

$$= \frac{1}{2}|\mu - \nu| \quad (|\cdot| \text{表全变差范数}),$$

如 $\|q_1(x_1, \cdot) - q_2(x_2, \cdot)\| = 0$，则上式右方第二项消失．易证（5.5.9）所定义的 $\widetilde{q}(\widetilde{x}) - \widetilde{q}(\widetilde{x}, \cdot)$ 也满足（5.2.1）．

一般地，$q_i(x_i, \cdot)$ 不必是概率测度，但若定义 $\mathscr{E}_i$ 上的概率测度

$$\pi_i(x_1, x_2; \cdot) = \frac{1}{q_1(x_1) \wedge q_2(x_2)} q_i(x_i, \cdot) + \left(1 - \frac{q_i(x_i)}{q_1(x_1) \vee q_2(x_2)}\right) \cdot \delta(x_i, \cdot),$$

$$x_i \in E_i, i = 1, 2$$

此处也约定$0/0=0$，则

$$(5.5.10)\quad \widetilde{q}((x_1,x_2),\ A_1\times A_2)$$
$$=(q_1(x_1)\vee q_2(x_2))[(\pi_1(x_1,x_2;\cdot)\wedge\pi_2(x_1,x_2;\cdot))(A_1\cap A_2)]$$
$$+[(\pi_1(x,x_2;\cdot)-\pi_2(x_1,x_2;\cdot))^+(A_1)\cdot$$
$$\cdot(\pi_2(x_1,x_2;\cdot)-\pi_1(x_1,x_2;\cdot))^+(A_2)]$$
$$\cdot\|\pi_1(x_1,x_2;\cdot)-\pi_2(x_1,x_2;\cdot)\|^{-1}$$

也满足（5.2.1）.

(5.5.11) **乘积空间 q 过程的耦合.**

设 S 是有限集，即 $\mathrm{card}(S)<\infty$. 对每 $u\in S$，设 $(E_u,\mathscr{E}_u)$ 是一个如上的可测空间，对于每 $\alpha\subset S$，设 $q^\alpha(x)-q^\alpha(x,\cdot)$ 是 $(\prod\limits_{u\in\alpha}E_u,\ \prod\limits_{u\in\alpha}\mathscr{E}_u)\equiv(E,\mathscr{E})$上的 q 对，满足 $q^\phi(x)=0$，$q^\alpha(x,\cdot)$ 集中在

$$\{y\in E:\ y_u\neq x_u,\ u\in\alpha;\ y_u=x_u,\ u\in S-\alpha\}.$$

置

$$q(x,\cdot)=\sum_{\alpha\subset S}q^\alpha(x,\cdot),q(x)=q(x,E),x\in E.$$

则 $q(x)-q(x,\cdot)$ 是 $(E,\mathscr{E})$上的 q对. 类似于(5.5.2)我们可定义

$$(5.5.12)\quad \widetilde{\Omega}f(x_1,x_2)$$
$$=\sum_{\alpha\subset S}\int(q^\alpha(x_1,\cdot)-q^\alpha(x_2,\cdot))^+(dy_1)(f(y_1,x_2)-f(x_1,x_2))$$
$$+\sum_{\alpha\subset S}\int(q^\alpha(x_2,\cdot)-q^\alpha(x_1,\cdot))^+(dy_2)(f(x_1,y_2)-f(x_1,x_2))$$
$$+\sum_{\alpha\subset S}\int(q^\alpha(x_1,\cdot)\wedge q^\alpha(x_2,\cdot))(dy)(f(y,y)-f(x_1,x_2)),$$
$$(x_1,x_2)\in\widetilde{E},f\in{}_b\widetilde{\mathscr{E}}.$$

这种耦合在研究交互作用粒子系统时经常用到.

§5·6 补充与注记

定理（5.1.1）的证明是最早使用耦合的例子，它属于

Doeblin[1]. 在研究交互作用粒子系统时，首先使用耦合技巧的是 Wasershtein[1]和 Dobrushin[1]，之后有不少发展. 例如见 Liggett[3]，唐守正、刘秀芳[1]，严士健 [1]. 关于离散参数的马氏过程的耦合（甚至于可以是非马氏）的系统研究见Criffeath [2]. 我们的定理（5.1.1）的证明参考了上文. 关于连续参数马氏过程的研究比较零碎. 这里的 § 5. 2、§ 5.4 和 § 5.5是陈木法[4]结果的推广. § 5.3 的结果是新的. 推论（2.5.4）是严士健、陈木法[1]定理 5 的改进.

（5.6.1）**注** 早先（见陈[4]），我们曾给出定理（5.3.1）的另一种证法：直接使用比较定理和条件（5.2.1）导出

（5.6.2）
$$\widetilde{P}^{\min}(\lambda; x_1, x_2; A_1 \times E_2) \leqslant P_1^{\min}(\lambda, x_1, A_1)$$
$$\widetilde{P}^{\min}(\lambda; x_1, x_2; E_1 \times A_2) \leqslant P_2^{\min}(\lambda, x_2, A_2)$$
$$\lambda > 0,\ (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2, A_1 \in \mathscr{E}_1, A_1 \in \mathscr{E}_2.$$

这当然也推出定理（5.3.1）的结论. 郑君礼提醒笔者注意如下事实：使用引理（5.2.3）. (ii) 最后一步的证法及（5.6.2），可以排除定理（5.2.8）中的"有界逼近"条件.

新近，郑小谷和郑君礼使用鞅方法，在轻微的条件下，就马链情形证明了边缘正则性导致耦合的正则性. 然后，笔者与郑君礼一道完成了一般情形的证明.

（5.6.3）**定理** 给定 q 对 $q(x) - q(x, \cdot)$. 设 $E_n \uparrow E$, $\sup\limits_{x \in E_n} q(x) < \infty$, $n \geqslant 1$. 命

$$q_n(x, dy) = I_{E_n}(x) q(x, dy),\ q_n(x) = q_n(x, E).$$

并以 $P_n(\lambda, x, \cdot)$表由 $q_n(x) - q_n(x, \cdot)$所决定的 q 过程. 则 $q(x) - q(x, \cdot)$正则的充要条件是

（5.6.4）
$$\lim_{n\to\infty} P_n(\lambda, x, E_n^c) = 0, \quad \lambda > 0, x \in E.$$

证 在定理（2.3.7）的证明中，我们已有

$$P^{\min}(\lambda, x, E_n) \geqslant P_n(\lambda, x, E_n),$$
$$\lambda > 0,\ x \in E, n \geqslant 1,$$

由此立得充分性．另一方面，在引理（5.2.3）.(i)的证明中，以 E_n 代替那里的A，便得

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} P_n(\lambda,x,E_n)\geqslant P^{\min}(\lambda,x,E)$$

$$\lambda>0,\ x\in E.$$

这样，若 $q(x)-q(x,\cdot)$正则，那么．

$$1\geqslant 1-\lambda\overline{\lim_{n\to\infty}}P_n(\lambda,x,E_n^c)$$

$$=\lambda\underline{\lim}_{n\to\infty}P_n(\lambda,x,E_n)\geqslant\lambda P(\lambda,x,E)=1,$$

故条件（5.6.4）也是必要的． ▌

（5.6.5） **定理** 如果边缘 q 对 $q_i(x_i)-q_i(x_i,\cdot)$ 正则，则每一个满足（5.2.1)的耦合 q 对也正则．

证 取

$$E_i^{(n)}=\{x_i\in E_i:\ q_i(x_i)\leqslant n\},\ i=1,2,\ n\geqslant 1;$$

$$\widetilde{E}^{(n)}=E_1^{(n)}\times E_2^{(n)},\ n\geqslant 1$$

并定义

$$q_i^{(n)}(x_i,dy_i)=I_{E_i^{(n)}}(x_i)q_i(x_i,dy_i),\ i=1,2,\ n\geqslant 1;$$

$$\widetilde{q}_i^{(n)}(\widetilde{x},\widetilde{dy})=I_{\widetilde{E}^{(n)}}(\widetilde{x})\ \widetilde{q}(\widetilde{x},\widetilde{dy});$$

它们分别唯一决定 q 过程 $P_i^{(n)}(\lambda,x_i,dy_i)(i=1,2)$和 $\widetilde{P}^{(n)}(\lambda,\widetilde{x},\widetilde{dy})$．由于

$$\sup_{\widetilde{x}\in\widetilde{E}^{(n)}}\widetilde{q}(\widetilde{x})\leqslant\sup_{x_1\in E^{(n)}}q_1(x_1)+\sup_{x_2\in E^{(n)}}q_2(x_2)<\infty$$

和定理（5.6.3），我们只需再证：

$$\widetilde{P}^{(n)}(\lambda;\ x_1,x_2;\ \widetilde{E}-\widetilde{E}^{(n)})$$

$$\leqslant P_1^{(n)}(\lambda,x_1,E_1-E_1^{(n)})+P_2^{(n)}(\lambda,x_2,E_2-E_2^{(n)}),$$

$$\lambda>0,\ (x_1,x_2)\in\widetilde{E},\ n\geqslant 1.$$

利用比较定理，我们只需验证：

$$P_1^{(n)}(\lambda,x_1,E_1-E_1^{(n)})+P_2^{(n)}(\lambda,x_2,E_2-E_2^{(n)})$$

$$\geqslant\int\frac{\widetilde{q}^{(n)}(x_1,x_2;\ dy_1,dy_2)}{\lambda+\widetilde{q}^{(n)}(x_1,x_2)}\ [P_1^{(n)}(\lambda,y_1,E_1-E_1^{(n)})+$$

$$+P_2^{(n)}(\lambda, y_2, E_2-E_2^{(n)})]+\frac{\delta(x_1, x_2; \widetilde{E}-\widetilde{E}^{(n)})}{\lambda+\widetilde{q}^{(n)}(x_1, x_2)}.$$

当 $(x_1, x_2)\notin\widetilde{E}^{(n)}$时，上式

左方$\geqslant 1/\lambda$ =右方.

今设 $(x_1, x_2)\in\widetilde{E}^{(n)}$，则

$$\int\widetilde{q}^{(n)}(x_1, x_2; dy_1, dy_2)[P_1^{(n)}(\lambda, y_1, E_1-E_1^{(n)})+P_2^{(n)}(\lambda, y_2, E_2-E_2^{(n)})]$$

$$=\int\widetilde{q}(x_1, x_2; dy_1, dy_2)[P_1^{(n)}(\lambda, y_1, E_1-E_1^{(n)})+P_2^{(n)}(\lambda, y_2, E_2-E_2^{(n)})]$$

$$=(\lambda+\widetilde{q}(x_1, x_2))[P_1^{(n)}(\lambda, x_1, E_1-E_1^{(n)})+P_2^{(1)}(\lambda, x_2, E_2-E_2^{(n)})]$$

$$=(\lambda+\widetilde{q}^{(n)}(x_1, x_2))[P_1^{(n)}(\lambda, x_1, E_1-E_1^{(n)})+P_2^{(n)}(\lambda, x_2, E_2-E_2^{(n)})]。$$

第六章　粒子系统的存在性

本章的目的是应用前面几章（主要是头两章和上一章）的理论来研究交互作用粒子系统的存在性定理。这里，我们所说的存在性，是指不中断马氏过程的存在性。

在第一节里，我们仔细地讨论了关于两个 q 半群的分部积分公式。这个公式不仅对研究存在性有用，而且对研究遍历性和分枝现象也是有用的工具，本节有独立的意义。

随后，我们用三种不尽相同的方法给出存在性结果。分别见（6.4.1），（6.5.8），（6.7.6）和（6.7.29）。尤以后者最为一般。主要困难在于：我们的状态空间 $(E, \mathscr{E})$ 既非局部紧、也非 σ 紧。因此，马氏过程的不少标准的工具并不适用于我们的情况。

在第六节中，我们应用定理（6.4.1）和定理（6.5.8）于十种具体模型。这些模型曾被、或正被不同的作者所研究。我们也将说明一些具体的技巧。

§6.1　分部积分公式

设 $q_i(x)-q_i(x,\cdot)\,(i=1,2)$ 是 $(E,\mathscr{E})$ 上的两个有界、保守 q 对，则它们唯一决定 $_b\mathscr{E}$ 上的两个 q 半群（马氏半群）$P_i(t)$ $(i=1,2)$，并有母元 $\Omega_i(i=1,2)$。于是对于每 $f\in{}_b\mathscr{E}$,

$$\int_0^t P_1(s)(\Omega_1-\Omega_2)P_2(t-s)fds$$

$$=\int_0^t P_1(s)\Omega_1P_2(t-s)fds-\int_0^t P_1(s)\Omega_2P_2(t-s)fds$$

$$=\int_0^t\left(\frac{d}{ds}P_1(s)\right)P_2(t-s)fds+\int_0^t P_1(s)\left(\frac{d}{ds}P_2(t-s)\right)fds$$

$$=\int_0^t\left(\frac{d}{ds}P_1(s)P_2(t-s)\right)fds$$

$$=P_1(t)f-P_2(t)f.$$

这与普通的分部积分公式十分相近．本节的目的是研究对于一般的 q 过程（q 对不必有界），何时这个公式能够成立．

自然地，本节假定 q 对正则，记它所决定的半群为 $P(t)$．

(6.1.1) **引理** 对于每 $f\in{}_b\mathscr{E}$ 和 $x\in E$, $P(t)f(x)$ 关于 t 连续．

证 当 $t,s\geqslant 0$ 时，

$$P(t+s)f(x)-P(t)f(x)$$

$$=\int(P(s,x,dy)-\delta(x,dy))P(t)f(y),$$

于是，由 $\lim\limits_{s\downarrow 0}P(s,x,A)=\delta(x,A),A\in\mathscr{E}$ 及定理 (1.2.24) (ii) 立得

$$\lim_{s\downarrow 0}P(t+s)f(x)=P(t)f(x),\quad x\in E,\quad t\geqslant 0.$$

同样可证

$$\lim_{s\downarrow 0}P(t-s)f(x)=P(t)f(x),\quad x\in E,\quad t>0. \qquad \blacksquare$$

(6.1.2) **引理** 对于每 $t\geqslant 0$, $x\in E$ 和 $f\in{}_b\mathscr{E}$,

$$\frac{d}{dt}P(t)f(x)=\Omega P(t)f(x).$$

证 由定理 (1.2.25) 知，对于每个固定的 $x\in E$ 和 $A\in\mathscr{E}$, $\frac{d}{dt}P(t,x,A)$ 关于 t 连续且

$$\frac{d}{dt}P(t,x,A)=\int q(x,dy)P(t,y,A)-q(x)P(t,x,A)$$

或即

$$P(t,x,A)-\delta(x,A),$$

$$=\int_0^t\int q(x,dy)P(s,y,A)ds-q(x)\int_0^t P(s,x,A)ds,$$

进而

$$P(t)f(x)-f(x)$$

$$=\int_0^t\int q(x,dy)P(s)f(y)ds-q(x)\int_0^t P(s)f(x)dx$$

$$t\geqslant 0,\ x\in E,\ f\in {}_b\mathscr{E}.$$

由此及引理（6.1.1）立得所欲证. ∎

（6.1.3）**引理** 设q对满足（2.3.2），则对每$f\in {}_b\mathscr{E}$和$x\in E$,

$$\int P(t,x,dy)\int q(y,dz)f(z)$$

关于t连续. 对每$A\in\mathscr{E}$, $\int_A P(t,x,dy)q(y)$ 亦然.

证 在定理（2.3.1）的证明中，我们已证

（6.1.4） $$\int P(t,x,dy)q(y)\leqslant\int P(t,x,dy)\varphi(y)\leqslant\varphi(x)e^{ct},$$

$$x\in E,\ t\geqslant 0.$$

先设$s>0$，则

$$\left|\int P(t+s,x,dy)\int q(y,dz)f(z)-\int P(t,x,dy)\right.$$

$$\left.\int q(y,dz)f(z)\right|$$

$$=\left|\int[P(s,x,dy)-\delta(x,dy)]\int P(t,y,dz)\int q(z,dw)f(w)\right|$$

$$\leqslant(1-P(s,x,\{x\}))\int P(t,x,dy)\int q(y,dz)|f(z)|$$

$$+\int_{E\setminus\{x\}}P(s,x,dy)\int P(t,y,dz)\int q(z,dw)|f(w)|$$

$$\leqslant(1-P(s,x,\{x\}))\int P(t,x,dy)q(y)\|f\|_*$$

$$+\int_{E\setminus\{x\}}P(s,x,dy)\int P(t,y,dz)q(z)\|f\|_*$$

$$(\|f\|_*=\sup_x|f(x)|)$$

$$\leqslant e^{ct}\varphi(x)(1-P(s,x,\{x\}))\|f\|_u \qquad (\text{由 }(6.1.4))$$

$$+e^{ct}\int_{E\setminus\{x\}}P(s,x,dy)\varphi(y)\|f\|_u$$

$$=e^{ct}\|f\|_u\varphi(x)(1-P(s,x,\{x\}))$$

$$+e^{ct}\|f\|_u\left(\int P(s,x,dy)\varphi(y)-P(s,x,\{x\})\varphi(x)\right)$$

$$\leqslant e^{ct}\|f\|_u\varphi(x)(1-P(s,x,\{x\}))$$

$$+e^{ct}\|f\|_u(e^{cs}\varphi(x)-P(s,x,\{x\})\varphi(x))$$

$$\longrightarrow 0,\ \text{当 } s\searrow 0.$$

另一方面，

$$\left|\int(P(t-s,x,dy)-P(t,x,dy))\int q(y,dz)f(z)\right|$$

$$=\left|\int(\delta(x,dy)-P(s,x,dy))\int P(t-s,y,dz)\right.$$

$$\left.\int q(z,dw)f(w)\right|$$

$$\leqslant(1-P(s,x,\{x\}))\int P(t-s,x,dy)\int q(y,dz)|f(z)|$$

$$+\int_{E\setminus\{x\}}P(s,x,dy)\int P(t-s,y,dz)\int q(z,dw)|f(w)|$$

$$\leqslant e^{c(t-s)}\|f\|_u\varphi(x)(1-P(s,x,\{x\}))$$

$$+e^{c(t-s)}\|f\|_u(e^{cs}\varphi(x)-P(s,x,\{x\})\varphi(x)) \qquad (\text{由 }(6.1.4))$$

$$\longrightarrow 0,\ \text{当 } s\searrow 0.$$

这便证得前一项断言。类似可证另一断言。 ▌

(6.1.5) **引理** 在 (2.3.2) 的条件下，我们有

$$\frac{d}{dt}P(t)f(x)=P(t)\Omega f(x),\ t\geqslant 0,\ x\in E,\ f\in {}_b\mathscr{E}.$$

证 由 (6.1.4) 和控制收敛定理得

$$\frac{d}{dt}P(t,x,A)=\lim_{s\downarrow 0}\int P(t,x,dy)\frac{P(s,y,A)-\delta(y,A)}{s}$$

$$= \int P(t,x,dy)\,q(y,A) - \int_A^t P(t,x,dy)\,q(y).$$

又由（6.1.4），上式右方在有限 t 区间上有界，从而

$$P(t,x,A) - \delta(x,A)$$
$$= \int_0^t ds \int P(s,x,dy)\,q(y,A) - \int_0^t \int_A P(s,x,dy)\,q(y).$$

进而

$$P(t)f(x) - f(x) = \int_0^t P(s)\,\Omega f(x)\,ds,\quad t\geqslant 0,\quad x\in E.$$

再由引理（6.1.3）立得本引理. ∎

下面是本节的主要结果

（6.1.6）**定理** 设 $q_i(x) - q_i(x,\cdot)$ $(i=1,2)$ 满足（2.3.2）. 则对于每一个 $f\in {}_b\mathscr{E}$ 和 $x\in E$，我们有

$$P_1(t)f(x) - P_2(t)f(x) = \int_0^t P_1(s)\,(\Omega_1 - \Omega_2)\,P_2(t-s)f(x)\,ds.$$

证 显然，只需证

$$(6.1.7)\quad \frac{d}{ds}[P_1(s)P_2(t-s)f(x)]$$
$$= P_1(s)\,(\Omega_1 - \Omega_2)\,P_2(t-s)f(x)$$
$$t>s\geqslant 0,\quad x\in E,\quad f\in {}_b\mathscr{E}.$$

由于

$$(6.1.8)\quad [P_1(s+\triangle s)P_2(t-s-\triangle s)f(x)$$
$$- P_1(s)P_2(t-s)f(x)]/\triangle s$$
$$= \int \frac{P_1(s+\triangle s,x,dy) - P_1(s,x,dy)}{\triangle s}$$
$$\times \int P_2(t-s-\triangle s,y,dz)f(z)$$
$$+ \int P_1(s,x,dy)$$
$$\times \int \frac{P_2(t-s-\triangle s,y,dz) - P_2(t-s,y,dz)}{\triangle s} f(z)$$

$$=I_1+I_2.$$

若 $\triangle s>0$，则由引理（6.1.1）和定理（1.2.24）得

$$I_1=\int\frac{P(\triangle s,x,dy)-\delta(x,y)}{\triangle s}\int P_1(s,y,dz)$$

$$\times\int P_2(t-s-\triangle s,z,dw)f(w)$$

$$=\int_{E\setminus\{x\}}\frac{P_1(\triangle s,x,dy)}{\triangle s}\int P_1(s,y,dz)$$

$$\times\int P_2(t-s-\triangle s,z,dw)f(w)$$

$$-\frac{1-P_1(\triangle s,x,\{x\})}{\triangle s}\int P_1(s,x,dz)$$

$$\times\int P_2(t-s-\triangle s,z,dw)f(w)$$

$$\xrightarrow[\triangle s\downarrow 0]{}\int q_1(x,dy)\int P_1(s,y,dz)\int P_2(t-s,z,dw)f(w)$$

$$-q_1(x)\int P_1(s,x,dz)\int P_2(t-s,z,dw)f(w)$$

$$=\Omega_1P_1(s)P_2(t-s)f(x)$$

当 $\triangle s<0$，也有同样的结果。因此，我们有

$$(6.1.9)\qquad I_1\longrightarrow\Omega_1P_1(s)P_2(t-s)f(x),\ \triangle s\to 0.$$

另一方面，当 $\triangle s>0$ 时，

$$I_2=\int P_1(s,x,dy)\int\frac{\delta(y,dz)-P_2(\triangle s,y,dz)}{\triangle s}$$

$$\cdot\int P_2(t-s-\triangle s,z,dw)f(w).$$

由于

$$\left|\int\frac{\delta(y,dz)-P_2(\triangle s,y,dz)}{\triangle s}\int P_2(t-s-\triangle s,z,dw)f(w)\right|$$

$$\leqslant 2\|f\|_{*}q(y),\quad y\in E,\ \triangle s>0.$$

从而由定理（1.2.24）和控制收敛定理知

$$I_2 \longrightarrow -P_1(s)\Omega_2 P_2(t-s)f(x), \triangle s \searrow 0.$$

当 $\triangle s<0$ 时，类似地可得

$$I_2 = \int P_1(s,x,dy)\int \frac{\delta(y,dz) - P_2(-\triangle s, y, dz)}{-\triangle s}$$

$$\cdot \int P_2(t-s,z,dw)f(w)$$

$$\xrightarrow[\triangle s\uparrow 0]{} -P_1(s)\Omega_2 P_2(t-s)f(x)$$

从而又有

(6.1.10) $\quad I_2 \longrightarrow -P_1(s)\Omega_2 P_2(t-s)f(x), \quad \triangle s \to 0.$

综合 (6.1.8)——(6.1.10)，得

(6.1.11) $$\frac{d}{ds}[P_1(s)P_2(t-s)f(x)]$$

$$= \Omega_1 P_1(s)P_2(t-s)f(x) - P_1(s)\Omega_2 P_2(t-s)f(x)$$

$$t>s\geqslant 0, \ x\in E, \ f\in \mathscr{B}.$$

若记 $g=P_2(t-s)f$，则

$$\Omega_1 P_1(s)g(x)$$

$$= \left(\frac{d}{ds}P_1(s)g(x)\right) \quad \text{(由引理 (6.1.2))}$$

$$= P_1(s)\Omega_1 g(x) \quad \text{(由引理 (6.1.5))}$$

由此及 (6.1.11) 立得 (6.1.7)． ▌

定理 (6.1.6) 可稍许加强为

(6.1.12) **推论** 把定理 (6.1.6) 中的条件 (2.3.2) 换成 (2.3.4)，结论仍然成立.

证 我们不用 (6.1.3)．若注意

$$\int_0^t \int P(s,x,dy)q(y)ds \leqslant \int_0^t e^{q(x)(t-s)}ds\int P(t,x,dy)q(y).$$

便可证明 (6.1.5) 关于 t 几乎处处成立. 然后，(6.1.7) 关于几乎所有的 $[0,t]$ 中的 s 成立. 这仍然导出定理的结论. ▌

§6.2 一阶矩的估计

在本章余下各节里，我们将考虑如下交互作用的粒子系统。

设 S 为任一可数集。对于每 $u\in S$，设 $(E_u,\rho_u,\mathscr{E}_u)$ 为完备可分距离空间，$\mathscr{E}_u$ 为距离 ρ_u 生成的 Borel σ 代数。$(\mathbf{E},\mathscr{E})$ 为 $(\mathbf{E}_u,\mathscr{E}_u)$ $(u\in S)$ 的乘积空间。

设 $\{k_u: u\in S\}$ 为严格正的可和序列，令

$$p_\alpha(x,y)=\sum_{u\in\alpha}\rho_u(x_u,y_u)k_u\leqslant\infty,$$

$$x,\ y\in E,\ \alpha\subset S.$$

任取 $\theta=\{\theta_u\in E_u;\ u\in S\}$ 为参考点，并令

$$p_\alpha(x)=\sum_{u\in\alpha}\rho_u(x_u,\theta_u)k_u\leqslant\infty,\ x\in E,\ \alpha\subset S.$$

$$\rho_u(x)=\rho_u(x_u,\theta_u),\ x\in E,\ u\in S.$$

若 $\alpha=\{u\}$，则简记 p_α 为 p_u；若 $\alpha=S$，则略去 p_α 中的 α 不写。

记 S 的有限子集的全体为 $\mathscr{S}_f$。

(6.2.1) **定义** 称 $(E,\mathscr{E})$ 上的 q 对序列 $\{q_n(x)-q_n(x,\cdot)\}_{n=1}^\infty$ 具有局部特征，如果存在 $\{\Lambda_n\}_1^\infty\subset\mathscr{S}_f$，$\Lambda_n\nearrow S$，使得对于每 $n\geqslant1$，

$$q(x,\cdot)=\sum_{\alpha\subset\Lambda_n}q_n^\alpha(x,\cdot),\ q_n(x)=q_n(x,E),\ x\in E$$

此处 $q_n^\alpha(x)-q_n^\alpha(x,\cdot)$ 是一个 q 对，满足

(6.2.2) 对于每 $A\in\mathscr{E}$，$q_n^\alpha(\cdot,A)$ 只依赖于坐标 $u\in\Lambda_n$，从而可测；

(6.2.3) 对于每 $x\in E$，$q_n^\alpha(x,\cdot)$ 集中在

$$\{y\in E:\ y_u\neq x_u,\ u\in\alpha;\ y_u=\theta_u,\ u\notin\alpha\};$$

(6.2.4) $q_n^\varnothing(x)=0,\ x\in E.$

我们还将假定

(6.2.5) $\int q\ (\theta, dy)\rho_u(y) < \infty$, $u \in S, x \in E$, $n \geqslant 1$.

以下，我们将固定这个 q 对序列。

命

$$\gamma_u^{(n)} = \int q_n(\theta, dy)\rho_u(y), \quad u \in S, \quad n \geqslant 1$$

则显然有

(6.2.6) $$\begin{cases} \gamma_u^{(n)} = 0, & \text{为 } u \notin \Lambda_n, \quad n \geqslant 1 \\ \gamma_u^{(n)} \uparrow \text{某 } \beta_u, & n \to \infty, \quad u \in S. \end{cases}$$

(6.2.7) **定义** 称 $S \times S$ 上的非负矩阵 $B = (b(u,v): u, v \in S)$ 是 $M(>0)$ 可控的，如果

$$\sum_v b(u,v)k_v \leqslant Mk_u, \quad u \in S.$$

给定 M 可控矩阵 $B = (b(u,v))$ ．命

$$b_n(u,v) \doteq \begin{cases} b(u,v), & \text{为 } u, v \in \Lambda_n, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

则 $B_n = (b_n(u,v): u, v \in S)$ 也是 M 可控的。

(6.2.8) **定理** 假设存在 $c_1 \in \boldsymbol{R}$ 和一个 M 可控矩阵 B，使得

(6.2.9) $$\int q_n(x,dy)(\rho_u(y) - \rho_u(x)) \leqslant \beta_u + c_1\rho_u(x) + \sum_{v \in \Lambda_n} \rho_v(x)b(v,u)$$
$$u \in \Lambda_n, \quad x \in E, \quad n \geqslant 1.$$

则

(6.2.10) $$\int P_n^{\min}(t,x,dy)\rho_v(y) \leqslant \sum_{u \in \Lambda_n}[\rho_u(x)e^{c_1 t} + \beta_u e^{c_2 t}]\sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^m}{m!}b_n^{(m)}(u,v)$$
$$t \geqslant 0, \quad x \in E, \quad v \in \Lambda_n, \quad n \geqslant 1$$

此处，$P_n^{\min}(t,x,\cdot)$ 是由 $q_n(x) - q_n(x,\cdot)$ 决定的最小 q 过程，

而

$$(6.2.11)\quad \begin{cases} c_2 \geqslant c_1 \vee 1, & \text{为 } \beta_{\cdot} \neq 0, \\ c_2 = 0, & \text{为 } \beta_{\cdot} = 0. \end{cases}$$

证 定义 Λ_i 上的列向量

$$P^{(n)}(x) = (\rho_u(x) : u \in \Lambda_n),\ \beta^{(n)} = (\beta_u : u \in \Lambda_u),$$

$$x \in E,\ n \geqslant 1$$

视 $P_n = (b_n(u,v))$ 为 $\Lambda_n \times \Lambda_n$ 上的矩阵．则（6.2.10）等价于

$$(6.2.12)\quad \int P_n^{\min}(t,x,dy) P^{(n)}(y)$$

$$\leqslant e^{t(C_1 I_n + B_n^*)} P^{(n)}(x) + e^{t(C_2 I_n + B_n^*)} \beta^{(n)},$$

$$t \geqslant 0,\ x \in E,\ n \geqslant 1.$$

此处 I_i 是 $\Lambda_n \times \Lambda_n$ 上的单位矩阵，而 B_n^* 为 B 的转置．由比较定理（2.1.11）和定理（2.2.5），我们只需证

$$(6.2.13)\quad e^{t(C_1 I_n + B_n^*)} P^{(n)}(x) + e^{t(C_2 I_n + B_n^*)} \beta^{(n)} \geqslant$$

$$\geqslant \int_0^t ds \int q_n(x,dy) [e^{s(C_1 I_n + B_n^*)} p^{(n)}(y) +$$

$$+ e^{s(C_2 I_n + B_n^*)} \beta^{(n)}] e^{-(t-s) q_n(x)} + e^{-t q_n(x)} P^{(\ )}(x),$$

$$t \geqslant 0,\ x \in E,\ n \geqslant 1.$$

简记

$$H_i = c_i I_n + q_n(x) I_n + B_n^*,\ i = 1,\ 2,$$

则上式成为

$$e^{tH_1} P^{(n)}(x) + e^{tH_2} \beta^{(n)}$$

$$\geqslant \int_0^t ds \int q_n(x,dy) [e^{sH_1} P^{(n)}(y) + e^{SH_2} \beta^{(n)}] + P^{(n)}(x),$$

$$t \geqslant 0,\ x \in E,\ n \geqslant 1.$$

当 $t = 0$ 时，此式平凡．从而只需证

$$e^{tH_1} H_1 P^{(n)}(x) + e^{tH_2} H_2 \beta^{(n)}$$

$$\geqslant \int q\ (x,dy) [e^{tH_1} P^{(n)}(y) + e^{tH_2} \beta^{(n)}],$$

$$t\geqslant 0,\ x\in E,\ n\geqslant 1.$$

由条件（6.2.5）和（6.2.9）上式可改写成

$$e^{tH_1}(c_1I_n+B_n^*)P^{(n)}(x)+e^{tH_2}(c_2I_n+B_n^*)\beta^{(n)}$$
$$\geqslant e^{tH_1}\left[\int q_n(x,dy)(P^{(n)}(y)-P^{(n)}(x))-\beta^{(n)}\right]$$
$$+e^{tH_1}\beta^{(\ )},\ t\geqslant 0,\ x\in E,\ n\geqslant 1.$$

这样，我们只需验证

$$(6.2.14)\qquad \int q_n(x,dy)(P^{(n)}(y)-P^{(n)}(x))$$
$$\leqslant \beta^{(\ )}+c_1P^{(n)}(x)+B_n^*P^{(n)}(x)$$

和

$$(6.2.15)\qquad e^{tH_1}\beta^{(n)}\leqslant e^{tH_2}(c_2\beta^{(n)}+B_n^*\beta^{(n)}).$$

由（6.2.9）立得（6.2.14），另一方面，由于 $B_n^*\geqslant 0$，$\beta^{(\ )}\geqslant 0$，故由（6.2.11）立得（6.2.15）． ∎

§6.3 互聚收敛性

本节假定 q 对正则．我们要研究 $\{P_n(t)f(x)\}_1^\infty$ 成为基本列的条件．

记

$$E_0=\{x\in E:\ p(x)<\infty\}$$

并设 $\mathscr{E}_0$ 是由 $\mathscr{E}$ 导出的 E_0 上的 σ 代数．再记

$$\boldsymbol{L}=\{f\in\mathscr{E}:\ L(f)\equiv\sup\{|f(x)-f(y)|/p(x,y):$$
$$x,y\in E_0,x\neq y\}<\infty\}$$

（6.3.1）**引理** 假设

$$(6.3.2)\qquad c_3\equiv\sup_{n\geqslant 1}\inf_{\tilde{q}_n(x,\cdot)}\sup\left\{\int\tilde{q}_n((x^{(1)},x^{(2)}),\right.$$
$$dy^{(1)}dy^{(2)})(p(y^{(1)},y^{(2)})-p(x^{(1)},x^{(2)}))$$
$$/p(x^{(1)},x^{(2)}):$$

$$x^{(1)}, x^{(2)} \in E_0, x^{(1)}|_{\Lambda_n} \neq x^{(2)}|_{\Lambda_n}, x^{(1)}|_{S\setminus\Lambda_n} =$$

$$= x^{(2)}|_{S\setminus\Lambda_n} \Big\} < \infty.$$

此处 $x|_{\Lambda_n}$ 表 x 在 Λ_n 上的限制，$\widetilde{q}_n(\widetilde{x},\cdot)$ 取遍 $q_n(x,\cdot)$ 的满足条件（5.1.6）的正则耦合. 那么，对于每 $n\geqslant 1$ 和一切 $x,y\in E_0$ $: x|_{S\setminus\Lambda_n} = y|_{S\setminus\Lambda_n}$，我们有

(6.3.3) $$|P_n(t)f(x) - P_n(t)f(y)| \leqslant L(f)e^{tc_3}p(x,y)$$

$$t\geqslant 0,\ f\in \boldsymbol{L}.$$

证 固定 n，对于任给的 $\varepsilon>0$，选 $\widetilde{q}_n(\widetilde{x},\cdot)$ 使

$$\int \widetilde{q}_n((x^{(1)}, x^{(2)}), dy^{(1)}dy^{(2)})(p(y^{(1)}, y^{(2)}) - p(x^{(1)}, x^{(2)}))$$

$$\leqslant (c_3+\varepsilon)p(x^{(1)}, x^{(2)}),$$

$$x^{(1)}, x^{(2)} \in E_0, x^{(1)}|_{S\setminus\Lambda_n} = x^{(2)}|_{S\setminus\Lambda_n}.$$

于是，仿定理（2.3.1）之证，我们得到

$$\int \widetilde{P}_n(t, (x^{(1)}, x^{(2)}), dy^{(1)}dy^{(2)})p(y^{(1)}, y^{(2)})$$

$$\leqslant e^{t(c_3+\varepsilon)}p(x^{(1)}, x^{(2)}),$$

$$t\geqslant 0,\ x^{(1)}, x^{(2)} \in E_0, x^{(1)}|_{S\setminus\Lambda_n} = x^{(2)}|_{S\setminus\Lambda_n}.$$

如 $f\in \boldsymbol{L}$ 且 $x|_{S\setminus\Lambda_n} = y|_{S\setminus\Lambda_n}$，则由条件（5.1.6）得

$$|P_n(t)f(x) - P_n(t)f(y)|$$

$$\leqslant L(f)\int \widetilde{P}_n(t, (x,y), dz^{(1)}, dz^{(2)})p(z^{(1)}, z^{(2)})$$

$$\leqslant L(f)e^{t(c_3+\varepsilon)}p(x,y),\quad t\geqslant 0.$$

但 $\varepsilon>0$ 是任意的，从而（6.3.3）对此 n 成立. 但 n 也是任意的，故引理成立. ∎

（6.3.4）**定理** 假设对于每 $n\geqslant 1$，$q_n(x) - q_n(x,\cdot)$ 满足条件（2.3.2）（或(2.3.4)），再设（6.3.2）和（6.2.8）的假设满足. 并且

(6.3.5) $\sum_{u}\beta_u k_u<\infty$,

(6.3.6) 存在 $c_4\geqslant 0$，使

$$\sum_{\substack{\beta\subset A_m\setminus A_n\\ q_m^\beta(x,\cdot)\text{依赖于}x|_{S-\beta}}}\int q_m^\beta(x,dy)\,p_\beta(x,y)$$

$$+\sum_{\substack{\alpha\subset A_n\\ \alpha\neq\phi}}\ \sum_{\substack{\beta\subset A_m\\ \beta\neq\alpha,\ \beta\cap A_n=\alpha}}\int q_m^\beta(x,dx)\,p_\beta(x,y)$$

$$\leqslant c_4\sum_{u\in A_m}\rho_u(x)k_u c_u(m,n),$$

$$x\in E,\ m\geqslant n\geqslant 1.$$

此处

(6.3.7) $c_5\equiv\sup\{c_u(m,n):u\in S,\ m\geqslant n\geqslant 1\}<\infty$,

(6.3.8) $\lim\limits_{m\geqslant n\to\infty} c_u(m,n)=0,\ u\in S.$

那么，对于每 $t\geqslant 0$，$f\in \boldsymbol{L}$ 和 $x\in\mathscr{D}$，$\{P_n(t)f(x):n\geqslant 1\}$ 是一个 Cauchy 列. 此处

(6.3.9) $$\mathscr{D}=\left\{x\in E_0:\lim_{m\geqslant n\to\infty}\sum_{\substack{\beta\subset A_m\setminus A_n\\ q_m^\beta(x,\cdot)\text{只依赖于}x|_\beta}}\int q_m^\beta(x,dy)\cdot p_\beta(x,y)=0\right\}.$$

证 先设 $f\in\boldsymbol{L}$. 由于

(6.3.10) $$|(\Omega_n-\Omega_m)f(x)|$$

$$\leqslant\sum_{\beta\subset A_m\setminus A_n}\int q_m^\beta(x,dy)|f(y)-f(x)|$$

$$+\sum_{\substack{\alpha\subset A_n\\ \alpha\neq\phi}}\ \sum_{\substack{\beta\subset A_m\\ \beta\neq\alpha,\ \beta\cap A_n=\alpha}}\int q_m^\beta(x,dy)|f(y)-f(x)|$$

$$\leqslant L(f)\sum_{\beta\subset A_m\setminus A_n}\int q_m^\beta(x,dy)\,p^\beta(x,y)+$$

$$+L(f)\sum_{\substack{\alpha\subset\Lambda_n\\ \alpha\neq\phi}}\sum_{\substack{\beta\subset\Lambda_m\\ \beta\neq\alpha,\ \alpha\cap\Lambda_n=\alpha}}\int q_m^\beta(x,dy)p_\beta(x,y)$$

$$\leqslant L(f)\sum_{\substack{\beta\subset\Lambda_m\setminus\Lambda_n\\ q_m^\beta(x,\cdot)\text{只依赖于 }x|_\beta}}\int q_m^\beta(x,dy)p_\beta(x,y)+$$

$$+c_4L(f)\sum_{u\in\Lambda_m\setminus\Lambda_n}\rho_u(x)k_uc_u(m,n)$$

$$+c_4L(f)\sum_{u\in\Lambda_n}\rho_u(x)k_uc_u(m,n)$$

若用 $(X_n(t):t\geqslant 0)$ 表 $q_n(x)-q_n(x,\cdot)$ 所决定的马氏过程，而用 $\boldsymbol{E}_n^x$ 表相应的期望算子，则由 §6.1 的分部积分公式，定理(6.2.8) 和 (6.3.3) 及上式得，当 $f\in {}_b\boldsymbol{L}$ 时，

(6.3.11) $$|P_n(t)f(x)-P_m(t)f(x)|$$

$$\leqslant\int_0^t ds\boldsymbol{E}_n^x[|(\Omega_n-\Omega_m)P_m(t-s)f(X_n(s))|]$$

$$\leqslant\int_0^t L(f)e^{c_3(t-s)}ds\Big[\sum_{\substack{\beta\subset\Lambda_m\setminus\Lambda_n\\ q_m^\beta(x,\cdot)\text{只依赖于 }x|_\beta}}q_m^\beta(x,dy)p_\beta(x,y)$$

$$+c_4\sum_{u\in\Lambda_m\setminus\Lambda_n}\rho_u(x)k_uc_u(m,n)\Big]$$

$$+c_4\int_0^t L(f)e^{c_3(t-s)}\sum_{u\in\Lambda_n}\rho_u(x_n(s))\,k_uc_u(m,n)ds$$

$$\leqslant L(f)\Big[\sum_{\substack{\beta\supset\Lambda_m\setminus\Lambda_n\\ q_m^\beta(x,\cdot)\text{只依赖于 }x|_\beta}}q_m^\beta(x,dy)p_\beta(x,y)+$$

$$+c_4\sum_{u\in\Lambda_m\setminus\Lambda_n}\rho_u(x)k_uc_u(m,n)\Big]\int_0^t e^{c_3(t-s)}ds+$$

$$+c_4L(f)\int_0^t e^{c_3(t-s)}ds\Big[\sum_{u\in\Lambda_n}\sum_{v\in\Lambda_n}(\rho_v(x)e^{c_1s}+$$

$$+\beta_v e^{c_2 s})\sum_{l=0}^{\infty}\frac{s^l}{l!}b^{(l)}(v,u)k_u c_u(m,n)\Big].$$

首先注意，这个估计对于$f\in \boldsymbol{L}_+$（非负$\boldsymbol{L}$中之）也对．事实上，我们可用$f_N\equiv f\wedge N$代替f，然后命$N\to\infty$（注意$L(f_N)\leqslant L(f)\wedge N$）．进而，若用$2L(f)$代替上式右方中的$L(f)$，则上式对于$f\in\boldsymbol{L}$亦真．其次，由（6.3.7）和（6.3.9）知，当$m\geqslant n\to\infty$时，上式右方的第一项趋于零．至于第二项，被积函数受控于

$$c_5 e^{c_3(t-s)}\Big[e^{(c_1+M)s}p(x)+e^{(c_2+M)s}\sum_v \beta_v k_v\Big]$$

故我们可以在积分号下取极限． ▌

（6.3.12）**注** 一般地说，要求出c_3是很困难的．但对于定理（6.3.4）的目的来说，只需给出c_3的上界的一个估计便已足够．通常，选取一个适当的耦合来作这种估计．参见§6.5和§6.6．

（6.3.13）**推论** 如果条件（6.2.9）（或（6.2.10）），条件（6.3.2）（或（6.3.3）），条件（6.3.5），分部积分公式以及满足（6.3.7）和（6.3.8）的$c_u(m,n)$使得不等式(6.3.10)（只看估计Ⅰ）成立，则定理（6.3.4）的结论依然成立．

§6.4 存 在 性

本节将证明如下的存在定理．

（6.4.1）**定理** 在定理（6.3.4）或推论（6.3.13）的条件下，如果$\mathscr{D}$在E_0中稠（依距离$P(x,y)$，则存在$\boldsymbol{L}$上的一个算子半群$P(t)$，使得$P(0)=I$，在$\boldsymbol{L}$的一致闭包$\overline{\boldsymbol{L}}$上是强压缩的，并且对于一切$f\in\boldsymbol{L}$，它具有如下性质：

（6.4.2）　$|P(t)f(x)-P(t)f(y)|\leqslant L(f)e^{c_3 t}p(x,y),$

$$x,\ y\in E_0,$$

(6.4.3)　对 $x\in\mathscr{D}$，在有限 t 区间上一致地有

$$\lim_{n\to\infty} P_n(t)f(x)=P(t)f(x).$$

此外，如果每 $(\overline{E}, \rho_u, \mathscr{E}_u)$ $(u\in S)$ 局部紧，而且 $\overline{L}$ 包含只依赖有限多个坐标的具有紧支撑的连续函数*)，则存在取值于 $(E_0, \mathscr{E}_0)$ 上的马氏过程 $\{X(t), P^x\}$，使得

(6.4.4)
$$P(t)f(x)=E^x f(X(t))=\int f(y)P^x(X(t)\in dy),\quad t\in L,\ x\in E_0.$$

证　分两部分。

(一) 半群 $P(t)$ 的构造。

首先，由定理 (6.3.4)，我们可定义

$$P(t)f(x)=\lim_{n\to\infty} P_n(t)f(x),\ f\in L,\ x\in\mathscr{D},$$

而且此收敛性在有限 t 区间上一致。特别地，由引理 (6.3.1) 知，对于每 $m\geqslant 1$，

(6.4.5)
$$|P(t)f(x^{\Lambda_m})-P(t)f(y^{\Lambda_m})|\leqslant L(f)e^{c_3 t}p(x,y)\quad x,\ y\in\mathscr{D}.$$

此外

$$x^{\Lambda_m}=x|_{\Lambda_m}\times\theta_{S\setminus\Lambda_m},\ x\in E_0.$$

这表明 $P(t)f$ 在

$$\mathscr{D}_0\equiv\{x^{\Lambda_m}: x\in\mathscr{D},\ m\geqslant 1\}$$

上一致连续。但 $\mathscr{D}$ 依距离 $p(x)$ 在 E_0 中稠，故 $\mathscr{D}_0$ 也在 E_0 中稠。因而 $P(t)f$ 可唯一扩张成 E_0 上的一致连续函数，仍然记作 $P(t)f$，由一致连续性及 (6.4.5) 立得 (6.4.2)。

为证明半群性，我们还需要若干准备。

(6.4.6) **引理**　设 $\mathscr{G}\subset L$，$\sup\{L(g): g\in\mathscr{G}\}<\infty$。则对

---

*)．如 $E_u=R^d$ $(d\geqslant 1)$ 或 $Z_+=\{0,1,2,\cdots\}$，则此条件满足。另一处理方法见定理 (9.7.6)。

于每 $t\geqslant 0$ 和 $x\in E_0$，关于$g\in\mathscr{G}$一致地有$(\mathbf{P}_n(t)-\mathbf{P}(t))g(x)\to 0$，$n\to\infty$。

证 因为

$$\begin{aligned}&|P_n(t)g(x)-P(t)g(x)|\\ \leqslant&|P_n(t)g(x_0)-P(t)g(x_0)|+|P(t)g(x)-P(t)g(x_0)|\\ &+|P_n(t)g(x_0)-P_n(t)g(x|_{\Lambda_n}\times x_0|_{S\setminus\Lambda_n})|\\ &+|P_n(t)g(x|_{\Lambda_n}\times x_0|_{S\setminus\Lambda_n})-P_n(t)g(x)|\end{aligned}$$

由 (6.4.2) 及 (6.3.1) 知，上式右方

$$\begin{aligned}\leqslant&|P_n(t)g(x_0)-P(t)g(x_0)|\\ &+L(g)e^{c_3t}p(x,x_0)\\ &+L(g)e^{c_3t}p_{\Lambda_n}(x,x_0)\\ &+L(g)p_{S\setminus\Lambda_n}(x,x_0)P_n(t)1\\ \leqslant&|P_n(t)g(x_0)-P(t)g(x_0)|\\ &+3L(g)e^{(c_3\vee 1)t}p(x,x_0).\end{aligned}$$

任给 $\varepsilon>0$，可选 $x_0\in\mathscr{D}$ 使右方第二项关于 g 一致地小于 ε，另一方面，由 (6.3.11) 可见，可选 n_0，使当 $n\geqslant n_0$ 时，第一项关于 g 一致地小于 ε。故当 $n\geqslant n_0$ 时，右方关于 g 一致地小于 ε。但 ε 任意，证得本引理。 ▌

(6.4.7) **引理** 设$\{f_m\}_0^\infty\subset\boldsymbol{L}$，$\sup\limits_{m\geqslant 0}L(f_m)<\infty$。

如果

(i) $\sup\limits_{m\geqslant 0}\|f_m\|_u<\infty$ 且 $f_m\to f_0$，逐点

或者

(ii) $0\leqslant f_m\uparrow f_0$，

则对于每 $t\geqslant 0$，

$$\lim_{m\to\infty}P(t)f_m(x)=P(t)f_0(x),\quad x\in E_0.$$

证 由引理 (6.4.6) 知，对于 $m\geqslant 0$ 一致地有

$$\lim_{n\to\infty}P_n(t)f_m(x)=P(t)f_m(x),\quad x\in E_0.$$

然而，在条件 (i) 或 (ii) 之下，

$$\lim_{m\to\infty} P_n(t)f_m(x) = P_n(t)f_0(x),\quad x\in E_0,\quad n\geqslant 1.$$

这样，由前一事实，我们可以先选足够大的n_0，使

$$\begin{aligned}&|P(t)f_m(x)-P(t)f_0(x)|\\ &\leqslant |P(t)f_m(x)-P_{n_0}(t)f_m(x)|+|P(t)f_0(x)-P_{n_0}(t)f_0(x)|\\ &\quad +|P_{n_0}(t)f_m(x)-P_{n_0}(t)f_0(x)|,\end{aligned}$$

右方的前两项关于$m\geqslant 0$一致地任意地小；然后由后一事实，可对此n_0，选足够大的m，使上式右方第二项也任意地小。

(6.4.8) **引理** $P(t)$是L上的正算子、依一致范数是压缩的。此外，若$f\in L$，$|f(x)|\leqslant\tilde{c}\,p(x)$，则

(6.4.9) $$|P(t)f(x)|\leqslant\tilde{c}p(x)e^{t(c_1+M)}+\tilde{c}\,e^{t(c_2+M)}\sum_u \beta_u k_u.$$

证 由

$$\begin{aligned}&|P(t)f(x)|\leqslant|P_n(t)f(x)|+|P(t)f(x)-P_n(t)f(x)|\\ &\leqslant\|f_u\|+|P(t)f(x)-P_n(t)f(x)|.\end{aligned}$$

和引理 (6.4.6) 可见

$$|P(t)f(x)|\leqslant\|f\|_u,\quad f\in {}_bL,\quad x\in E_0.$$

此即是强压缩性。类似地可证$P(t)$的正性。最后，由$P(t)$的正性，我们只需就$f(x)=P(x)$证明 (6.4.9)。但这可由定理 (6.2.8) 和 (6.4.6) 直接得到。 ∎

现在，我们可将$P(t)$唯一地扩张成$\overline{L}$上的正的压缩算子。我们已完成了证明半群性的准备。

首先，

$$P_n(t)P_n(s)=P_n(t+s),\quad t,s\geqslant 0,\quad n\geqslant 1.$$

其次，当$f\in {}_bL$时，

$$\begin{aligned}&g_n\equiv(P(s)-P_n(s))f\in\mathscr{L}\\ &\sup_{n\geqslant 1}\|g_n\|\leqslant 2\,\|f\|_u<\infty,\\ &\sup_{n\geqslant 1}L(g_n)\leqslant 2\,L(f)\,e^{c_3 s}<\infty,\\ &\lim_{n\to\infty}g_n=0.\quad\text{(由引理 (6.4.6))}\end{aligned}$$

从而由引理（6.4.7）得

$$\lim_{n\to\infty} P(t)\,(P(s)-P_n(t))P_n(s)=0,\quad x\in E_0.$$

另一方面，由 $\sup_{n\geq 1}\{L(P_n(s)f)\}\leq L(f)e^{c_s s}$ 及引理（6.4.6）得

$$\lim_{n\to\infty}(P(t)-P_n(t))P_n(s)f(x)=0,\ x\in E.$$

故得

$$P(t)P(s)f=P(t+s)f,\quad f\in {}_b\boldsymbol{L}$$

然后由 $P(t)$ 的正性及引理（6.4.7）．(ii) 知，上式对 $f\in \boldsymbol{L}_+$，进而对 $f\in \boldsymbol{L}$ 亦真． ▌

（二）过程 $\{X(t):\ t\geq 0\}$ 的构造．

先固定 $t\geq 0$ 和 $x\in E_0$．

若 $T=\{u_1,\cdots,u_n\}$ 是 S 的任一有限子集，我们用 $\mathscr{C}_0^T$（相应地 $\boldsymbol{L}_0^T$）表示只依赖于 T 中坐标的具有紧支撑的连续函数（相应地，${}_b\boldsymbol{L}$ 中的函数）的全体．一般地，用 $\mathscr{C}_0$（相应地 $\boldsymbol{L}_0$）表示只依赖于有限多个坐标的具有紧支撑的连续函数（相应地，${}_b\boldsymbol{L}$ 中的函数）的全体．

由假设，$\overline{\boldsymbol{L}}\supset\mathscr{C}_0^T$，可视 $f\to P(t)f(x)$ 为 $\mathscr{C}_0^T$ 上的正的线性泛函．于是由 Riesz 表现定理知，存在 $\mathscr{E}_T\times E_{S\setminus T}$ 上的非负测度 π_T，使

$$(6.4.10)\qquad \pi_T(f)=P(t)f(x),\ f\in\mathscr{C}_0^T.$$

在 E_T 上，取紧集列 $E^{(m)}\uparrow E_T$，$m\to\infty$．并命

$$f_m(x)=\frac{\rho_T(x,E_T\setminus E^{(m)})}{1+\rho_T(x,E\setminus E^{(m)})},\ x\in E_T,$$

则

$$(6.4.11)\qquad \begin{aligned}&f_m(x)\uparrow 1,\ m\to\infty,\ x\in E_T,\\ &L(f_m)\leq 1,\ m\geq 1,\end{aligned}$$

视 f_m 为 E 上的函数，则 $f_m\in\mathscr{C}_0^T$．若 $f\in\boldsymbol{L}_0$，则 $ff_m\in\mathscr{C}_0^T$，从而由（6.4.10）得

$$\pi_T(ff_m)=P(t)\,(ff_m)\,(x).$$

由此及 (6.4.11) 和引理 (6.4.7) 、 (ii) 知, (6.4.10) 对于 $f\in \boldsymbol{L}_0$ 亦真. 特别地, 对于 $f\in \mathscr{C}_0$ 亦真. 这表明$\{\pi_T: T\in \mathscr{S}_f\}$是 $\prod_{\iota\in S} E_u$ 上的一个概率测度的相容族. 于是由 Kolmogorov 扩张定理知, 存在$\prod_{\iota\in S} E_u$ 上的概率测度 $\pi_t(x, \cdot)$ 使得

$$(6.4.12)\qquad \pi_T(f)=\int f(y)\pi_t(x,dy),\ f\in \mathscr{C}_0,$$

然后, 对于 $f\in \boldsymbol{L}_0$, 进而, 对于只依赖于有限多个坐标的 $f\in \boldsymbol{L}$ (不必有界!), 上式仍然成立. 特别地,

$$\mathbf{P}(t)p(x|_{\Lambda_n})=\int p(y|_{\Lambda_n})\pi_t(x,dy),$$

使用引理 (6.4.7) 及单调收敛定理, 得

$$\mathbf{P}(t)\ p(x)=\int p(y)\pi_t(x,dy),$$

但由 (6.4.8) 知, 当 $x\in E_0$ 时, 上式左方有限, 故

$$(6.4.13)\qquad \pi_t(x,E_0)=1,\ x\in E_0,\ t\geqslant 0.$$

往证 $\pi_t(x,dy)$ 是 $(E_0,\mathscr{E}_0)$ 上的转移函数. 对于$f\in \boldsymbol{L}_0$, $\int\pi_t(\cdot, dy)f(y)$是关于 $p(x,y)$ Lipchitz 连续的, 可用只依赖于有限多个坐标的函数逼近, 从而是 $\mathscr{E}_0$ 可测的. 因此, 对于只依赖于有限多个坐标的$f\in \overline{\boldsymbol{L}}$, $\int\pi_t(\cdot,dy)f(y)$亦然. 特别地, 对于$f\in \mathscr{C}_0$, $\int\pi_t(\cdot,dy)f(y)$是 $\mathscr{E}_0$ 可测的. 然后由单调类定理知, 对于每 $F\in \mathscr{E}_0$, $\pi_t(\cdot,F)$ 是 $\mathscr{E}_0$ 可测的. 为证 $\{\pi_t(x,dy)\}_{t\geqslant 0}$ 满足 $K-C$ 方程, 只需使用 $\mathbf{P}(t)$在 $\mathscr{L}$ 上的半群性及单调类定理.

最后, 由于 $(E_0,\mathscr{E}_0)$ 是一个标准 Borel 空间*), 因而容易由转移函数$\{\pi_t(x,dy)\}_{t\geqslant 0}$构造出以 $(E_0,\mathscr{E}_0)$为状态空间的马氏

*). 参考 Parthasarathy[1, 第五章, 定理 2.3].

过程*）. 然后再应用引理（6.4.7），（6.4.12）和（6.4.13）导出（6.4.4）.

（6.4.14）**推论** 在定理（6.4.1）的前半部分的条件下，对每 $f\in \boldsymbol{L}$ 和 $x\in \mathscr{D}$，极限

$$\lim_{n\to\infty}\Omega_n f(x)=\Omega f(x)$$

存在，而且对于每 $f\in \boldsymbol{L}$，

（6.4.15） $\lim_{n\to\infty}\Omega_n P_n(s)f(x)=\Omega P(s)f(x)$，$x\in\mathscr{D}$，

若再设 $\lim_{n\to\infty}\Omega P_n(s)f(x)=\Omega P(s)f(x)$，在有限 s 区间上一致，则

（6.4.16） $P(t)f(x)=f(x)+\int_0^t \Omega P(s)f(x)$，$x\in\mathscr{D}$，

而且存在函数 $g(f,x)\geqslant 0$ 使

（6.4.17） $|P(t)f(x)-f(x)|\leqslant\int_0^t e^{c\cdot s}ds\, g(f,x)$，$x\in\mathscr{D}$，

进而

（6.4.18） $P(t)f(x)$ 关于 t 连续，$x\in E_0$；

（6.4.19） $\Omega P(t)f(x)$ 关于 t 连续，$x\in\mathscr{D}$；

（6.4.20） $\lim_{t\downarrow 0}\dfrac{P(t)f(x)-f(x)}{t}=\Omega f(x)$，$x\in\mathscr{D}$；

如 $\mathscr{D}=E_0$ 且 $g(f,x)$ 受控于 $cp(x)$（$x\in E_0$），则还有

（6.4.21） $\Omega P(t)f(x)=P(t)\Omega f(x)$，$x\in\mathscr{D}$.

证 由不等式（6.3.10）立得极限的存在性. 再用一次（6.3.10）和（6.4.2）得（6.4.15），而且对于每 $f\in\boldsymbol{L}$ 和 $x\in\mathscr{D}$，$|(\Omega_n-\Omega)P_n(s)f(x)|$ 关于 n 一致地受控于一个关于 s 可积的函数. 由此及

$$P_n(t)f(x)=f(x)+\int_0^t \Omega_n P_n(s)f(x)ds$$

和

$$\lim_{n\to\infty}\Omega P_n(s)f(x)=\Omega P(s)f(x)$$

*）参考上书第五章定理 5.1.

立得 (6.4.16)．另一方面，由上面所证事实知，存在 $g(f, x)$，使得

$$|\Omega P(s)f(x)| \leqslant e^{c_3 s} g(f, x)$$

由此及 (6.4.16) 导出 (6.4.17)．由 (6.4.16) 知，(6.4.18) 对于 $x \in \mathscr{D}$ 成立．其次，

$$\begin{aligned} &|P(t \pm s)f(x) - P(t)f(x)| \\ \leqslant &|P(t \pm s)f(x) - P(t \pm s)f(x_0)| \\ &+ |P(t)f(x) - P(t)f(x_0)| \\ &+ |P(t \pm s)f(x_0) - P(t)f(x_0)|. \end{aligned}$$

由 (6.4.2) 知，我们可以选 $x_0 \in \mathscr{D}$ 使头两项关于 s 在有限区间内一致地小，再用已证的对 $x_0 \in \mathscr{D}$ 的连续性得到 (6.4.18) 对 $x \in E_0$ 亦真．由 (6.4.15) (6.1.1)，(6.1.2) 和 Dini 定理知 (6.4.19) 成立．而由 (6.4.16) 和 (6.4.19) 得 (6.4.20)．进而，若 $\mathscr{D} = E_0$，则由半群性，(6.4.20)，(6.4.17)，$g(f, x)$ 受控于 $cp(x)$ 以及 $P(t)p(x) < \infty$ $(x \in E_0)$ 得

$$\begin{aligned} &\Omega P(t)f(x) \\ &= \lim_{s \to 0} \frac{P(s)P(t)f(x) - P(t)f(x)}{s} \\ &= \lim_{s \to 0} P(t)\left[\frac{P(s)f - f}{s}\right](x) \\ &= P(t)\Omega f(x). \end{aligned}$$

此即是 (6.4.21)． ▌

(6.4.22) **推论** 设 Ω 是 $\boldsymbol{L}$ 上的线性算子 $(\mathscr{D} = E_0)$．那么，满足 (6.4.2)，(6.4.16)，(6.4.18)—(6.4.21) 的 $\boldsymbol{L}$ 上的半群 $P(t)$ 是唯一的．

证 (a) 设有 $\boldsymbol{L}$ 上的半群 $P(t)$，我们先给出它的预解算子．为此，设 $f \in {}_b\boldsymbol{L}$，令

$$F(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P(t)f(x)\,dt, \quad x \in E_0.$$

则

$$P(h)F(x)=e^{\lambda h}\left(F(x)-\int_0^h e^{-\lambda t}P(t)f(x)dt\right),$$

从而

$$\frac{P(h)F(x)-F(x)}{h}=\frac{e^{\lambda h}-1}{h}F(x)$$

$$-\frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^h e^{-\lambda t}P(t)f(x)dx.$$

我们注意，只要 $\lambda>c_3\vee 0$，就有 $F\in {}_bL$. 于是由 (6.4.20) 得

$$\Omega F(x)=\lambda F(x)-f(x),\qquad x\in E_0$$

或

(6.4.23) $\quad(\lambda I-\Omega)F(x)=f(x),\ x\in E_0,\ \lambda>c_3\vee 0.$

往证 F 是由 f 唯一决定的. 事实上，若有 F_1 和 F_2 满足上式，则命 $g=F_1-F_2$，我们看到

$$\Omega g(x)=\lambda g(x),\qquad x\in E_0,\ \lambda>c_3\vee 0.$$

于是由 (6.4.16) 和 (6.4.21) 得

$$\frac{d}{dt}P(t)g(x)=\Omega P(t)g(x)=P(t)\Omega g(x)=\lambda P(t)g(x),$$

故由连续性得

$$e^{-\lambda t}P(t)\,g(x)-g(x)=\int_0^t\frac{d}{ds}(e^{-\lambda s}P(s)g(x))ds=0.$$

进而

$$g(x)=e^{-\lambda t}P(t)g(x)\to 0,\qquad \lambda\to\infty,\qquad x\in E_0.$$

这便证得唯一性.

(*b*) 今设 $P_1(t)$ 和 $P_2(t)$ 为满足所述条件的两个半群. 依 (*a*) 定义两个 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$. 它们必定都满足 (6.4.23). 于是由已证的 (*a*) 和拉氏变换的唯一性定理立知 $P_1(t)$ 和 $P_2(t)$ 在 ${}_bL$ 上重合，自然也在 L 上重合. ▌

§ 6.5 反应扩散过程的存在性

本节有两个目的．其一是就稍具体的情况给出定理（6.4.1）的条件的明显的刻画．其二是说明对于某些情形，我们可以避免使用（2.3.2）．本节的结果可自然地推广到交互作用为线性的多物种情形．

先解释一下反应扩散过程的直观意义．设想在一个容器里进行的化学反应．将容器分成可数无穷多个小容器．以 S 表示这些小容器之集．那么，在每 $u\in S$ 内，有一个同样类型的化学反应（例如 § 3.2 中的四个例子）．这称为过程的反应部分．另一方面，小盒子 u 内的粒子可以跑到小盒子 v 中去，这种小盒子之间的运动称为过程的扩散部分．我们关心的是反应物的粒子数的变化情况．

本节只考虑单一反应物．这样，在 $u\in S$ 内，粒子数是取值于 $\boldsymbol{Z}_+=\{0,1,2,\cdots\}$ 的马氏链．其反应速率（速度）可以用 Q 矩阵 $Q_u=(q_u(i,j):\ i,j\in\boldsymbol{Z}_+)$ 来刻划．一个粒子从 $u\in S$ 跑到 v 内的速率是 $P(u,v)$，为简单起见，我们假定 $P=(P(u,v):\ u,\ v\in S)$ 是一个转移概率矩阵．那么，若在 u 内有 k 个粒子，则可用 $c_u(k)\cdot P(u,v)$ 表示这 k 个粒子从 u 跑到 v 内的速率．自然可约定

(6.5.1)　$c_u\geqslant 0,\ c_u(0)=0,\ u\in S,$

为避免在某一时刻、在某一 $u\in S$ 内有无穷多个粒子的无昧情形，我们需要缩小状态空间 $E=(Z_+)^S$，代之以

$$E_0=\left\{x\in E:\ \|x\|=\sum_{u\in S}x_uk_u<\infty\right\},$$

此处 $k.$ 是 S 上的严格正的函数，使得

(6.5.2)　$\sum_v P(u,v)k_v\leqslant Mk_u,\ u\in S,$

此处 $M>0$．对于给定的 $M>1$ 和 P，这种 $k.$ 总是存在的，例如

取有界、严格正的 $(d_u: u\in S)$，然后命

$$k_u=\sum_{n=0}^{\infty} M^{-n}\sum_{v} P^{(n)}(u,v)d_v{}^{*)},\quad u\in S,$$

此处 $(P^{(n)}(u,v): u,v\in S)=P^n$，$n\geqslant 0$. 这说明了前三节中 $(k_u: u\in S)$ 的来历。

现在，我们可以形式地写出所要考虑的反应扩散过程的无穷小算子：

(6.5.3)
$$\begin{aligned}\Omega f(x) &=\sum_{u\in S}\sum_{k\neq 0} q_u(x_u,x_u+k)[f(x+ke_u)-f(x)]\\ &+\sum_{u\in S} c_u(x_u)\sum_{v\in S}P(u,v)[f(x-e_u+e_v)-f(x)]\end{aligned}$$

$$f\in \boldsymbol{L},\quad x\in\mathscr{D}$$

此处 e_u 表在 u 处为 1 的 E 中的单位向量，而

(6.5.4)
$$\mathscr{D}=\left\{x\in E_0: \|x\|=\sum_{u\in S,x_u\neq 0}\sum_{k\neq 0} q_u(x_u,x_u+k)|k|k_u<\infty\right\}.$$

这里及以后，我们约定

$$q_u(i,j)=0,\ \text{如}\ i\in \boldsymbol{Z}_+,\ j\notin \boldsymbol{Z}_+,\ u\in S.$$

当 S 有限时，Ω 对应于一个保守 Q 矩阵。

对应于 (6.3.5)，我们假定

(6.5.5)
$$\|\beta\|=\sum_u \beta_u k_u=\sum_u\sum_{k=1}^{\infty} q_u(0,k)kk_u<\infty$$

代替 (6.3.6) 和 (6.2.8)，我们假定

(6.5.6) $c=\sup\limits_{u,k}|c_u(k)-c_u(k+1)|<\infty$,

(6.5.7) $c_3'=\sup\{g_u(j_1,j_2)+h_u(j_1,j_2): u\in S,\ j_2>j_1\geqslant$

---

*). 若再设 $\sup\limits_u\sum\limits_v P(u,v)d_v<\infty$，则当 M 足够大时，(k_u) 可和. 但对于存在定理来说，可和性不是本质的条件。

$$\geqslant 0\} < +\infty.$$

此处

$$g_u(j_1 j_2) = \sum_{k \neq 0} (q_u(j_2, j_2+k) - q_u(j_1, j_1+k)) k (j_2 - j_1)^{-1}$$

$$j_2 > j_1 \geqslant 0,$$

$$h_u(j_1, j_2) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} [(q_u(j_2, j_1-k) - q_u(j_1, 2j_1 - j_2 - k))^+ +$$

$$+ (q_u(j_1, j_2+k) - q_u(j_2, 2j_2 - j_1 + k))^+] k (i_2 - j_1)^{-1},$$

$$j_2 > j_1 \geqslant 0.$$

再记

$$c_3'' = \sup\{(c_u(j_2) - c_u(j_1))(j_2 - j_1)^{-1} : u \in S, j_2 > j_1 \geqslant 0\}$$

$$c_1 = \sup\{g_u(0, j_2):\ u \in S,\ j_2 \geqslant 1\}.$$

显然有

$$c_1 \leqslant c_3' < \infty,\quad c_3'' \leqslant c < \infty.$$

最后，取

$$c_3 = c_3' + c_3''.$$

下面是本节的主要结果

(6.5.8) **定理** 在 (6.5.5) — (6.5.7) 的条件下，存在 $\boldsymbol{L}$ 上的算子半群 $P(t)$，使得 $P(0) = I$，在 $\boldsymbol{L}$ 的一致闭包 $\overline{\boldsymbol{L}}$ 上强压缩。并且对于一切 $f \in \boldsymbol{L}$ 和 $t \geqslant 0$，它具有如下性质：

(6.5.9) $\quad |P(t)f(x) - P(t)f(y)| \leqslant L(f)\|x - y\| \times \exp[t(c_3 + c(M-1))], \qquad x, y \in E_0;$

(6.5.10) $\quad P(t)f(x) = f(x) + \int_0^t \Omega P(s) f(x) ds,\ x \in \mathscr{D};$

(6.5.11) $\quad |P(t)f(x) - f(x)| \leqslant (c_3 + c(M+1))^{-1}(\|x\| + \|\beta\| + c(M+1)\|x\|) L(f)(\exp[t(c_3 + c(M+1)] - 1), \qquad x \in \mathscr{D};$

(6.5.12) $\quad P(t)f(x)$ 关于 t 连续，$x \in E_0;$

(6.5.13)　$\Omega P(t)f(x)$关于t连续，$x\in\mathscr{D}$；

(6.5.14)　$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{P(t)f(x)-f(x)}{t}=\Omega f(x)$，$x\in\mathscr{D}$；

如果$\mathscr{D}=E_0$，则还有

(6.5.15)　$\Omega P(t)f(x)=P(t)\Omega f(x)$，$x\in E_0$.

此时半群$P(t)$是唯一的. 此外，存在取值于E_0上的马氏过程$(\{X(t)\}_{t\geq 0},\ P^x)$，使得

(6.5.16)　
$$P(t)f(x)=E^x f(X(t))$$
$$=\int f(y)P^x[X(t)\in dy],\quad f\in L,\ x\in E_0.$$

我们将逐步考察前三节的结果有那些适用于我们的情况，然后在本节之末证明本定理（(6.5.28)）. 以下，我们总假定定理(6.5.8)的条件满足. 为叙述方便，如Ω所对应的Q矩阵（有限维情况）是正则的，我们就称Ω是正则的.

(6.5.17) **引理**　设S有限，则Ω正则. 而且对于每$v\in S$，$x\in E$和$t\geq 0$，我们有

(6.5.18)
$$\sum_y P(t,x,y)\,y_v\leq\sum_u(x_u e^{c_1 t}+\beta_u e^{c_2 t})\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ct)^n}{n!}P^{(n)}(u,v).$$

此处$(P(t,x,y):\ x,y\in E)$是由Ω所决定的Q过程，而

(6.5.19)
$$\begin{cases}c_2\geq c_1\vee 1, & \text{如 } \beta_\cdot\neq 0,\\ c_2=0, & \text{如 } \beta_\cdot=0.\end{cases}$$

证　由于

$$\sum_{k\neq 0}q_u(x_u,x_u+k)k$$
$$=\sum_{k\neq 0}(q_u(x_u,x_u+k)-q_u(0,k))k+\beta_u$$
$$\leq c_1x_u+\beta_u.$$

$$\sum_{w} c_w(x_w) \sum_{v} P(w,v)(-e_w(u)+e_v(u))$$

$$=\sum_{w} c_w(x_w)P(w,v)-c_u(x_u)$$

$$\leqslant \sum_{w}[(c_w(x_w)-c_w(x_w-1))+\cdots+(c_w(1)-c_w(0))]\times$$

$$\times P(w,v)$$

$$\leqslant c\sum_{w} x_w P(w,v).$$

从而 (6.2.9) 成立 (只需取 $b(u, v)=cP(u, v)$, $u, v\in S=\Lambda_n$) . 于是, 由定理 (6.2.8) , 我们只需再证 Ω 的正则性. 然而, 由上面两个不等式立即可得

$$\sum_{y\neq x} q(x,y)(\|y\|-\|x\|)\leqslant\|\beta\|+(c_1+cM)\|x\|,\quad x\in E$$

此处, $(q(x, y))$ 为由 Ω 所决定的 Q 矩阵. 因此, 若在定理 (2.3.7) 中取 $E_n=\left\{x\in E:\ \sum_{u\in S} x_u<n\right\}$, 取 $\varphi(x)=\|\beta\|+((c_1+cM)\vee 1)\|x\|$ 和那里的常数 c 为 $(c_1+cM)\vee 1$, 则由 S 的有限性立知

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \inf_{x\in E_n}\ \varphi(x)$$

$$\geqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \inf_{x\in E_n}\|x\|$$

$$\geqslant\inf_{u\in S} k_u\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\ \inf_{x\in E_n}\ \sum_{u\in S} x_u=\infty,$$

故我们的 Ω 满足定理 (2.3.7) 的假设. ▌

为检查条件 (6.3.2) , 我们定义如下耦合 (仍设S有限) :

(6.5.20) $$\widetilde{\Omega}f(x^{(1)}, x^{(2)})$$

$$=\sum_{u\in S}\widetilde{\Omega}_u f(x^{(1)}, x^{(2)})+\widetilde{D}f(x^{(1)}, x^{(2)})$$

$$f\in \boldsymbol{L},\ x^{(1)},\ x^{(2)}\in E,$$

此处

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\Omega}_u f(x^{(1)},\ x^{(2)})\\
&=\sum_{k\neq 0}(q_u(x_u^{(1)},\ x_u^{(1)}+k)-q_u(x_u^{(2)},\ x_u^{(2)}+k))^+(f(x^{(1)}\\
&\quad +ke_u,\ x^{(2)})-f(x^{(1)},\ x^{(2)}))\\
&\quad +\sum_{k\neq 0}(q_u(x_u^{(2)},\ x_u^{(2)}+k)-q_u(x_u^{(1)},\ x_u^{(1)}+k))^+(f(x^{(1)},\\
&\qquad x^{(2)}+ke_u)-f(x^{(1)},\ x^{(2)}))\\
&\quad +\sum_{k\neq 0}q_u(x_u^{(1)},\ x_u^{(1)}+k)\wedge q_u(x_u^{(2)},\ x_u^{(2)}+k)\\
&\qquad \times(f(x_u^{(1)}+ke_u,\ x_u^{(2)}+ke_u)-f(x^{(1)},\ x^{(2)})),\\
&\widetilde{G}f(x^{(1)},\ x^{(2)})\\
&=\sum_{u\in S}(c_u(x_u^{(1)})-c_u(x_u^{(2)}))^+\sum_v P(u,v)(f(x^{(1)}-e_u+e_v,\\
&\qquad x^{(2)})-f(x^{(1)},\ x^{(2)}))\\
&\quad +\sum_{u\in S}(c_u(x_u^{(2)})-c_u(x_u^{(1)}))^+\sum_v P(u,v)\\
&\qquad \times(f(x^{(1)},\ x^{(2)}-e_u+e_v)-f(x^{(1)},\ x^{(2)}))\\
&\quad +\sum_u c_u(x_u^{(1)})\wedge c_u(x_u^{(2)})\sum_v P(u,v)\\
&\qquad \times(f(x^{(1)}-e_u+e_v,\ x^{(2)}-e_u+e_v)-f(x^{(1)},x^{(2)})).
\end{aligned}$$

(6.5.21) **引理** 设S有限，则

(6.5.22) $$|P(t)f(x)-P(t)f(y)|\leqslant\|x-y\|L(f)\times \times\exp[t(c_3+cM)],$$

$$f\in \boldsymbol{L},\ x,y\in E.$$

证 由引理（6.3.1），我们只需检查条件（6.3.2）．但在上述引理的证明中已证，Ω满足（2.3.7）的假设，从而由定理（5.3.3）知，Ω的一切满足（5.2.1）的耦合正则．但(6.5.20)所定义的耦合显然满足（5.2.1）和定理（5.2.8）的假设，从

也满足（5.1.6）．这样，我们只需就（6.5.20）所定义的 $\widetilde{\Omega}$ 来讨论所需的估计．

让我们先估计扩散部分：

$$
\begin{aligned}
J_1 \equiv & \sum_u (c_u(x_u^{(1)}) - c_u(x_u^{(2)}))^+ \sum_{v \neq u} P(u,v) \\
& \times [\| x^{(1)} - e_u + e_v - x^{(2)} \| - \| x^{(1)} - x^{(2)} \|] \\
& + \sum_u (c_u(x_u^{(2)}) - c_u(x_u^{(1)}))^+ \sum_{v \neq u} P(u,v) \\
& \times [\| x^{(1)} - x^{(2)} + e_u - e_v \| - \| x^{(1)} - x^{(2)} \|] \\
= & \sum_u (c_u(x_u^{(1)}) - c_u(x_u^{(2)}))^+ \sum_{v \neq u} P(u,v) \\
& \times [k_u \operatorname{sign}(x_u^{(2)} - x_u^{(1)}) + k_v \operatorname{sign}(x_v^{(1)} - x_v^{(2)})] \\
& + \sum_u (c_u(x_u^{(2)}) - c_u(x_u^{(1)}))^+ \sum_{v \neq u} P(u,v) \\
& \times [k_u \operatorname{sign}(x_u^{(1)} - x_u^{(2)}) + k_v \operatorname{sign}(x_v^{(2)} - x_v^{(1)})] \\
= & \sum_u k_u [(c_u(x_u^{(1)}) - c_u(x_u^{(2)}))^+ \operatorname{sign}(x_u^{(2)} - x_u^{(1)}) \\
& + (c_u(x_u^{(2)}) - c_u(x_u^{(1)}))^+ \operatorname{sign}(x_u^{(1)} - x_u^{(2)})] \\
& + \sum_u (c_u(x_u^{(1)}) - c_u(x_u^{(2)}))^+ \sum_v P(u,v) \\
& \times k_v \operatorname{sign}(x_v^{(1)} - x_v^{(2)}) \\
& + \sum_u (c_u(x_u^{(2)}) - c_u(x_u^{(1)}))^+ \sum_v P(u,v \\
& \times k_v \operatorname{sign}(x_v^{(2)} - x_v^{(1)}) \\
\leqslant & \sum_u k_u c_3'' | x_u^{(1)} - x_u^{(2)} | \\
& + \sum_u c | x_u^{(1)} - x_u^{(2)} | \sum_v P(u,v) k_v \\
\leqslant & c_3'' \| x^{(1)} - x^{(2)} \| + c \sum_u M | x_u^{(1)} - x_u^{(2)} | k_u \\
= & (c_3'' + cM) \| x^{(1)} - x^{(2)} \|,
\end{aligned}
$$

其中 $\operatorname{sign}(x)=1$，如 $x>0$； $=-1$，如 $x<0$； $=0$，如 $x=0$。

其次，我们估计反应部分．为此，先看

$$
\begin{aligned}
J_2(u)\equiv&\sum_{k\neq 0}(q_u(x_u^{(1)},\ x_u^{(1)}+k)-q_u(x_u^{(2)},\ x_u^{(2)}+k))^+\\
&\times[\|x^{(1)}+ke_u-x^{(2)}\|-\|x^{(1)}-x^{(2)}\|]\\
&+\sum_{k\neq 0}(q_u(x_u^{(2)},\ x_u^{(2)}+k)-q_u(x_u^{(1)},\ x_u^{(1)}+k))^+\\
&\times[\|x^{(1)}-x^{(2)}-ke_u\|-\|x^{(1)}-x^{(2)}\|]
\end{aligned}
$$

计算出 [⋯] 的各数，便可看出，当 $x_u^{(1)}>x_u^{(2)}$ 时，

$$
\begin{aligned}
J_2(u)=&\sum_{k\neq 0}(q_u(x_u^{(1)},\ x_u^{(1)}+k)-q_u(x_u^{(2)},\ x_u^{(2)}+k))^+kk_u\\
&+2\sum_{k=-\infty}^{x_u^{(2)}-x_u^{(1)}-1}(q_u(x_u^{(1)},x_u^{(1)}+k)-q_u(x_u^{(2)},x_u^{(2)}+k))^+\\
&\cdot(x_u^{(2)}-x_u^{(1)}-k)k_u\\
&-\sum_{k\neq 0}(q_u(x_u^{(2)},\ x_u^{(2)}+k)-q\ (x_u^{(1)},x_u^{(1)}+k))^+kk_u\\
&+2\sum_{k=x_u^{(1)}-x_u^{(2)}+1}^{+\infty}(q_u(x_u^{(2)},x_u^{(2)}+k)-q_u(x_u^{(1)},\ x_u^{(1)}\\
&+k))^+\cdot(x_u^{(2)}-x_u^{(1)}+k)k_u\\
=&\sum_{k\neq 0}(q_u(x_u^{(1)},\ x_u^{(1)}+k)-q_u(x_u^{(2)},\ x_u^{(2)}+k))kk_u\\
&+2\sum_{k=1}^{\infty}[(q_u(x_u^{(1)},\ x_u^{(2)}-k)-q_u(x_u^{(2)},\ 2x_u^{(2)}-x_u^{(1)}\\
&-k))^++(q_u(x_u^{(2)},\ x_u^{(1)}+k)-q_u(x_u^{(1)},\ 2x_u^{(1)}-x_u^{(2)}\\
&+k))^+kk_u\\
\leqslant& c_3'(x_u^{(1)}-x_u^{(2)})k_u
\end{aligned}
$$

由对称性，我们得到：当 $x_u^{(1)}<x_u^{(2)}$ 时，

$$J_2(u)\leqslant c_3'(x_u^{(2)}-x_u^{(1)})k_u$$

从而总有

$J_2(u) \leqslant c_3' | x_u^{(1)} - x_u^{(2)} | k_u.$

若记$\widetilde{\Omega}$所对应的Q矩阵为$\widetilde{q}((x^{(1)}, x^{(2)}), \cdot)$，则由上面已证的估计立得

$$\sum_{(y^{(1)}, y^{(2)}) \neq (x^{(1)}, x^{(2)})} \widetilde{q}((x^{(1)}, x^{(2)}), dy^{(1)}, dy^{(2)}) [\| y^{(1)} - y^{(2)} \| - \| x^{(1)} - x^{(2)} \|] \leqslant (c_3 + cM) \| x^{(1)} - x^{(2)} \|$$
$$x^{(1)}, x^{(2)} \in E.$$

这正是我们所需要的估计。 ▌

(6.5.23) **注** 现在设S为无穷．任取$\{\Lambda_n\}_1^\infty \subset S_f$, $\Lambda_n \uparrow S$. 并命

$$\mathbf{P}_n(u,v) = \begin{cases} P(u,v), & \text{如 } u,v \in \Lambda_n,\ u \neq v; \\ 1, & \text{如 } u = v \notin \Lambda_n, \\ P(u,u) + \sum_{w \neq u} P(u,w), & \text{如 } u = v \in \Lambda_n, \\ 0, & \text{其它情形}. \end{cases}$$

并分别以Λ_n代替S，以$P_n = (P_n(u,v): u, v \in S)$代替$P$，依(6.5.3)定义相应的$\Omega_n$．那么，我们需要把估计式(6.5.22)中的$M$换成$M+1$．然而，由于相应的$c_1^{(n)}$，$c_3^{(n)\prime}$和$c_3^{(n)\prime\prime}$满足：

$$c_1^{(n)} \leqslant c_1,\ c_3^{(n)\prime} \leqslant c_3',\ c_3^{(n)\prime\prime} \leqslant c_3'',\ n \geqslant 1$$

故我们无需改变估计式(6.5.18)和(6.5.22)中的c, c_1, c_2和c_3的取法。

如果我们再假定每Ω_n $(n \geqslant 1)$满足条件(2.3.2)．那么，定理(6.4.1)的证明已适用于我们的情况．现在，我们要避免条件(2.3.2)．为此，改用有界Q矩阵逼近，定义

$$(6.5.24) \quad \begin{cases} q_u^{(N)}(i, i+k) = \begin{cases} q(i, i+k), & \text{如 } i \leqslant N, \\ q(N, N+k), & \text{如 } i \geqslant N, \end{cases} \\ \qquad i \geqslant 0,\ k \neq 0,\ N \geqslant 1,\ u \in S, \\ c_u^{(N)}(k) = c_u(k) \wedge N,\ k \geqslant 0,\ N \geqslant 1,\ u \in S. \end{cases}$$

并用 $Q_u^{(N)}=(q_u^{(N)}(i,j))$ 和 $c_u^{(N)}$ 分别代替 Q_u 和 c_u，则我们可定义相应的 $c(N)$，$c_1(N)$，$c_3'(N)$ 和 $c_3''(N)$。然而

$$\begin{aligned} c(N) &= \sup_{u,k}|\, c_u^{(N)}(k)-c_u^{(N)}(k+1)| \\ &= \sup_{u,k}|\, c_u(k)\wedge N - c_u(k+1)\wedge N\,| \\ &\leqslant \sup_{u,k}|\, c_u(k)-c_u(k+1)\,| \leqslant c. \end{aligned}$$

当 $0\leqslant j_1<N\leqslant j_2$ 时，

$$\begin{aligned} & g_u^{(N)}(j_1,j_2)+h_u^{(N)}(j_1,j_2) \\ &= \sum_{k\neq 0}[q_u^{(N)}(j_2,j_2+k)-q_u^{(N)}(j_1,j_1+k)]k/(j_2-j_1) \\ &\quad + 2\sum_{k=j_2-j_1+1}^{\infty}[(q_u^{(N)}(j_2,j_2-k)-q_u^{(N)}(j_1,j_1-k))^+ \\ &\quad + (q_u^{(N)}(j_2,j_2+k)-q_u^{(N)}(j_1,j_1+k))^+] \\ &\quad \times (j_1-j_2+k)/(j_2-j_1) \\ &= \sum_{k\neq 0}[q_u(N,N+k)-q_u(j_1,j_1+k)]k/(j_2-j_1) \\ &\quad + 2\sum_{k=j_2-j_1+1}^{\infty}[(q_u(N,N-k)-q_u(j_1,j_1-k))^+ \\ &\quad + (q_u(N,N+k)-q_u(j_1,j_1+k))^+](j_1-j_2+k)/(j_2-j_1) \\ &\leqslant \sum_{k\neq 0}[q_u(N,N+k)-q_u(j_1,j_1+k)]k/(j_2-j_1) \\ &\quad + 2\sum_{k=N-j_1+1}^{\infty}[(q_u(N,N-k)-q_u(j_1,j_1-k))^+ \\ &\quad + (q_u(N,N+k)-q_u(j_1,j_1+k))^+](j_1-N+k)/(j_2-j_1) \\ &\leqslant \Big\{\sum_{k\neq 0}[q_u(N,N+k)-q_u(j_1,j_1+k)]k \\ &\quad + 2\sum_{k=N-j_1+1}^{\infty}[(q_u(N,N-k)-q_u(j_1,j_1-k))^+ \\ &\quad + (q_u(N,N+k)-q_u(j_1,j_1+k))^+](j_1-N+k)\Big\}^+ / \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&(\dot{N}-\dot{j}_1)\\
&=[g_u(j_1,N)+h_u(j_1,N)]^+\\
&\leqslant c_3'\vee 0.
\end{aligned}
$$

如果 $0\leqslant j_1<j_2\leqslant N$ 或 $N\leqslant j_1<j_2$，则更有

$$g_u^{(N)}(j_1,j_2)+h_u^{(N)}(j_1,j_2)\leqslant c_3'\vee 0$$

故

$$c_3'(N)\leqslant c_3'\vee 0.$$

类似地有

$$c_3''(N)\leqslant c_3''\vee 0,\ c_1(N)\leqslant c_1\vee 0.$$

这样，当 S 有限时，若分别用 $Q_u^{(N)}$ 和 $c_u^{(N)}$ 代替 Q_u 和 c_u，并用 $\overline{c_1}=c_1\vee 0$，$\overline{c_3'}=c_3'\vee 0$ 和 $\overline{c_3''}=c_3''\vee 0$ 分别代替 c_1，c_3' 和 c_3''，并选取相应的 $\overline{c_2}$ 和 $\overline{c_3}$，则估计式 (6.5.18) 和 (6.5.22) 依然成立。进而，若再用 Λ_n 代替 S，这些估计也是对的，只是留意要用 $M+1$ 代替 M。

(6.5.25) **引理** 设 S 有限，Ω 和 $\Omega^{(N)}$ 如上。则对于每 $t\geqslant 0$，存在子序列 $\{N_l\}_1^\infty$ 使

$$P^{(N_l)}(t)f(x)\xrightarrow[l\to\infty]{}P(t)f(x),\ f\in {}_b\boldsymbol{L},\ x\in E_0$$

此处 $P^{(N_l)}(t)$ 是由 $\Omega^{(N_l)}$ 所决定的半群。

证 因为 $\Omega^{(N)}$ 是有界的。从而它唯一决定 $P^{(N_l)}(t)$。另一方面，

$$Q^{(N)}\longrightarrow Q\ （逐点）,\ N\to\infty,$$

此处 $Q^{(N)}$ 为 $\Omega^{(N)}$ 所决定的 Q 矩阵。故由引理 (5.2.3) 知

$$\varliminf_{N\to\infty}P^{(N)}(t,x,y)=P(t,x,y),\ x,y\in E,\ t\geqslant 0.$$

从而对于固定的 t，可用对角线程序选取 $\{N_l\}$，使

$$\lim_{l\to\infty}P^{(N_l)}(t,x,y)=P(t,x,y),\qquad x,y\in E.$$

由此及

$$\sum_y P^{(N_l)}(t,x,y) = 1 = \sum_y P(t,x,y).$$

得

$$\sum_y | P^{(N_l)}(t,x,y) - P(t,x,y) | \to 0, \quad l\to\infty,$$

进而

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant | P^{(N_l)}(t)f(x) - P(t)f(x) | \\ &\leqslant \sum_y | P^{(N_l)}(t,x,y) - P(t,x,y) | \sup_z |f(z)| \\ &\to 0, \quad l\to\infty. \end{aligned}$$ ▌

现在设 $P_n(t)$ 是 Ω_n所决定的半群。它的状态空间是 $Z_+^{\Lambda_n}$。当 $m\geqslant n$ 时，因为 Ω_n 在 $\Lambda_m - \Lambda_n$ 上不发生转移，我们可用自然的方式把 $P_n(t)$ 延拓到 $Z_+^{\Lambda_m}$ 上。

下述结果是估计式 (6.3.11) 的替代物。

(6.5.26) **引理** 设 $S=\Lambda_m$, $n\leqslant m$. 则对于一切 $t\geqslant 0$，我们有

(6.5.27)
$$\begin{aligned} &|P_n(t)f(x) - P_m(t)f(x)| \\ &\leqslant 2L(f) \sum_{u\in\Lambda_m-\Lambda_n} \sum_{k\neq 0} q_u(x_u, x_u+k) |k| k_u \\ &\quad\times \int_0^t \exp[(t-s)(\overline{c_3}+c(M+1))]ds \\ &\quad + 2cL(f) \int_0^t \exp[(t-s)(\overline{c_3}+c(M+1))] \\ &\quad\times \sum_{u,v,w} [x_w e^{\overline{c_1}s} + \beta_w e^{\overline{c_2}s}] \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(cs)^l}{l!} P_n^{(l)}(w,u) \\ &\quad\times |P_n(u,v) - P_m(u,v)| (k_u+k_v) ds \\ &\equiv 2c(t,f,x,m,n), \end{aligned}$$

$f\in \mathscr{L}$, $x\in E$.

证 类似于定理（6.3.4）的证明，我们有

$$
\begin{aligned}
&|\Omega_n^{(N)}f(x)-\Omega_m^{(N)}f(x)| \\
\leqslant\ & L(f)\sum_{u\in\Lambda_m-\Lambda_n}\ \sum_{k\neq 0}q_u^{(N)}(x_u,x_u+k)|k|k_u \\
&+cL(f)\sum_{u,v}x_u|P_n(u,v)-P_m(u,v)|(k_u+k_v).
\end{aligned}
$$

于是，若以 $E_{u,N}^x$ 表示相应于 $P_u^{(N)}(t)$ 的过程 $\{X(t)\}$ 从 x 出发的期望算子，则对于每 $f\in {}_bL$，$t\geqslant 0$，只要 $N\geqslant \max\limits_{u\in\Lambda_m-\Lambda_n} x_u$，就有

$$
\begin{aligned}
&|P_n^{(N)}(t)f(x)-P_m^{(N)}(t)f(x)| \\
=&\left|\int_0^t P_n^{(N)}(s)(\Omega_n^{(N)}-\Omega_m^{(N)})P_m^{(N)}(t-s)f(x)ds\right| \\
=&\left|\int_0^t E_{n,N}^x[L(P_m^{(N)}(t-s)f)(\sum_{u\in\Lambda_m-\Lambda_n}\ \sum_{k\neq 0}q_n^{(N)}(X_u(s),\right. \\
&X_u(s)+k)|k|k_u+c\sum_{u,v}X_u(s)|P_n(u,v)-P_m(u,v)| \\
&\times(k_u+k_v))]ds \\
\leqslant\ &\sum_{u\in\Lambda_m-\Lambda_n}\ \sum_{k\neq 0}q_n^{(N)}(x_u,x_u+k)|k|k_u \\
&\times\int_0^t L(P_m^{(N)}(t-s)f)ds \\
&+c\sum_{u,v}\int_0^t L(P_m^{(N)}(t-s)f)E_{n,N}^x(X_u(s))ds\,|P_n(u,v) \\
&-P_m(u,v)|(k_u+k_v) \\
\leqslant\ &\sum_{u\in\Lambda_m-\Lambda_n}\ \sum_{k\neq 0}q_u(x_u,\ x_u+k)|k|k_u \\
&\cdot\int_0^t L(P_m^{(N)}(t-s)f)ds
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ c \sum_{u,v} \int_0^t L(P_n^{(*N)}(t-s)f) \Big[\sum_w (x_w e^{\bar{c}_1 s} + \beta_w e^{\bar{c}_2 s}) \\
&\times \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(cs)^l}{l!} P_n^{(l)}(w,u) \Big] \cdot | P_n(u,v) - P_m(u,v) | \\
&\times (k_u + k_v) \\
&= c(t,f,x,m,n).
\end{aligned}
$$

然后，应用引理（6.5.25），便知上面的不等式对于$|P_n(t)f(x) - P_m(t)f(x)|$亦真．简单的极限过渡可将$f \in {}_b\boldsymbol{L}$换成非负的$f \in \boldsymbol{L}$．于是，立即可得本引理．

（6.5.28）　**定理（6.5.8）之证．**

如同前面把$P_n(t)$延拓到$\boldsymbol{Z}_+^m$一样，我们可以把$P_n(t)$延拓为$\boldsymbol{L}$上的半群．而且前述估计式（6.5.18），（6.5.22）和（6.5.27）依然有效．然后，仿照定理（6.3.4）和（6.4.1）的证明，可以得到本定理的除（6.5.10）—（6.5.15）的其它各项断言．

为证明定理余下的断言，只需注意

$$
\begin{aligned}
\Omega g_n(x) = &\sum_{u \in S} \sum_{k \neq 0} q_u(x_u, x_u + k)[g_n(x + ke_u) - g_n(x)] \\
&+ \sum_{u \in S} c_u(x_u) \sum_v P(u,v)[g_n(x - e_u + e_v) - g_n(x)]
\end{aligned}
$$

此处$g_n(x) = P_n(s)f(x)$．当然$g_n \in \boldsymbol{L}$．而且，当$x \in \mathscr{D}$时，右方级数可控，从而可在和下号取极限．于是有$\lim_{n \to \infty} \Omega P_n(s)f(x) = \Omega P(s)f(x)$，$x \in \mathscr{D}$．现在，推论（6.4.14）和（6.4.22）适用于我们的情况．　**]**

（6.5.30）**注**　记

$$
\mathscr{D}_0 = \{x \in E_0 \colon |x| < \infty\},
$$

那么，$\mathscr{D}_0$也是E_0的子稠集，而且可列．如果由（6.5.3）的Ω可唯一决定$\mathscr{D}_0$上的一个Q过程；限于$\mathscr{D}_0$，它还满足（6.5.9），

那么，由上述证明中可见，此时无需用有限维逼近，而将$P(t)$延拓到E_0上。而且仍然满足（6.5.9）

§6.6 例 子

本节给出定理（6.4.1）和定理（6.5.8）的各种应用。

（6.6.1） **零程过程.**

它是一种无反应部分的反应扩散过程. 即

$$q_u(i,j)=0,\ i,j\geqslant 0,\ u\in S$$

其算子是

$$\Omega f(x)=\sum_{u\in s} c_u(x_u)\sum_{v\in s} p(u,v)[f(x+e_u-e_v)-f(x)]$$

$$f\in \boldsymbol{L},\ x\in E_0$$

其中（$p(u,v)$）满足（6.5.2）. 因此，由定理（6.5.8）立知，在条件（6.5.6）之下，零程过程必定存在. 此时还有 $\mathscr{D}=E_0$.

（6.6.2） **线性增长过程**

这是一种反应部分为线性系数的反应扩散过程. 其算子是

$$\begin{aligned}\Omega f(x)=&\sum_u \lambda_1 x_u(f(x+e_u)-f(x))\\&+\sum_u \lambda_2 x_u(f(x-e_u)-f(x))\\&+\sum_u c_u(x_u)\sum_v p(u,v)[f(x-e_u+e_v)-f(x)]\end{aligned}$$

其中（$p(u,v)$）满足（6.5.2），λ_1，$\lambda_2>0$. 此时，

$$\beta_u=0,\ u\in S;\ c_2=0;\ c_1=\lambda_1-\lambda_2;\ c_3'=\lambda_1-\lambda_2$$

因此，在条件（6.5.6）之下，过程总存在. 此时也有 $\mathscr{D}=E_0$.

（6.6.3） **Schlögl模型**

反应部分的系数非线性：

$$
q_u(i,j)=\begin{cases}\lambda_1 a_u\binom{i}{2}+\lambda_4 b_u, & j=i+1,\ i\geqslant 0,\\ \lambda_2\binom{i}{3}+\lambda_3 i, & j=i-1,\ i\geqslant 1,\\ 0, & i\neq j \text{ 的其它情形.}\end{cases}
$$

$$
\lambda_1,\cdots,\lambda_4>0,\ a_u,b_u>0,\ u\in S,
$$

$$
c_u(k)=k,\ k\geqslant 0,\ u\in S.
$$

此时

$$
\beta_u=b_u,\ u\in S;\ c_3''=-1;
$$

$$
g_u(j_1,j_2)=\left[\lambda_1 a_u\binom{j_2}{2}+\lambda_4 b_u-\lambda_2\binom{j_2}{3}-\lambda_3 j_2-\right.
$$

$$
\left.-\lambda_1 a_u\binom{j_1}{2}-\lambda_4 b_u+\lambda_2\binom{j_1}{3}+\lambda_3 j_1\right]/(j_2-j_1)
$$

$$
=\frac{1}{2}(\lambda_1 a_u+\lambda_2)(j_1+j_2)-\left(\frac{\lambda_1 a_u}{2}+\frac{\lambda_2}{3}+\lambda_3\right)
$$

$$
-\frac{1}{6}\lambda_2(j_1^2+j_1 j_2+j_2^2)
$$

$$
c_3'=\sup\{g_u(j_1,j_2):\ j_2>j_1\geqslant 0,\ u\in S\}
$$

这样，在 $\sup\limits_u(a_u\vee b_u)<\infty$ 的条件下，定理(6.5.8)的条件满足。

但此时 $\mathscr{D}\neq E_0$。

(6.6.4)　**单物种自催化模型.**

反应部分的系数为

$$
q_u(i,j)=\begin{cases}\lambda_1 a_u i, & j=i+1,\ i\geqslant 0,\\ \lambda_2\binom{i}{2} & j=i-2,\ i\geqslant 2,\\ 0, & \text{其它的 } j\neq i.\end{cases}
$$

$$
c_u(k)=k,\ k\geqslant 0,\ u\in S.
$$

此时

$\beta_u = 0,\ u \in S;\ c_2 = 0;\ c_3'' = -1;\ c_3' = \lambda_1 \sup_u a_u.$

因此，只要$\sup_u a_u < \infty$，则定理（6.5.8）就是适用的。然而，$\mathscr{D} \neq E_0$。

定理（6.4.1）也适用于上述四种过程。

（6.6.5）　**耦合分枝过程**

其算子是

$$\Omega f(x) = \sum_u \lambda_1 x_u \sum_v p_1(u,v)(f(x+e_v) - f(x))$$
$$+ \sum_u \lambda_2 x_u (f(x-e_u) - f(x))$$
$$+ \sum_u \lambda_3 (f(x - x_u e_u) - f(x))$$
$$+ \sum_u \lambda_4 x_u \sum_v p_2(u,v)(f(x - e_u + e_v) - f(x)),$$

其中第一个加项代表了分枝现象。这里，$\lambda_1, \cdots, \lambda_4 > 0$。$p_1 = (p_1(u,v): u, v \in S)$ 和 $p_2 = (p_2(u,v): u, v \in S)$ 为转移概率矩阵，满足

$$\sum_u k_u p_1(u,v) \leqslant M k_v, \qquad \sum_v p_2(u,v) k_v \leqslant M k_u, \qquad u,\ v \in S.$$

这个过程也可以看作是一种反应扩散过程。上一节的方法是有效的。但因第一项包含有交互作用，因此不包含于定理（6.5.8）。我们验证它满足定理（6.4.1）的条件。

取 $\rho_u(x_u, y_u) = |x_u - y_u|$。显然有 $\rho_u(x) = x_u$，$\beta_u = 0$，$u \in S$。任取$\{\Lambda_n\}_1^\infty \subset \mathscr{S}_f$ 使 $\Lambda_n \uparrow S$。那么，

$$\Omega_n \rho_u(x)$$
$$= \sum_{v \in \Lambda_n} \lambda_1 x_v \sum_{w \in \Lambda_n} p_1(u,w)[\rho_u(x+e_w) - \rho_u(x)]$$
$$+ \sum_{v \in \Lambda_n} \lambda_2 x_v (\rho_u(x - e_v) - \rho_u(x))$$

$$+\sum_{v\in\Lambda_n}\lambda_3(\rho_u(x-x_ve_v)-\rho_u(x))$$

$$+\sum_{v\in\Lambda_n}\lambda_4 x_v\sum_{w\in\Lambda_n}p_2(v,w)[\rho_u(x-e_v+e_w)-\rho_u(x)]$$

$$=\sum_{v\in\Lambda_n}x_v(\lambda_1p_1(v,u)+\lambda_4p_2(v,u,))-(\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)x_u$$

$$=\sum_{v\in\Lambda_n}\rho_vb(v,u)-(\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)\rho_u,\qquad u\in S,\ n\geqslant1.$$

此处

$$b(u,v)=\lambda_1p_1(u,v)+\lambda_4p_2(u,v),\ u,v\in S,$$

可见条件（6.2.9）满足．为验证条件（6.3.2），我们使用如下耦合

$$\begin{aligned}&\widetilde{\Omega}_nf(x^{(1)},x^{(2)})\\&=\widetilde{\Omega}_n^{(1)}f(x^{(1)},\ x^{(2)})+\widetilde{\Omega}_n^{(2)}f(x^{(k)},\ x^{(2)})+\widetilde{\Omega}_n^{(3)}f(x^{(1)},x^{(2)})\\&\quad+\widetilde{\Omega}_n^{(4)}f(x^{(1)},x^{(2)})\ .\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}&\widetilde{\Omega}_n^{(1)}f(x^{(1)},\ x^{(2)})\\&=\sum_{u\in\Lambda_n}\lambda_1\ (x_u^{(1)}-x_u^{(2)})^+\sum_{v\in\Lambda_n}p_1(u,v)[f(x^{(1)}+e_v,x^{(2)})-\\&\quad-f(x^{(1)},\ x^{(2)})]+\sum_{u\in\Lambda_n}\lambda_1(x_u^{(2)}-x_u^{(1)})^+\\&\quad\times\sum_{v\in\Lambda_n}p_1(u,v)[f(x^{(1)},x^{(2)}+e_v)-f(x^{(1)},x^{(2)})]\\&\quad+\sum_{u\in\Lambda_n}\lambda_1\,x_u^{(1)}\wedge x_u^{(2)}\sum_{v\in\Lambda_n}p_1(u,v)[f(x^{(1)}+e_v,x^{(2)}+e_v)\\&\quad-f(x^{(1)},x^{(2)})]\end{aligned}$$

类似地可以写出另外三个耦合．容易算出

$$\widetilde{\Omega}_n^{(1)}\,p(x^{(1)},x^{(2)})\leqslant\lambda_1M\,\|x^{(1)}-x^{(2)}\|=\lambda_1\,M\,p(x^{(1)},x^{(2)})$$

$$\widetilde{\Omega}_n^{(2)}p(x^{(1)},x^{(2)})\leqslant\lambda_2p(x^{(1)},x^{(2)})$$

$$\widetilde{\Omega}_n^{(3)} p(x^{(1)}, x^{(2)}) = 0. \qquad x^{(1)}, x^{(2)} \in E_0, n \geqslant 1.$$

另一方面，在引理（6.5.21）的证明中，我们已估计出

$$\widetilde{\Omega}_n^{(4)} p(x^{(1)}, x^{(2)}) = J_1 \leqslant \lambda_4 (M-1) p(x^{(1)}, x^{(2)})$$

$$x^{(1)}, x^{(2)} \in E_0, n \geqslant 1,$$

从而，我们有

$$\widetilde{\Omega}_n p(x^{(1)}, x^{(2)}) \leqslant (\lambda_1 M + \lambda_2 + \lambda_4 (M-1)) p(x^{(1)}, x^{(2)})$$

$$x^{(1)}, x^{(2)} \in E_0, n \geqslant 1$$

这正是（6.3.2）所需的估计．又

$$\begin{aligned}
&\sum_{u \in \Lambda_m} \lambda_1 x_u \sum_{v \in \Lambda_m - \Lambda_n} p_1(u, v) p_v(x, x + e_v) + \\
&+ \sum_{u \in \Lambda_m - \Lambda_n} \lambda_4 x_u \sum_{v \in \Lambda_n} p_2(u, v) p_{\{u,v\}}(x, x - e_u + e_v) \\
&+ \sum_{u \in \Lambda_n} \lambda_4 x_u \sum_{v \in \Lambda_m - \Lambda_n} p_2(u, v) p_{\{u,v\}}(x, x - e_u + e_v) \\
\leqslant &\sum_{u \in \Lambda_m} \lambda_1 x_u \sum_{v \in \Lambda_m - \Lambda_n} p_1(u, v) k_v \\
&+ \sum_{u \in \Lambda_m - \Lambda_n} \lambda_4 x_u \sum_{v \in \Lambda_n} p_2(u, v)(k_u + k_v) \\
&+ \sum_{u \in \Lambda_n} \lambda_4 x_u \sum_{v \in \Lambda_m - \Lambda_n} p_2(u, v)(k_u + k_v) \\
\leqslant &\lambda_1 \sum_{u \in \Lambda_m} p_u(x) k_u \Big(\sum_{v \in \Lambda_m - \Lambda_n} p_1(u, v) k_v / k_u \Big) \\
&+ \lambda_4 (M+1) \sum_{u \in \Lambda_m} p_u(x) k_u \Big(\sum_{u \in \Lambda_m - \Lambda_n} x_u k_u \Big/ \sum_{u \in \Lambda_m} x_u k_u \Big) \\
&+ \lambda_4 \sum_{u \in \Lambda_m} p_u(x) k_u \Big(\sum_{v \in \Lambda_m - \Lambda_n} p_2(u, v) \Big) \\
&+ \lambda_4 \sum_{u \in \Lambda_m} p_u(x) k_u \Big(\sum_{v \in \Lambda_m - \Lambda_n} p_2(u, v) k_v / k_u \Big)
\end{aligned}$$

可见（6.3.6）—（6.3.8）成立．再则

$$\sum_{u\in\Lambda_m-\Lambda_n}\lambda_2 x_u p_u(x,x-e_u)$$

$$+\sum_{u\in\Lambda_m-\Lambda_n}\lambda_3 p_u(x,x-x_u e_u)$$

$$+\sum_{u\in\Lambda_m-\Lambda_n}\lambda_4 x_u\sum_{v\in\Lambda_m-\Lambda_n}p_2(u,v)p_{(u,v)}(x,x-e_u+e_v)$$

$$\leqslant(\lambda_2+\lambda_3)\sum_{u\in\Lambda_m-\Lambda_n}x_u k_u$$

$$+\lambda_4\sum_{u\in\Lambda_m-\Lambda_n}x_u\sum_{v\in V_m-\Lambda_n}p_2(u,v)(k_u+k_v)$$

$$\longrightarrow 0,\ \text{当}\ m\geqslant n\to\infty,\ x\in E_0.$$

这表明 $\mathscr{D}=E_0$。最后，我们只需验证每 $\Omega_n(n\geqslant1)$ 满足条件（2.3.2）.

首先，

$$q_n(x)=\sum_{u\in\Lambda_n}\lambda_1 x_u\sum_{v\in\Lambda_n}p_1(u,v)+\sum_{u\in\Lambda_n}\lambda_2 x_u$$

$$+\sum_{\substack{u\in\Lambda_n\\ x_u\neq0}}\lambda_3+\sum_{u\in\Lambda_n}\lambda_4 x_u\sum_{v\neq u}p_2(u,v)$$

从而

$$q_n(x+e_w)-q_n(x)$$

$$=\lambda_1\sum_{v\in\Lambda_n}p_1(w,v)+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4\sum_{v\neq w}p_2(w,v),\quad w\in\Lambda_n,$$

$$q_n(x-e_w)-q_n(x)$$

$$=-\lambda_1\sum_{v\in\Lambda_n}p_1(w,v)-\lambda_2-\lambda_3-\lambda_4\sum_{v\neq w}p_2(w,v),\quad w\in\Lambda_n$$

$$q_n(x-x_w e_w)-q_n(x)$$

$$=-\lambda_1 x_w\sum_{v\in\Lambda_n}p_1(u,v)-\lambda_2 x_w-\lambda_3 x_w-\lambda_4 x_w$$

$$\cdot\sum_{v\neq w}p_2(w,v),\qquad w\in\Lambda_n,$$

$$q_n(x-e_w+e_{w'})-q_n(x)$$
$$=-\lambda_1\sum_{v\in A_n}p_1(w,v)-\lambda_4\sum_{v\neq w}p_2(w,v)$$
$$+\lambda_1\sum_{v\in A_n}p_1(w',v)+\lambda_4\sum_{v\neq w'}p_2(w',v)$$

由此易见，存在常数 $\tilde{c}\in\boldsymbol{R}$，使

$$\Omega_n q_n(x)\leqslant\tilde{c}\,q_n(x),\quad x\in E_0,n\geqslant 1.$$

比即是（2.3.2）．至此，我们已证得定理（6.4.1）的全部条件都满足．容易验证，它也满足（6.4.14）的假设．

（6.6.6）　耦合随机徘徊

过程的直观描述是：在每一个 $u\in S$ 处，有一个指数 钟．这些指数钟相互独立，服从参数为 1 的 Poisson 分布．当在 u 处的指数钟响时，处在 u 处的 x_u 个粒子独立地以 $p(u,v)$ 转 移 到 v 处．这里，$p=(p(u,v):\ u,v\in S)$ 是一个转移概率矩阵．发 生这样一次转移后的组态是

$$x_w^u=x_w+i_w,\ \text{为}\ w\neq u$$
$$\quad=i_u\qquad,\ \text{为}\ w=u$$

而 $\sum_{u\in S}i_u=x_u$．当 S 有限时，其 Q 矩阵是

$$q(x,y)=\begin{cases}x_u!\ \prod_{v\in S}(p(u,v)^{i_v}/i_v!)\ , & \text{如}\ y\ \text{为如上的}\ x^u;\\ 0\ , & y\neq x\ \text{的其它情形}.\end{cases}$$

在这个模型中，每一个粒子以等待时间为 1 的、转移速率为 $p(u,v)$ 的连续参数马氏链运动．粒子间的运动相互独立．从 而一阶矩就是

$$\boldsymbol{E}^x x_u(t)=\sum_v x_v\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}p^{(n)}(v,u)e^{-t}\equiv\sum_v x_v p(t,v,u)$$

为考察条件（6.3.2），我们先定义二元耦合：

$$\tilde{q}\ ((x^{(1)},x^{(2)}),(y^{(1)},y^{(2)}))$$

$$= \frac{(x_u^{(1)} \wedge x_u^{(2)})!}{\prod_{v\in S} i_v!} \prod_{v\in S} p(u,v)^{i_v} \frac{|x_u^{(1)} - x_u^{(2)}|!}{\prod_{v\in S} j_v!} \prod_{v\in S} p(u,v)^{j_v}$$

$$= 0,$$

$$(y^{(1)}, y^{(2)}) \neq (x^{(1)}, x^{(2)}) \text{ 的其它情形.}$$

此处，当 $x_u^{(1)} \geqslant x_u^{(2)}$时，

$$y_v^{(1)} = x_v^{(1)} + i_v + j_v,\ v \neq u;\ y_u^{(1)} = i_u + j_u;$$

$$y_v^{(2)} = x_v^{(2)} + i_v,\ v \neq u;\ y_u^{(2)} = i_u;$$

当 $x_u^{(1)} < x_u^{(2)}$时，

$$y_v^{(1)} = x_v^{(1)} + i_v,\ v \neq u;\ y_u^{(1)} = i_u;$$

$$y_v^{(2)} = x_v^{(2)} + i_v + j_v,\ v \neq u;\ y_u^{(2)} = i_u + j_u;$$

其中

$$\sum_v i_v = x_u^{(1)} \wedge x_u^{(2)}, \qquad \sum_v j_v = |x_u^{(1)} - x_u^{(2)}|$$

这个耦合显然是保序的（通常 d 维空间的半序关系），由于Q矩阵有界，正则性是平凡的。现在，我们可以避免直接验算条件（6.3.2）．办法是：任取 $x^{(1)}, x^{(2)} \in E$，令 $x^{(3)} = x^{(1)} \wedge x^{(2)}$，$x^{(4)} = x^{(1)} \vee x^{(2)}$。则

$$x^{(3)} \leqslant x^{(1)},\ x^{(2)} \leqslant x^{(4)}.$$

我们使用上述耦合，得到两个二元的保序过程．然后再把这两个二元过程耦合到一起，得到一个四元过程$(X^{(1)}(t), \cdots, X^{(4)}(t))$．由边缘性，我们有

$$X^{(3)}(t) \leqslant X^{(1)}(t),\ X^{(2)}(t) \leqslant X^{(4)}(t)$$

仍记这个四元耦合过程的期望算子为$\boldsymbol{E}$。那么，

$$\boldsymbol{E}[|X_u^{(1)}(t) - X_u^{(2)}(t)|]$$

$$\leqslant \boldsymbol{E}[X_u^{(4)}(t) - X_u^{(3)}(t)]$$

$$= \sum_v (x_v^{(4)} - x_v^{(3)}) p(t,u,v)$$

从而

$$
\begin{aligned}
&|P(t)f(x)-P(t)f(y)|=|\boldsymbol{E}[f(X^{(1)}(t))-f(X^{(2)}(t))]|\\
&\leqslant \boldsymbol{E}|f(X^{(1)}(t))-f(X^{(2)}(t))|\\
&\leqslant L(f)\boldsymbol{E}|X^{(1)}(t)-X^{(2)}(t)|\\
&\leqslant L(f)\sum_u\sum_v |x_v^{(1)}-x_v^{(2)}|p(t,v,u)k_u\\
&\leqslant L(f)\|x^{(1)}-x^{(2)}\|\exp[t(M-1].
\end{aligned}
$$

这正是我们所需要的（6.3.3）．现在，由于 Q 矩阵有界，分部积分公式自然成立．为得到 Cauchy 性，我们只需考虑估计式（6.3.10）．设 Ω_1 和 Ω_2 是分别相应于转移矩阵 $p_1=(p_1(u,v))$ 和 $p_2=(p_2(u,v))$ 的算子．我们注意，$\Omega_i(i=1,2)$ 的系数恰好构成多项分布的系数．各位置之间的运动是相互独立的．因此，若用 $\xi^{1,u}$ 和 $\xi^{2,u}$ 分别表示在 u 处钟响了之后的随机组态，那么，对于每 $v\in S$，$\xi_v^{1,u}$ 和 $\xi_v^{2,u}$ 的分布是分别以 x_u 和 $p_1(u,v)$，$p_2(u,v)$ 为参数的二项分布．对每 $v\in S$，我们作耦合：

$$
\widetilde{P}_v^u[\xi_v^{1,u}=k+j,\ \xi_v^{2,u}=k]=\binom{x^u}{j}(p_1(u,v)-p_2(u,v))^j
$$

$$
\cdot\binom{x_u-j}{k}p_2(u,v)^k(1-p_1(u,v))^{x_u-j-k}
$$

$$
k,\ j\geqslant 0.
$$

$$
\widetilde{P}_v^u[\xi_v^{1,u}=k,\xi_v^{2,u}>k]=0,\ k\geqslant 0
$$

这是 $p_1(u,v)\geqslant p_2(u,v)$ 的情形．对偶地可写出另一情形：$p_1(u,v)<p_2(u,v)$．容易验证，$\widetilde{P}_v^u$ 具有正确的边缘分布，而且

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{P}_v^u[|\xi_v^{1,u}-\xi_v^{2,u}|=j]\\
&=\binom{x_u}{j}|p_1(u,v)-p_2(u,v)|^j\\
&\quad(1-|p_1(u,v)-p_2(u,v)|)^{x_u-j}\\
&\qquad\qquad j\geqslant 0.
\end{aligned}
$$

然后，作 $(\widetilde{P}_v^u: v\in S)$ 的独立乘积，我们得到 $\xi^{1,u}$ 和 $\xi^{2,u}$ 的一个耦合。记其期望算子为 $\widetilde{E}$。于是

$$|(\Omega_1-\Omega_2)f(x)|=\left|\sum_{u\in S}[\widetilde{E}\,f(\xi^{1,u})-\widetilde{E}\,f(\xi^{2,u})]\right|$$

$$\leqslant L(f)\sum_u \widetilde{E}\,\|\xi^{1,u}-\xi^{2,u}\|\leqslant L(f)\sum_{u,v}x_u k_v \widetilde{E}|\xi_v^{1,u}-\xi_v^{2,u}|$$

$$\leqslant L(f)\sum_{u,v}x_u k_v|p_1(u,v)-p_2(u,v)|.$$

这正是我们所需的估计。故由定理（6.4.1）立知过程的存在性。而且，容易验证推论（6.4.14）的假设也满足，而且 $\mathscr{D}=E_0$。

（6.6.7） **接合过程**

此时 $E_u=\boldsymbol{R}_+$，$u\in S$。算子是

$$\Omega f(x)=\sum_{u\in S}p(u,v)[f(x^{(u,v)})-f(x)]$$

此处 $p=(p(u,v))$ 也是转移概率矩阵，满足

$$\sum_v p(u,v)k_v\leqslant Mk_u,\quad u\in S.$$

而

$$x_w^{(u,v)}=\begin{cases}x_w, & \text{如}\,w\neq u,\ v,\\ p\,x_u, & \text{如}\ w=u,\\ x_v+(1-p)x_u, & \text{如}\ w=v.\end{cases}$$

p 为常数：$0<p<1$。

（6.6.8） **平滑过程**

$E_u=\boldsymbol{R}_+$，$u\in S$。算子是

$$\Omega f(x)=\sum_{u\in S}(f(x^u)-f(x)).$$

这里

$$x_w^u=\begin{cases}x_w, & \text{如}\ w\neq u,\\ \sum_v p(u,v)x_v, & \text{如}\ w=u,\end{cases}$$

而 $p=(p(u,v))$ 为满足

$$\sum_u k_u p(u,v) \leqslant M k_v,\quad v\in S$$

的转移矩阵。

(6.6.9) **Potlatch[*] 过程**

$E_u = \boldsymbol{R}_+, u\in S$。算子是

$$\Omega f(x) = \sum_{u\in S} (f(x^u) - f(x))$$

其中

$$x_w^u = \begin{cases} x_w + x_u p(u,w), & \text{如 } w\neq u, \\ x_u p(u,u), & \text{如 } w = u. \end{cases}$$

而 $p=(p(u,v))$ 是满足

$$\sum_v p(u,v) k_v \leqslant M k_u,\quad u\in S$$

的转移矩阵。

容易验证，上述三个模型满足定理（6.4.1）的假设。

(6.6.10) **广义 Potlatch 过程**

设 $S=\boldsymbol{Z}^d$（d 维整点），$(p(u,v))$ 为 $\boldsymbol{Z}^d$ 上的随机徘徊，满足

$$\sum_v p(u,v) k_v \leqslant M k_u,\, u\in S.$$

再设 ξ 为非负的随机变量，均值为 1。用 F 表其分布。那么，这个过程的算子是

$$\Omega f(x) = \sum_{u\in Z^d} \int_0^\infty [f(x - e_u x_u + \xi \sum_v p(u,v) x_u e_v) - f(x)] dF(\xi)$$

---

[*]. Potlatch 是一民间术语。把每 $u\in S$ 想象成一个人，模型的意义是第 u 个人把他的财产以 $p(u,v)$ 的比例分赠第 v 个人。

状态空间的因子空间是 $E_u = \boldsymbol{R}_+$，$u\in S$，取

$$\Lambda_n = \{u\in \boldsymbol{Z}^d:\ |u|\leqslant n\},\ n\geqslant 1$$

$|u| = |u_1| + \cdots + |u_d|$。相应的

$$\Omega_n f(x) = \sum_{u\in\Lambda_n}\int_0^\infty [f(x - e_u x_u + \xi\sum_{v\in\Lambda_n} p(u,v)x_u e_v) - f(x)]dF(\xi).$$

它所定义的 q 对可用如下方式得到

$$q_n(x,A) = \Omega_n I_{A-\{x\}}(x),\ q_n(x) = -\Omega_n I_{\{x\}}(x)$$

由于

$$q_n(x) = \sum_{|u|\leqslant n}\int_0^\infty [1 - I_{\{x\}}(x - x_u e_u + \xi\sum_{|v|\leqslant n} p(u,v)x_u e_v)]dF(\xi)$$

$$\leqslant \sum_{|u|\leqslant n}\int_0^\infty dF(\xi) \leqslant \#\{u:\ |u|\leqslant n\} < \infty,$$

$$q_n(x,A) = \sum_{|u|\leqslant n}\int_0^\infty I_{A-\{x\}}(x - x_u e_u + \xi\sum_{|v|\leqslant n} p(u,v)x_u e_v)dF(\xi),$$

它关于 A 是非负、σ 可加的，从而是测度。显然 $q_n(x) = q_n(x, E)$。故为保守 q 对。事实上，对每 $n\geqslant 1$，$q_n(x) - q_n(x,\cdot)$ 是有界的，从而是正则的。这样，由 q 对决定的 q 半群必定重合于由 Ω 决定的马氏半群。

下面，我们证明过程的存在性。自然取 $\rho_u(x_u, y_u) = |x_u - y_u|$。$\rho_u(x) = x_u$，$u\in S$。取 θ 为全为 0 的元素。显然有

$$\int q_n(\theta, dy)\rho_u(y) = 0,\ u\in S.$$

从而 $\beta_u = 0$，$u\in S$。又

$$\Omega_n\rho_u(x) \leqslant \rho_u(x)\int_0^\infty \xi\, dF(\xi) = \rho_u(x),$$

$$u\in\Lambda_n,\quad x\in E_0,\quad n\geqslant 1$$

从而条件（6.2.9）满足．为验证条件（6.3.2），定义耦合

$$\widetilde{\Omega}_n f(x^{(1)},x^{(2)})=\sum_{|u|\leqslant n}\int_0^\infty\Big[f(x^{(1)}-e_u x_u^{(1)}+\xi\sum_{|v|\leqslant n}p(u,v)\cdot x_u^{(1)}e_v,\ x^{(2)}-e_u x_u^{(2)}+\xi\sum_{|v|\leqslant n}p(u,v)x_u^{(2)}e_v)-f(x^{(1)},x^{(2)})\Big]dF(\xi).$$

那么

$$\begin{aligned}&\widetilde{\Omega}_n p(x^{(1)},\ x^{(2)})\\&\leqslant\sum_{|u|\leqslant n}\int_0^\infty\Big\|(x_u^{(1)}-x_u^{(2)})(e_u-\xi\sum_{|v|\leqslant n}p(u,v)e_v)\Big\|dF(\xi)\\&\leqslant\sum_{|u|\leqslant n}|x_u^{(1)}-x_u^{(2)}|k_u(M+1).\end{aligned}$$

最后

$$\begin{aligned}&|(\Omega_n-\Omega_m)f(x)|\\&\leqslant\sum_{|u|\leqslant n}\Big|\int_0^\infty\Big[f(x-x_u e_u+\xi\sum_{|v|\leqslant n}p(u,v)x_u e_v)\\&\quad-f(x-x_u e_u+\xi\sum_{|v|\leqslant m}p(u,v)x_u e_u)\Big]dF(\xi)\Big|\\&\quad+\sum_{n<|u|\leqslant m}\Big|\int_0^\infty\Big[f\Big(x-x_u e_u+\xi\sum_{|v|\leqslant m}p(u,v)x_u e_v\Big)\\&\quad-f(x)\Big]dF(\xi)\\&\leqslant L(f)\sum_{|u|\leqslant n}x_u\sum_{n<|v|\leqslant m}p(u,v)k_v\\&\quad+L(f)\sum_{n<|v|\leqslant m}(M+1)x_u k_u.\end{aligned}$$

现在，由定理（6.4.1）立知过程存在．

§6.7 存在性（续）

本节将使用与前面几节不尽相同的方式来研究交互作用粒子系统的存在定理，我们将得到较强的结果：$P_n(t,x,\cdot)$ 弱收敛于 $P(t,x,\cdot)$（在有限维意义下），而且无需定理（6.4.1）中的局部紧性的条件。这里，重要的工具是Канторович—Рубинштейн—Васерштейн距离，简称 KRW 距离（它分别是三个人名英译名的第一个字母）。

（6.7.1）**定义** 设 $(E,\rho,\mathscr{E})$ 是一个完备可分距离可测空间，ρ 为距离。任给 $(E,\mathscr{E})$ 上的两个概率分布 P_1 和 P_2，

$$R(P_1,P_2)=\inf \boldsymbol{E}\rho(\xi,\eta)$$

称为 P_1 和 P_2 的 KRW 距离，此处，下确界取遍一切这样的随机变量 ξ 和 η，它们都取值于 $(E,\mathscr{E})$，并分别具有分布 P_1 和 P_2。

下述结果集中了我们所需的关于 KRW 距离的知识

（6.7.2）**定理** 设 $(E,\rho,\mathscr{E})$ 如（6.7.1），P_0 为 $(E,\mathscr{E})$ 上的概率．记

$$\mathscr{U}(P_0)=\{P: P\text{为}(E,\mathscr{E})\text{上的概率且}R(P,P_0)<\infty\}$$

那么，$\mathscr{U}(P_0)$ 是以 $R(\cdot,\cdot)$ 为距离的完备距离空间．如 P_n 依距离 R 收敛于 $\overline{P}$，则 P_n 弱收敛于 $\overline{P}$。

如 $\mathscr{W}\subset\mathscr{U}(P_0)$ 满足如下性质：存在 $x_0\in E$，使

$$\lim_{c\to\infty}\sup_{P\in\mathscr{W}}\int_{\{x:\rho(x,x_0)>c\}}\rho(x,x_0)dp=0$$

那么，在 $\mathscr{W}$ 上的两种收敛性就是拓扑等价的．

由于我们只在本节使用上述结果．因此，我们不准备给出证明．有兴趣的读者可参看 Dobrushin〔1；§3.定理2〕．下面的

注解也许有助于理解 KRW 距离.

(6.7.3) **注** 如果距离 ρ 有界，则 KRW 收敛性与弱收敛性等价.

(6.7.4) **注** 如 $(E,\rho,\mathscr{E})$ 赋有散拓扑，即

$$\rho(x_1,x_2)=\begin{cases}1, & \text{如} x_1\neq x_2.\\ 0, & \text{如} x_1=x_2.\end{cases}$$

则可证 KRW 距离与变差距离一致，即

$$\mathrm{R}(\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2)=\sup_{B\in\mathscr{E}}|\mathrm{P}_1(B)-\mathrm{P}_2(B)|$$

此时定理 (6·7·2) 依然成立，详见上文.

(6.7.5) **注** 从某种意义上说，KRW 距离反映了概率分布的内在特征. 例如说，当 E 是欧氏空间，P_1 为 ξ 的分布，P_2 为 $\eta=\xi+x_0$ ($x_0\in E$固定) 的分布，则

$$R(P_1,P_2)=|x_0|.$$

现在，让我们回到粒子系统. 我们将使用 § 6.2中直至 (6.2.4) 的约定和记号. 对于 $(E,\mathscr{E})=\left(\prod_{u\in S}E_u,\ \prod_{u\in S}\mathscr{E}_u\right)$上的两个概率分布 P_1 和 P_2，我们定义有限维的 KRW 距离为

$$R_a(P_1,P_2)=\inf \boldsymbol{E}p_a(\xi_1,\xi_2),\quad a\in\mathscr{S}_f$$

其中下确界取遍分别具有分布 P_1^a 和 P_2^a 的随机变量 (随机元)ξ_1 和 ξ_2，P_i^a 为P_i 到 $(E^a,\mathscr{E}^a)$ 上的投影，而

$$p_a(x,y)=\sum_{u\in a}\rho_u(x_u,y_u)k_u,\quad x,y\in E.$$

为方便，也把 $\rho_u(x_u,y_u)$ 写成 $\rho_u(x,y)$. 如同 § 6.2,我们取 $p_a(x)=p_a(x,\theta)$，$p(x)=p_S(x)$，$x\in E$. 依然命

$$E_0=\{x\in E:\quad p(x)<\infty\}$$

并用$\mathscr{E}_0$表示由 $\mathscr{E}$ 导出的 E_0 上的 σ 代数.

在陈述主要定理之前，我们指出：下述结果适用于更一般的情况，例如说，可设 $(E_u,\mathscr{E}_u)$是标准可测空间，存在二元可测的距离 ρ_u，使 (E_u,ρ_u) 成为完备可分距离空间；而且由 ρ_u生成的 σ

代数重合于 $\mathscr{E}_u(u\in S)$。或者，如每 E_u 赋散拓扑，那么结论也对。此外，我们也可以用 $\rho_a(x,y)=\sum\limits_{u\in a}\rho_u(x,y)$ 或 $\max\limits_{u\in a}\rho_u(x,y)$ 代替 $p_a(x,y)$。而且，不论使用 p_a 或 ρ_a，均可把 $p(x)$ $(x\in E)$ 换成具有如下性质的 $\widetilde{p}(x)$ $(x\in E)$：

(i) $\widetilde{p}$ 是 $\mathscr{E}$ 可测的非负函数；

(ii) 若 x 仅有有限多个坐标异于 θ，则 $\widetilde{p}(x)<\infty$；

(iii) 对每 $d\geqslant 0$ 和 $n\geqslant 1$，$\{x\in E:\ \widetilde{p}(x^{\Lambda_n})>d\}$ 是 E 中的开集；

(iv) 对于每 $x\in E$，$\widetilde{p}(x^{\Lambda_n})\uparrow\widetilde{p}(x)$，$n\uparrow\infty$。

此处

$$x^{\Lambda_n}\in E^{\Lambda_n}=\{x\in E:\ \rho_{\Lambda_n}(x^{\Lambda_n},x)+\rho_{S-\Lambda_n}(x^{\Lambda_n},\theta)=0\}$$

最后，我们指出：我们只处理 $q_n(x)-q_n(x,\cdot)$，而并不涉及它的分解

$$q_n(x,\cdot)=\sum_{a\subset\Lambda_n} q_n^a(x,\cdot)\ .$$

(6.7.6) **定理** 设有常数 $c\in\boldsymbol{R}$，使

$$(6.7.7)\quad \int q_n(x,dy)\Big(p(y)-p(x)\Big)\leqslant c\Big(1+p(x)\Big)^{*)}$$

$$x\in E_0,\quad n\geqslant 1.$$

而且，对于一切 $1\leqslant n\leqslant m$，存在 Ω_n 和 Ω_m 的正则耦合 $\widetilde{\Omega}_{n,m}$，使得

$$(6.7.8)\quad \widetilde{\Omega}_{n,m}\,p_w(x_1,x_2)$$

$$\leqslant\sum_{u\in\Lambda_n}c_{uw}\,p_u(x_1,x_2)+c_w(n,\ m)\Big(1+p(x_1)+p(x_2)\Big),$$

$$w\in\Lambda_n,\quad x_1,\ x_2\in E_0,\quad m\geqslant n\geqslant 1$$

此处 $(c_{uw}:\ u,w\in S)$ 的非对角线元素非负，$(c_w(n,m):w\in\Lambda_n)$

---

*)．如 (6.2.5) 和 (6.2.9) 成立，则本条件满足。

（$1\leqslant n\leqslant m$）非负，而且满足

$$(6.7.9)\qquad \mathbf{C}_w(t,n,m)\equiv\int_0^t\left[e^{B_n^*(t-s)}c_\cdot(n,m)\right](w)ds$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{k+1}}{(k+1)!}\left[(\mathbf{B}_n^*)^k\mathbf{c}_\cdot(n,m)\right](w)\to 0,$$

$$m\geqslant n\to\infty,\ t\geqslant 0.$$

此处$\mathbf{B}_n^*=(c_{uv}:\ u,v\in\Lambda_n)$.

则存在（$E_0,\mathscr{E}_0$）上的一个具有转移函数 $P(t,x,\cdot)$ 的马氏过程，使得对每$\alpha\in\mathscr{S}_f$

$$R_\alpha\Big(P_n(t,x,\cdot),P(t,x,\cdot)\Big)\to 0,\ n\to\infty$$

$$x\in E_0,\ t\geqslant 0.$$

而且，此收敛性对于

$$E_0^{(N)}=\{x\in E_0:\ p(x)\leqslant N\}$$

中的 x 是一致的. 最后，对于每固定的 t，$P(t,x,\cdot)$ 在如下意义下连续：设 $x,x_n\in E_0$，$n\geqslant 1$；$\sup\limits_n p(x_n)<\infty$，

$$\lim_{n\to\infty}\rho_u(x_n,x)=0,\qquad u\in S,$$

则对于每 $\alpha\in\mathscr{S}_f$，

$$\lim_{n\to\infty}R_n\Big(P(t,x,\cdot),\ P(t,x,\cdot)\Big)=0.$$

(6.7.10) **注** 如果 $\lim\limits_{m\geqslant n\to\infty}c_u(n,m)=0$ 且

$$\sup_{m\geqslant n,u\in\Lambda_n}c_u(n,m)+\sup_u\sum_{w\in S}|c_{uw}|<\infty$$

则条件(6.7.9)自然满足. 其次，不失一般性，以下总假定 $c\geqslant 0$.

(6.7.11) **注** 条件（6.7.7）保证了所构造的过程不至于跑出 E_0.条件（6.7.8）右方的第一项代表了 Λ_n 中各小盒子对于小盒子 w 的交互作用；第二项 Λ_n 外的小盒子对于 Λ_n 内小盒子 w 的交互作用. 这样，条件（6.7.9)说的是：当 n 增大时，Λ_n 内外的交互作用迅速减弱.

定理（6.7.6）证明的关键的一步是给出 $R_a\Big(P_n(t,x,\cdot),$ $P_m(t,x,\cdot)\Big)$的估计。如果（C_{uw}）非负，那么下述两条引理将提供所需的估计。

（6.7.12）**引理** 设 $r\in{}_r\mathscr{E}_+$，$h\in{}_r\mathscr{E}_+$满足

$$\int q(x,dy)\Big(r(y)-r(x)\Big)\leqslant h(x),\quad x\in E$$

此处 $q(x)-q(x,\cdot)$ 为（$E,\mathscr{E}$）（不必是上述类型的乘积空间）上的 q 对，则

$$\int P^{\min}(t,x,dy)\Big(r(y)-r(x)\Big)$$

$$\int_0^t ds\int P^{\min}(s,x,dy)h(y),\qquad t\geqslant 0,\ x\in E.$$

（6.7.13）Gron wall**引理** 设 Φ 和 W 为〔$0,c$〕（若$c=\infty$，理解为半直线）到 $\boldsymbol{R}^d_+$（$d\geqslant1$）上的 Lebesque 可测函数*)，Ψ 是〔$0,c$〕到 $\boldsymbol{R}^d_+\times\boldsymbol{R}^d_+$ 上的 Lebesque 可测矩阵函数，$\Psi(t)\Psi(s)=\Psi(s)\Psi(t)$。如果

$$(6.7.14)\quad W(t)\leqslant\Phi(t)+\int_0^t\Psi(s)W(s)ds,\ t\in[0,c],$$

则

$$(6.7.15)\quad W(t)\leqslant\Phi(t)+\int_0^t\exp\Big[\int_0^t\Psi(\xi)\,d\xi\Big]\Psi(s)\Phi(s)ds,\quad t\in[0,c].$$

进而，若（6.7.14）中的等号成立，则（6.7.15）亦然。这表明取等号的方程（6.7.14）有唯一解，记作 $W^*(t)$。特别地，对于满足（6.7.14）的任一 W，均有

$$(6.7.15)\quad W(t)\leqslant W^*(t),\ t\in[0,c].$$

这两条引理的证明将随后给出。我们先用它们来讨论所需的

---

*）可将 Φ 和 W 的非负性换成可积性。

估计．首先，若以$\widetilde{q}_{n,m}(x_1,x_2;dy_1,dy_2)$ 表示$\widetilde{\Omega}_{n,m}$所决定的q对，则条件（6.7.8）表明

$$\int \widetilde{q}_{n,m}(x_1,x_2;dy_1,dy_2)\Big(p_w(y_1,y_2)-p_w(x_1,x_2)\Big)$$
$$\leqslant \sum_{u\in\Lambda_n} C_{uw}p_u(x_1,x_2) + \Big(1+p(x_1)+p(x_2)\Big)c_w(n,m),$$
$$x_1,x_2\in \mathrm{E}_0, w\in\Lambda_n$$

其次，由条件（6.7.7）容易得到（参见引理（6.7.19））：

$$(6.7.16)\qquad \int \mathbf{P}_n(t,x,dy)p(y)\leqslant\Big(1+p(x)\Big)e^{ct}-1,$$
$$x\in\mathrm{E}_0,\ t\geqslant 0,\ n\geqslant 1$$

于是，由引理（6.7.12）得

$$(6.7.17)\quad \widetilde{R}^w_{n,m}(t,x_1,x_2)$$
$$=\int \widetilde{P}_{n,m}(t;x_1,x_2;dy_1,dy_2)p_w(y_1,y_2)$$
$$\leqslant p_w(x_1,x_2)+\int_0^t ds\int \widetilde{P}_{n,m}(s;x_1,x_2;dy_1,dy_2)$$
$$\cdot\Big[\sum_{u\in\Lambda_n} C_{uw}p_u(y_1,y_2)+\Big(1+p(y_1)+p(y_2)\Big)c_w(n,m)$$
$$=p_w(x_1,x_2)+\sum_{u\in\Lambda_n} c_{uw}\int_0^t \widetilde{R}^u_{n,m}(s,x_1,x_2)ds$$
$$+c_w(n,m)\int_0^t ds\Big[1+\int \mathbf{P}_n(s,x_1,dy_1)p(y_1)$$
$$+\int \mathbf{P}_m(s,x_2,dy_2)p(y_2)\Big]$$
$$\leqslant p_w(x_1,x_2)+\sum_{u\in\Lambda_n} c_{uw}\int_0^t \widetilde{R}^u_{n,m}(s,x_1,x_2)ds$$
$$+c_w(n,m)\int_0^t ds\Big[\Big(2+p(x_1)+p(x_2)\Big)e^{cs}-1\Big],$$
$$w\in\Lambda_n,\ x_1,x_2\in\mathrm{E}_0,\ t\geqslant 0,\ n\geqslant 1.$$

今固定 n, m, x_1和x_2，并记列向量

$$R(t) = \left(\widetilde{R}^{w}_{n,m}(t, x_1, x_2): w \in \Lambda_n\right),$$

$$P = \left(p_w(x_1, x_2): w \in \Lambda_n\right),$$

$$C = (c_w(n, m): w \in \Lambda_n)$$

再记

$$a(t) = \int_0^t [(2 + p(x_1) + p(x_2))e^{cs} - 1] ds.$$

则上式变成

$$R(t) \leqslant P + a(t)C + B_n^{\bullet} \int_0^t R(s) ds.$$

这样，若 B_n 非负，则我们可以使用 Gronwall 引理，得到

$$R(t) \leqslant P + a(t)C + \int_0^t \exp\left[\int_s^t B_n^{\bullet} ds\right] B_n^{\bullet}[P + a(s)C] ds$$

$$= P + a(t)C - e^{B_n^{\bullet} t} \int_0^t \frac{de^{-B_n^{\bullet} s}}{ds} [P + a(s)C] ds$$

$$= e^{B_n^{\bullet} t} + e^{B_n^{\bullet} t} \int_0^u e^{-B_n^{\bullet} s} C\left(\frac{da(s)}{ds}\right) ds$$

$$= e^{B_n^{\bullet} t} P + \int_0^t e^{B_n^{\bullet}(t-s)} C[(2 + p(x_1) + p(x_2)]e^{cs} - 1] ds$$

或

$$(6.7.18) \quad \widetilde{R}^{w}_{n_i, m}(t, x_1, x_2)$$

$$\leqslant (e^{B_n^{\bullet} t} p_{\cdot}(x_1, x_2))(w) + \int_0^t [(2 + p(x_1) + p(x_2))e^{cs}$$

$$- 1]\left(e^{B_n^{\bullet}(t-s)} c_{\cdot}(n, m)(w) ds\right.$$

这正是我们所需的估计。虽然这个证明并不适应于一般的情形（由于使用 Gronwall 引理时假定了 $B_n \geqslant 0$），但它毕竟让我们具体地算出了估计式。后面，我们将使用完全不同的方法，证明这

个估计式对于一般情形也是对的。

让我们回过头来证明前面的两条引理。先证 Gronwall 引理。显然，只需证明前两项断言。命

$$Y(t)=\int_0^t \Psi(s)W(s)ds,$$

则 Y 绝对连续。由（6.7.14）知，除〔0,c〕的一个零集而外，

$$Y'(t)-\Psi(t)Y(t)\overset{(=)}{\leqslant}\Psi(t)\Phi(t)$$

再记

$$Z(t)=\exp[-\int_0^t \Psi(s)ds]Y(t)$$

则上式等价于

$$Z'(t)\overset{(=)}{\leqslant}\exp[-\int_0^t \Psi(s)ds]\Psi(t)\Phi(t).$$

注意 $Z(0)=0$ 和 Z 的绝对连续性，得

$$Z(t)\overset{(=)}{\leqslant}\int_0^t \exp[-\int_0^s \Psi(\xi)d\xi]\Psi(s)\Phi(s)ds$$

从而由 $Z(t)$ 的定义得

$$Y(t)\overset{(=)}{\leqslant}\int_0^t \exp\left[\int_s^t \Psi(\xi)d\xi\right]\Psi(s)\Phi(s)ds.$$

但由 $Y(t)$ 的定义和（6.7.14）立得

$$W(t)\overset{(=)}{\leqslant}\Phi(t)+Y(t).$$

故得引理断言。

至于引理（6.7.12），可用（1.2.26）和如下初等结果立即得到。

（6.7.19）**引理** 设 $q(x)-q(x,\cdot)$ 为 $(E,\mathscr{E})$ 上的 q 对，$\varphi\in{}_r\mathscr{E}_+$，$f(t,\cdot)\in{}_r\mathscr{E}_+$，$t\geqslant0$，$f(t,x)$ 关于 t 可微，$x\in E$。而且

$$f(0,\cdot)\geqslant\varphi$$

为使

$$\int P^{\min}(t,x,dy)\varphi(y)\leqslant f(t,x),\quad t\geqslant0,x\in E.$$

只需

$$\frac{d}{dt}f(t,x)\geqslant\int q(x,dy)[f(t,y)-f(t,x)],\quad t\geqslant 0,\ x\in E.$$

证 由比较定理及向后方程 (B) 立得. ▌

(6.7.20) **定理** (6.7.6) **之证.**

(a) 试证估计式 (6.7.18). 使用与前面类似的记号, 即添上空间变元. 由引理 (6.7.19), 我们只需证:

$$e^{B_n^* t}B_n^* P(x_1,x_2)+e^{B_n^* t}B_n^*\int_0^t e^{-B_n^* s}C\left(\frac{da(s,x_1,x_2)}{ds}\right)ds$$

$$+C\frac{da(t,x_1,x_2)}{dt}$$

$$\geqslant\int\widetilde{q}_{n,m}(x_1,x_2;dy_1,dy_2)e^{B_n^* t}[P(y_1,y_2)-P(x_1,x_2)]$$

$$+\int\widetilde{q}_{n,m}(x_1,x_2;dy_1,dy_2)\int_0^t e^{B_n^*(t-s)}C\left[\frac{da(s,y_1,y_2)}{ds}\right.$$

$$\left.-\frac{da(s,x_1,x_2)}{ds}\right]ds.$$

改记

$$\Phi(t,x_1,x_2)=C\frac{d}{dt}a(t,x_1,x_2)$$

则由分部积分知, 上式

$$左方=e^{B_n^* t}B_n^* P(x_1,x_2)+\int_0^t e^{B_n^*(t-s)}\frac{d}{ds}\Phi(s,x_1,x_2)ds$$

$$+e^{B_n^* t}\Phi(0,x_1,x_2).$$

另一方面, 由条件 (6.7.7), (6.7.8) 和 $e^{B_n^* t}$ 的非负性,

$$右方\leqslant e^{B_n^* t}[B_n^* P(x_1,x_2)+\Phi(0,x_1,x_2)]$$

$$+\int_0^t e^{B_n^*(t-s)}\left(\frac{d}{ds}\Phi(s,x_1,x_2)\right)ds.$$

故得所述断言.

(b) 测度 $P(t,x,\cdot)$ 的构造.

在估计式 (6.7.18) 中, 取 $x_1=x_2=x$, 得

$$(6.7.21)\qquad \widetilde{R}^{w}_{n,m}(t,x,x)\leqslant 2(1+p(x))e^{ct}c(t,n,m)$$
$$t\geqslant 0,\ x\in E_0,\ w\in\Lambda_n,\ n\geqslant 1.$$

进而

$$R_a(P_n(t,x,\cdot),\ P_m(t,x,\cdot))$$
$$\leqslant\int\widetilde{P}_{n,m}(t;x,x;dy_1,dy_2)p_a(y_1,y_2)$$
$$=\sum_{w\in a}\widetilde{R}^{w}_{n,m}(t,x,x)$$
$$\leqslant 2(1+p(x))e^{ct}\sum_{w\in a}c_w(t,n,m)$$
$$\longrightarrow 0,\ m\geqslant n\rightarrow\infty.$$

应用定理（6.7.2），存在 $(E^a,\mathscr{E}^a)$ 上的概率测度 $P^a(t,x,\cdot)$，使得

$$(6.7.22)\qquad R_a(P_n(t,x,\cdot),\ P^a(t,x,\cdot))\rightarrow 0,$$
$$n\rightarrow\infty,$$

而且此收敛性对于 $E_0^{(N)}$ 中的 x 是一致的。另一方面，若 $\alpha\subset\beta$，$\alpha,\beta\in\mathscr{S}_f$，则

$$R_a(P^a(t,x,\cdot),\ P^\beta(t,x,\cdot))$$
$$\leqslant R_a(P_n(t,x,\cdot),P^a(t,x,\cdot))+R_a(P_n(t,x,\cdot),P^\beta(t,x,,\cdot))$$
$$\leqslant R_a(P_n(t,x,\cdot),P^a(t,x,\cdot))+R_\beta(P_n(t,x,\cdot),P^\beta(t,x,\cdot))$$
$$\rightarrow 0,\ n\rightarrow\infty$$

这表明测度族 $\{P^a(t,x,\cdot): a\in\mathscr{S}_f\}$ 是相容的。故由Колмогоров扩张定理知，存在 $(E,\ \mathscr{E})$ 上的概率测度 $P(t,x,\cdot)$，使得它到 $(E^a,\mathscr{E}^a)$ 上的投影就是 $P^a(t,x,\cdot)$ $(t\geqslant 0, x\in E_0)$。按照定理（6.7.2），依 KRW 距离的收敛性蕴涵弱收敛。故 $P_n(t,x,\cdot)$ 的有限维分布弱收敛于 $P(t,x,\cdot)$ 的有限维分布。

(c) 试证

$$P(t,x,E_0)=1,\ t\geqslant 0,\ x\in E_0.$$

而且 $P(t,\cdot,B)$ 是 $\mathscr{E}_0$ 可测的，$B\in\mathscr{E}_0$。

首先注意，由（6.7.16）知

$$(1+p(x))e^{ct}-1\geqslant\varliminf_{l\to\infty}\int P_n(t,x,dy)p(y)$$

$$\geqslant\varliminf_{l\to\infty}\int P_n(t,x,dy)p(y^{A_m})=\lim_{l\to\infty}\int P_n^{A}(t,x,dy)p(y^{A_m})$$

$$\geqslant\int P^{A_m}(t,x,dy)\,p\,(y^{A_w})=\int P(t,x,dy)p(y^{A_m}),$$

倒数第二步用到弱收敛性（参见定理(14.1.5)）。再命 $m\to\infty$，使用 Fatou 引理，便得

$$(6.7.23)\quad \int P(t,x,dy)p(y)\leqslant(1+p(x))e^{ct}-1.$$

这当然导致 $P(t,x,E_0)=1$。为证可测性，我们只需考虑 $(E,\mathscr{E})$ 上的有限维开集（开柱集）。然而，这种集合可用 L_0中的函数任意逼近*)，此处

L_0＝{f：存在 $\alpha\in\mathscr{S}_f$，使得 f 只依赖于 α 中的坐标且关于距离 p_α 是有界 Lipschitz 连续的}。

故我们只需考虑 $\int P(t,\cdot,dy)f(y)$ （$f\in L_0$）的 $\mathscr{E}_0$ 可测性。然而，$\int P_n(t,\cdot,dy)f(y)\in\mathscr{E}_0$，故作为它的极限，也有 $\int P(t,\cdot,dy)f(y)\in\mathscr{E}_0$。

(d) 其次，我们证明定理的末项断言。

由于

$$\begin{aligned}&R_\alpha(P(t,x_l,\cdot),\ P(t,x,\cdot))\\ &\leqslant R_\alpha(P(t,x_l,\cdot),P_n(t,x_l,\cdot))\\ &\quad+R_\alpha(P(t,x,\cdot),\ P_n(t,x,\cdot))\\ &\quad+R_\alpha(P_n(t,x,\cdot),P_n(t,x_l,\cdot)).\end{aligned}$$

故由条件(6.7.9)、（6.7.22）和（a），先取 n 足够大，再取 l 足够大，可以使上式右方任意小。

---

*) 参看（6.8.3）。

(e) 试证半群性。

由于 $(E,\mathscr{E})$ 上的两个概率测度若在有限维开集上重合，则它们必定相等。因此，如 (c) 中所述，我们只需就 $f\in \mathbf{L}_0$ 证明：

$$\int P(t+s,x,dy)f(y)$$
$$=\int P(t,x,dy)\int P(s,y,dz)f(z).$$

首先注意，由 (6.7.18)，(6.7.22) 和 (d) 得到：先令 $n\to\infty$，次令 $m\to\infty$，

$$\left|\int P_m(t,x^{\Lambda_m},dy)f(y)-\int P(t,x,dy)f(y)\right|$$
$$\leqslant\left|\int P_m(t,x^{\Lambda_m},dy)f(y)-\int P_n(t,x^{\Lambda_m},dy)f(y)\right|$$
$$+\left|\int P_n(t,x^{\Lambda_m},dy)f(y)-\int P(t,x^{\Lambda_m},dy)f(y)\right|$$
$$+\left|\int P(t,x^{\Lambda_m},dy)f(y)-\int P(t,x,dy)f(y)\right|\to 0,$$

故在 p 有界集上，一致地有

(6.7.24) $$\lim_{m\to\infty}\int P_m(t,x^{\Lambda_m},dy)f(y)=\int P(t,x,dy)f(y)$$

同样地，在 p 有界集上一致地有

(6.7.25) $$\lim_{m\to\infty}\left[\int P_m(t,x^{\Lambda_m},dy)f(y)-\int P(t,x^{\Lambda_m},dy)f(y)\right]$$
$$=0.$$

其次，由 (6.7.16) 知，对于任给的 $\varepsilon>0$，存在充分大的 N，使

(6.7.26) $$P_n(t,x,\{y\in E:\ p(y)>N\})$$
$$\leqslant\varepsilon\wedge\left(\frac{\varepsilon}{\|f\|_u}\right)$$

对于一切 $n\geqslant 1$ 成立。因此，若以 "$A\overset{(\varepsilon)}{=}B$" 表示 $|A-B|\leqslant\varepsilon$，

我们看到

$$\int P(t,x,dy)\int P(s,y,dz)f(z)$$

$$=\lim_{m\to\infty}\int P(t,x,dy)\int_{E^{\Delta_m}}P_m(s,y^{\Delta_m},dz)f(z)$$

$$=\lim_{m\to\infty}\quad\lim_{n\to\infty}\int P_n(t,x,dy)\int_{E^{\Delta_m}}P_m(s,y^{\Delta_m},dz)f(z)$$

$$\overset{(\varepsilon)}{=}\lim_{m\to\infty}\quad\lim_{n\to\infty}\int_{E_0^{(N)}}P_n(t,x,dy)\int_{E^{\Delta_m}}P_m(s,y^{\Delta_m},dz)f(z)$$

（由(6.7.26)）

$$\overset{(\varepsilon)}{=}\lim_{n\to\infty}\int_{E_0^{(N)}}P_n(t,x,dy)\int_{E^{\Delta_n}}P_n(s,y^{\Delta_n},dz)f(z)$$

（由(6.7.24)）

$$\overset{(\varepsilon)}{=}\lim_{n\to\infty}\int_{E_0^{(N)}}P_n(t,x,dy)\int_{E^{\Delta_n}}P_n(s,y,dz)f(z)$$

（由(6.7.25)）

$$\overset{(\varepsilon)}{=}\lim_{n\to\infty}\int_{E_0}P_n(t,x,dy)\int_{E_0}P_n(s,y,dz)f(z)$$

（由(6.7.26)）

$$=\lim_{n\to\infty}\int_{E_0}P_n(t+s,x,dy)f(y)=\int_{E_0}P(t+s,x,dy)f(y).$$

(f) 最后，如定理(6.4.1)证明的最后一步，我们可以构造出以$(E_0,\mathscr{E}_0)$为状态空间，以$P(t,x,\cdot)$为转移函数的马氏过程。 ▌

(6.7.27) **推论** 在定理(6.7.6)及(6.7.10)的假设下，若记

$$c_3=\sup_u\sum_w|c_{uw}|$$

则(6.4.2)成立。

证 由估计式(6.7.18)立得。 ▌

类似地，对于(6.4.14)和(6.4.22)可以平行地展开讨论，

(6.7.28) **注** 定理 (6.7.6) 适用于§6.6的所有模型的有限程情形：即 $\sup_w |\{u\in S: P(u,w)\neq 0\}| < \infty$. 作为例子，我们先来看看广义 Potlatch 过程 (6.6.10)．一阶矩那里已经验证过，即条件 (6.7.7) 满足，我们只需再检查条件 (6.7.8) 和 (6.7.9)．为此，使用耦合

$$\widetilde{\Omega}_{n,m}f(x^{(1)},x^{(2)}) = \sum_{|u|\leqslant n}\int_0^\infty [f(x^{(1)}-e_u x_u^{(1)}+\xi\sum_{|v|\leqslant n}P(u,v)x_u^{(1)}e_v,\ x^{(2)}-e_u x_u^{(2)}+\xi\sum_{|v|\leqslant m}P(u,v)x_u^{(2)}e_v) - f(x^{(1)},x^{(2)})]\times dF(\xi) + \sum_{n<|u|\leqslant m}\int_0^\infty [f(x^{(1)},x^{(2)}-e_u x_u^{(2)}+\xi\sum_{|v|\leqslant m}P(u,v)x_u^{(2)}e_v) - f(x^{(1)},x^{(2)})]dF(\xi),$$

那么

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\Omega}_{n,m}p_w(x^{(1)},x^{(2)})\\
&\leqslant\sum_{|u|\leqslant n}\int_0^\infty p_w\ ((x_u^{(1)}-x_u^{(2)})\ (e_u-\xi\sum_{v\leqslant n}P(u,v)e_v)\\
&\quad+\xi\sum_{n<|v|\leqslant m}P(u,v)e_v x_u^{(2)})dF(\xi)\\
&\quad+\sum_{n<|u|\leqslant m}\int_0^\infty p_w\ (e_u x_u^{(2)}-\xi\sum_{|v|\leqslant m}P(u,v)x_u^{(2)}e_v)dF(\xi)\\
&\leqslant p_w(x^{(1)},x^{(2)})+\sum_{|v|\leqslant n}p_u(x^{(1)},x^{(2)})P(u,w)k_w/k_u\\
&\quad+\sum_{n<|u|\leqslant m}x_u^{(2)}P(u,w)k_w,\quad w\in\Lambda_n\equiv\{u\in \mathbf{Z}^d:\ |u|\leqslant n\}.
\end{aligned}$$

取

$$c_{uw}=\begin{cases}P(u,w)k_w/k_u, & u\neq w,\\ P(u,u)+1, & u=w.\end{cases}\quad u,w\in S$$

$$c_w(n,m)=\sum_{n<|u|\leqslant m}P(u,w)k_w/k_u,\qquad w\in\Lambda_n,$$

则由 (6.7.10) 知，条件 (6.7.9)，进而 (6.7.27) 的假设都

满足。

最后，对于§6.5所讨论的反应扩散过程，我们取如下耦合

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{\Omega}_{n,m}f(x,y)\\
&=\sum_{u\in\Lambda_n}\sum_{k\neq 0}\{(q_u(x_u,x_u+k)-q_u(y_u,y_u+k))^+[f(x+ke_u,y)\\
&\quad -f(x,y)]+(q_u(y_u,y_u+k)-q_u(x_u,x_u+k))^+[f(x,y+\\
&\quad ke_u)-f(x,y)]+q_u(x_u,x_u+k)\wedge q_u(y_u,y_u+k)[f(x\\
&\quad +ke_u,y+ke_u)-f(x,x)]\}\\
&\quad +\sum_{u\in\Lambda_m-\Lambda_n}q_u(y_u,y_u+k)[f(x,y+ke_u)-f(x,y)]\\
&\quad +\sum_{u,v\in\Lambda_n}P(u,v)\{(c_u(x_u)-c_u(y_u))^+[f(x-e_u+e_v,y)-\\
&\quad -f(x,y)]+(c_u(y_u)-c_u(x_u))^+[f(x,y-e_u+e_v)-f(x,y)]\\
&\quad +c_u(x_u)\wedge c_u(y_u)[f(x-e_u+e_v,y-e_u+e_u)-f(x,y)]\}\\
&\quad +\sum_{u\in\Lambda_m-\Lambda_n}c_u(y_u)\sum_{v\in\Lambda_m}P(u,v)[f(x,y-e_u+e_v)-f(x,y)]\\
&\quad +\sum_{u\in\Lambda_n}c_u(y_u)\sum_{v\in\Lambda_m-\Lambda_n}P(u,v)[f(x,y-e_u+e_v)-f(x,y)],\\
&\qquad\qquad 1\leqslant n\leqslant m.
\end{aligned}
$$

这样，当 $w\in\Lambda_n$ 时，我们有

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\Omega}_{n,m}p_w(x,y)&=\sum_{u\in\Lambda_n}\sum_{k\neq 0}\{(q_u(x_u,x_u+k)-q_u(y_u,y_u+k))^+\\
&\quad\times[p_w(x+ke_u,y)-p_w(x,y)]+(q_u(y_u,y_u+k)\\
&\quad -q_u(x^u,x_u+k))^+[p_w(x,y+ke_u)-p_w(x,y)]\}\\
&\quad +\sum_{u,v\in\Lambda_n}P(u,v)\{(c_u(x_u)-c_u(y_u))^+[p_w(x-e_u+e_v,y)\\
&\quad -p_v(x,y)]+(c_u(y_u)-c_u(x_u))^+[p_w(x,y-e_u+e_v)\\
&\quad -p_w(x,y)]\}+\sum_{u\in\Lambda_m-\Lambda_n}c_u(y_u)\sum_{v\in\Lambda_n}P(u,v)[p_w(x,y+e_v)
\end{aligned}
$$

$$-p_w(x,y)]+\sum_{u\in\Lambda_n}c_n(y_u)\sum_{v\in\Lambda_m-\Lambda_n}P(u,v)[p_w(x,y-e_u)$$

$$-p_w(x,y)],$$

然后仿引理（6.5.21）的证法，容易得到（6.7.9）所需的估计.

如定理（6.7.6）之前所述，此定理适应于非常一般的函数 p. 另一方面，上述例子表明，它却限定了交互作用. 然而，对于 $p(x)=\sum_u\rho_u(x)k_u$，这个限定是可以放宽的. 下述结果适用于§6.6的所有模型.

（6.7.29） **定理** 取 $p(x)=\sum_{u\in S}\rho_u(x)k_u$. 假设存在常数 $c_1\in\boldsymbol{R}$ 和一个 M 可控矩阵 $(b(u,v):u,v\in S)$，使得

（6.7.30）
$$\int q_n(x,dy)(\rho_v(y)-\rho_v(x)).$$
$$\leqslant\beta_v+c_1\rho_v(x)+\sum_{u\in\Lambda_n}\rho_u(x)b(u,v),$$
$$v\in\Lambda_n,\ x\in E_0,\ n\geqslant 1.$$

此处

$$\beta_u\geqslant 0,\ u\in S;\quad \sum_u\beta_u k_u<\infty;$$

再设对于每 $1\leqslant n\leqslant m$，存在 Ω_n 和 Ω_m 的一个正则耦合 $\widetilde{\Omega}_{n,m}$，使得

（6.7.31）
$$\widetilde{\Omega}_{n,m}p_w(x_1,x_2)$$
$$\leqslant\sum_{u\in\Lambda_n}c_{uw}\,p_u(x_1,x_2)+\sum_{u\in\Lambda_m-\Lambda_n}p_u(x_2)g_{uw}+p_w(x_2)c_w(n,m),$$
$$w\in\Lambda_n,x_1,x_2\in E_0$$

此处 $(c_{uw}:\boldsymbol{u},w\in S)$，$(g_{uw}:u,w\in S)$ 和 $(c_w(n,m):w\in\Lambda_n)$ $(1\leqslant n\leqslant m)$ 均非负，而且满足

（6.7.32）
$$\sup_{m\geqslant n,u\in\Lambda_n}c_u(n,m)+\sup_u\sum_{v\in S}c_{uv}+\sup_u\sum_v g_{uv}<\infty,$$

$$\lim_{m\geq n\to\infty} c_u(n,m)=0;\ c_u(n,n)=0,u\in\Lambda_n,n\geqslant 1.$$

那么，存在 $(E_0,\mathscr{E}_0)$ 上的一个具有转移函数 $P(t,x,\cdot)$ 的马氏过程，使得

$$(6.7.33)\quad R_{\Lambda_n}(P_n(t,x,\cdot),\ P(t,x,\cdot))\to 0,\ n\to\infty.\qquad x\in E_0,$$

而且此收敛性在有限 t 区间上是一致的。再则，由 $P(t,x,\cdot)$ 所决定的 $\mathscr{L}$ 上的马氏半群 $\{P(t)\}_{t\geq 0}$ 具有如下性质：$P(0)=I$；在 $\mathscr{L}$ 的一致闭包 $\overline{\mathscr{L}}$ 上强压缩；存在常数 $c_3<\infty$，使

$$(6.7.34)\quad |P(t)f(x)-P(t)f(y)| \leqslant e^{c_3 t^2}L(f)p(x,y),\qquad t\geqslant 0,\ x,y\in E_0,\ f\in\mathscr{L}.$$

证明 首先，由引理 (6.2.8) 知，存在常数 c_2 使

$$\int P_n(t,x,dy)\,\rho_v(y)\leqslant\sum_{u\in\Lambda_n}[\rho_u(x)e^{c_1t}+\beta_u e^{c_2t}] \times\sum_{l=0}^{\infty}\frac{t^l}{l!}b^{(l)}(u,v),$$

$$t\geqslant 0,\ x\in E_0,\ v\in\Lambda_n,\ n\geqslant 1.$$

由此出发，仿定理 (6.7.6) 的证法可得如下估计：

$$(6.7.35)\quad \widetilde{R}^{w}_{n,m}(t,x_1,x_2)\leqslant[e^{C^*_n}p_{\cdot}(x_1,x_2)](w)$$

$$+\int_0^t ds\sum_{u\in\Lambda_m}[\rho_u(x_2)e^{c_1s}+\beta_u e^{c_2s}]\sum_{l=0}^{\infty}\frac{s^l}{l!}[e^{C^*_n(t-s)} \cdot b^{(l)}(u,\cdot)k_{\cdot}c_{\cdot}(n,m)](w)$$

$$+\int_0^t ds\sum_{u\in\Lambda_m}[\rho_u(x_2)e^{c_1s}+\beta_u e^{c_2s}]\cdot\sum_{l=0}^{\infty}\frac{s^l}{l!} \times\sum_{v\in\Lambda_m\setminus\Lambda_n}b^{(l)}(u,v)k_v[e^{C^*_n(t-s)}g_{v,\cdot}](w)$$

$$t\geqslant 0,\ x_1,x_2\in E_0,\ w\in\Lambda_n.$$

此处 $C_n=(c_{uv}:\ u,v\in\Lambda_n)$。注意条件 (6.7.30) 蕴涵条件 (6.7.7)，

仿前一定理可证：存在集中在E_0上的概率测度$P(t,x,\cdot)$，它满足除了半群性而外的各项性质。

注意由上式及假设条件（6.7.32），可得：存在$c_3<\infty$，使

$$(6.7.36)\quad |P_n(t)f(x)-P_n(t)f(y)|\leqslant L(f)\,e^{C_3 t}\rho(x_1,x_2),$$
$$t\geqslant 0,\ x_1,x_2\in E_0,\ f\in\mathscr{L},\ n\geqslant 1.$$

另一方面，由（6.7.33），（6.7.23）以及

$$\begin{aligned}&|(P_n(t)-P(t)f(x)|\\ &\leqslant |(P_n(t)-P(t))f_n(x)|+|P_n(t)(f-f_n)(x)|\\ &\quad+|P(t)(f-f_n)(x)|\\ &\leqslant L(f)R_{\Lambda_n}(P_n(t,x,\cdot),\ P((t,x,\cdot))\\ &\quad+L(f)\sum_{u\notin\Lambda_n}p_u(x)+L(f)\int P(t,x,dy)\sum_{u\notin\Lambda_n}p_u(y).\end{aligned}$$

此处$f_n(x)=f(x^{\Lambda_n})$，$f\in\mathscr{L}$，我们看到：引理（6.4.6）依然成立。现在，我们可以重复（6.4.8）之后的证明来完成本定理的证明。

§6.8 补充与注记

关于两个半群的分部积分公式（见（6.1.6））最早出现在Liggett和Spitzer[1].但那里只涉及有界算子的平凡情形.这里，我们给出了系统的处理。

我们在§6.2所讨论的模型，曾由БаСИС[1]研究过．一些特殊情形曾被Liggett和Spitzer[1]研究过．前者与§6.7所用的方法相近，后者与§6.4所用的方法相近．但这里基于q过程理论的证明方法跟他们是不同的．这使我们能够得到远为一般的存在性条件。

§6.5取自陈木法[5]，这里略有简化．主要是引理

(6.5.17).

零程过程（6.6.1）最早是Spitzer[1]提出的. Holley[1], Liggett[2]和 Andjel[1]都研究过这个过程的存在性.

(6.6.2) 属于郑小谷、丁万鼎[1].

(6.6.3) 和（6.6.4）取自陈木法[5].

(6.6.5) 见 Greven[1]. 但他并没有给出存在性证明.

(6.6.6) —（6.6.9)属于Spitzer[2], Liggett和Spitzer[1], 刘秀芳提供了（6.6.6）的详细证明.

(6.6.10) 属于 Holley 和 Liggett[1], 但那里没有给出详细证明.

本章的其余结果都是新的.

本章中，我们虽然给出了相当一般的存在性定理，然而它远非最终的. 至于唯一性，目前的认识就更为肤浅了.

关于紧空间情形的存在定理见 Liggett[1,3].

新近，Rachev[1]对定理（6.7.2）作了重要改进. 使我们对 KRW 距离与弱收敛拓扑之间的关系有了完整的认识. 今陈述如下：

(6.8.1) **定理** 设 $(E, \rho, \mathscr{E})$ 如（6.7.1）. 取(6.7.2)中的 P_0 为单点分布. 那么，为使 $\mathscr{W} \subset \mathscr{U}(P_0)$ 在 KRW 拓扑下相对紧，充要条件是

(i) $\mathscr{W}$ 在弱拓扑下相对紧;

(ii) 存在（或对每）$x_0 \in E$,

$$\lim_{c \to \infty} \sup_{P \in W} \int_{\{x: \rho(x, x_0) > c\}} \rho(x, x_0) P(dx) = 0$$

同时成立.

(6.8.2) **定理** 设 $P_n, P \in \mathscr{U}(P_0)$, 那么 P_n 依 KRW 距离收敛于 P 当且仅当

(i) P_n 弱收敛于P;

（ii）对某（或任何）$x_0 \in E$,

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{E}\rho(\xi_n, x_0) = \boldsymbol{E}\rho(\xi, x_0)$$

同时成立。此处 ξ_n 有分布 P_n，ξ 有分布 P。

文 Rachev[1]讨论了更一般的情形。关于概率距离空间研究的现状，请参看最近的综述文章 Zolotarev[1]。

本书多次用到下述结果。

（6.8.3）**引理** 设 $(E, \rho, \mathscr{E})$ 是距离可测空间，则每一开集可用有界 Lipschitz 函数任意逼近。

证 给定开集 U。取

$$f(x) = \frac{\rho(x, U^c)}{1 + \rho(x, U^c)}$$

则 f 是有界 Lipschitz 函数。命

$$q_n(v) = \begin{cases} 1, & \text{如 } |v| \geq \frac{1}{n}, \\ n|v|, & \text{如 } |v| < \frac{1}{n}. \end{cases}$$

则对于每 n，$q_n[f(x)]$ 也是有界 Lipschitz 函数，而且

$$q_n[f(x)] \uparrow I_U(x), \quad n \to \infty, \quad x \in E. \quad \blacksquare$$

（6.8.4）**推论** 设 $(E, \rho, \mathscr{E})$ 为距离可测空间，如$\mathscr{L}$系 $\boldsymbol{L}$ 包含一切有界 Lipschitz 函数，则 $\boldsymbol{L}$ 包含$\mathscr{L}$中的一切可测函数。

第二篇

可配称性和可逆性

第七章　可配称q过程

可配称、可逆马尔可夫过程的概念来源于统计物理．它反映了过程关于时间的可逆性质，即所谓"细致平衡"的微观可逆性．一方面，这类过程自身有重要的实际意义；另一方面，只有把这类过程研究清楚了，才有可能深入地研究不可逆过程（参见第十一章）．

本章将研究可配称（又称有势）q 过程的基本理论．主要有：可配称 q 过程的基本性质、存在性和唯一性．

§7.1　可配称和可逆q过程

(7.1.1) 定义　一个定义在概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\boldsymbol{P})$ 上、取值于 $(E,\mathscr{E})$ 的马氏过程 $(X_t:\ t\geqslant 0)$ 称为可逆的，如果对于任意有限多个 $0\leqslant t_1<\cdots<t_n$，

(7.1.2)　$t_n-t_{n-1}=t_2-t_1,\quad t_{n-1}-t_{n-2}=t_3-t_2,\quad\cdots$

和 $A_1,\ \cdots,\ A_n\in\mathscr{E}$，都有

$$\boldsymbol{P}[X_{t_1}\in A_1,\cdots,\ X_{t_n}\in A_n]$$
$$=\boldsymbol{P}[X_{t_1},\in A_n,\cdots,\ X_{t_n}\in A_1].$$

上述定义给出了可逆马氏过程明显的直观意义：有限维分布关于时间是对称的．由单调类定理立得

(7.1.3) 定理　过程 (X_t) 是可逆的，当且仅当对于任意有限的 $n\geqslant 1$ 和满足 (7.1.2) 的 $\{t_1,\cdots,\ t_n\}$，都有

$$\boldsymbol{E}[f(X_{t_1},\ \cdots,\ X_{t_n})]=\boldsymbol{E}[f(X_{t_n},\ \cdots,\ X_{t_1})],$$
$$f\in{}_b\mathscr{E}^n.$$

此处 $\mathscr{E}^n$ 为 $\mathscr{E}$ 的 n 重积.

下面，我们将把具有转移函数 $P(t,x,\cdot)$ 的马氏过程的可逆性归结为 $P(t,x,\cdot)$ 的可逆性. 为此，先引进如下概念：

(7.1.4) 定义 称 $P(t,x,\cdot)$ 是可逆的（相应地，可配称的），如果存在 $(E,\mathscr{E})$ 上的一概率测度（相应地，σ 有限测度）μ，使得

$$\int_A \mu(dx)\, P(t,x,B) = \int_B \mu(dx) P(t,x,A),$$
$$A,B\in\mathscr{E},\ t\geqslant 0.$$

此时称 μ 为一个可逆（相应地，配称）测度.

使用单调类定理，容易证明

(7.1.5) 定理 下述各项断言等价：

(i) $P(t,x,\cdot)$ 关于 μ 可配称;

(ii) 对一切 $A,B\in\mathscr{E}$ 和 $f\in {}_r\mathscr{E}_+$,

$$\int \mu(dx) f(x) P(t,x,B) = \int_B \mu(dx) \int P(t,x,dy) f(y),\ t\geqslant 0;$$

(iii) 对一切 $f,g\in {}_r\mathscr{E}_+$,

$$\int f(x) P(t) g(x) \mu(dx) = \int g(x) P(t) f(x) \mu(dx),\ t\geqslant 0,$$

$$P(t) f(x) \equiv \int P(t,x,dy) f(y);$$

(iv) 对一切 $f,g\in {}_r\mathscr{E}_+$,

$$\int f(x) P(\lambda) g(x) \mu(dx) = \int g(x) P(\lambda) f(x) \mu(dx),$$

$$P(\lambda) f(x) \equiv \int_0^\infty e^{-\lambda t} P(t) f(x)\, dt.$$

如果 $(E,\mathscr{E})$ 为距离可测空间，则上述断言均等价于

(v) 对一切 $f,g\in \mathscr{C}_+$,

$$\int f(x) P(t) g(x) \mu(dx) = \int g(x) P(t) f(x) \mu(dx),\ t\geqslant 0,$$

此处$\mathscr{C}$为 E 上一切连续函数的全体.

现在，我们可以给出本节的主要结果之一.

（7.1.6）**定理** 设(X_t)是具有转移函数 $P(t,x,\cdot)$ 和初分布μ的马氏过程. 那么，(X_t) 可逆的充要条件 是$P(t,x,\cdot)$关于μ可逆.

证 由假设，对于任何的 $0\leqslant t_1<\cdots<t_n$ 和$f\in {}_b\mathscr{E}^n$，我们有

$$
\begin{aligned}
&E[f(X_{t_1},\cdots,X_{t_n})]\\
&=\int\mu(dX_0)\int P(X_1,X_0,dX_1)\int\cdots\int P(t_n-t_{n-1},x_{n-1},dx_n)\\
&\quad\times f(x_1,\cdots,x_n).
\end{aligned}
$$

如果 (X_t) 是可逆的，则由

$$
P[X_0\in A,\ X_t\in B]=P[X_0\in B,\ X_t\in A]
$$

立得

$$
\int_A\mu(dx)P(t,x,B)=\int_B\mu(dx)P(t,x,A)
$$

从而必要性成立. 今设$P(t,x,\cdot)$ 关于μ可逆. 任取$\{t_1,\cdots,t_n\}$满足 (7.1.2) . 並置

$$
\begin{aligned}
g_n(x_1)=&\int f_{n-1}(x_2)P(t_2-t_1,\ x_1,dx_2)\\
&\times\int f_{n-2}(x_3)P(t_2-t_1,\ x_2,dx_3)\\
&\times\int\cdots\int f_1(x_n)P(t_n-t_{n-1},x_{n-1},dx_n)
\end{aligned}
$$

此处 $f_i\in{}_b\mathscr{E}(1\leqslant i\leqslant n)$，则

$$
g_n=P(t_2-t_1)(f_{n-1}g_{n-1})\ \in{}_b\mathscr{E},
$$

反复使用这一事实和 (7.1.5) ，便得

$$
\begin{aligned}
&E[f_n(x_{t_1})f_{n-1}(x_{t_2})\cdots f_1(x_{t_n})]\\
&=\int\mu(dx_0)\int f_n(x_1)P(t_1,x_0,dx_1)\\
&\quad\times\int f_{n-1}(x_2)P(t_2-t_1,x_1,dx_2)
\end{aligned}
$$

$$\times \int \cdots \int f_1(x_n) P(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, dx_n)$$

$$= \int \mu(dx_0) P(t_1) (f_n P(t_2 - t_1) (f_{n-1} g_{n-1}))(x_0)$$

$$= \int \mu(dx_0) (f_n P(t_2 - t_1) (f_{n-1} g_{n-1}))(x_0) P(t_1) 1 (x_0)$$

$$= \int \mu(dx_1) f_n(x_1) P(t_2 - l_1) (f_{n-1} g_{n-1})(x_1)$$

$$= \int \mu(dx_2) f_{n-1}(x_2) g_{n-1}(x_2) P(t_2 - t_1) f_n(x_2)$$

$$= \int \mu(dx_2) f_{n-1}(x_2) P(t_n - t_{n-1}) f_n(x_2) P(t_3 - t_2) (f_{n-2} g_{n-2})(x_2)$$

$$= \int \mu(dx_3) f_{n-2}(x_3) g_{n-2}(x_3) P(t_3 - t_2) (f_{n-1} P(t_n - t_{n-1}) f_n)(x_3)$$

$$= \cdots$$

$$= \int \mu(dy_1) f_1(y_1) \int f_2(y_2) P(t_2 - t_1, y_1, dy_2) \int \cdots$$

$$\times \int f_n(y_n) P(t_n - t_{n-1}, y_{n-1}, dy_n)$$

$$\equiv \int \mu(dy_1) f_1(y_1) P(t_2 - t_1) h(y_1)$$

$$= \int \mu(dy_0) P(t_1) (f_1 P(t_2 - t_1) h)(y_0)$$

$$= \boldsymbol{E}[f_1(X_{t_1}) \cdots f_n(X_{t_n})].$$

特别地，取 $f_i = I_{A_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$，便得到所需的结论。

(7.1.7) **推论** 每一可逆测度 μ 都是一个平稳分布。

证 在上述定理中取 $f_0 \equiv 1, f_1 \in {}_b\mathscr{E}$，立得

$$\boldsymbol{E}[f_1(X_t)] = \boldsymbol{E}[f_0(X_0) f_1(X_t)]$$

$$= \boldsymbol{E}[f_1(X_0) f_0(X_t)] = \boldsymbol{E}[f_1(X_0)]. \qquad \blacksquare$$

下面，我们将进一步由q过程$P(t, X, \cdot)$的可配称性和可逆性导出q对的相应性质。

(7.1.8) **定义** 称q对$q(x) - q(x, \cdot)$可配称（相应地，

可逆），如果存在σ有限测度（相应地，概率测度）μ，使

$$\int_A \mu(dx)q(x,B)=\int_B \mu(dx)q(x,A),\quad A,B\in\mathscr{E}$$

此时称μ为$q(x)-q(x,\cdot)$的配称（相应地，可逆）测度.

(7.1.9) **定理** 如果$P(t,x,\cdot)$关于μ可配称，则相应的q对亦然。

证 熟知

$$P(t,x,\{x\})\geqslant e^{-q(x)t},\quad x\in E,\ t\geqslant 0,$$

从而

$$\frac{P(t,x,B)}{t}\leqslant\frac{1-P(t,x,\{x\})}{t}\leqslant q(x),$$

下面分三步完成定理的证明。

(a) $A\cap B=\varnothing$.

任取$Q_n\uparrow E$，使$\mu(Q_n)<\infty$，$n\geqslant 1$；再设$G_n=[x\in E; q(x)\leqslant n]$，$n\geqslant 1$，则$G_n\uparrow E$. 由上面的注解、控制收敛定理和$q$过程的定义得

$$\int_A \mu(dx)q(x,B)=\lim_{n\to\infty}\int_{AG_nQ_n}\mu(dx)q(x,BG_nQ_n)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\lim_{t\downarrow 0}\int_{AG_nQ_n}\mu(dx)\frac{P(t,x,BG_nQ_n)}{t}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\lim_{t\downarrow 0}\int_{BG_nQ_n}\mu(dx)\frac{P(t,x,AG_nQ_n)}{t}$$

$$=\int_B \mu(dx)q(x,A).$$

(b) $A\supset B$.

由(a)得

$$\int_A \mu(dx)q(x,B)=\int_B \mu(dx)q(x,B)+\int_{A-B}\mu(dx)q(x,B)$$

$$=\int_B \mu(dx)q(x,B)+\int_B \mu(dx)q(x,AB^c)=\int_B \mu(dx)q(x,A).$$

(c) 一般情形

由(a)和(b)得

$$\int_A \mu(dx)q(x,B)=\int_A \mu(dx)q(x,AB)+\int_A \mu(dx)q(x,BA^c)$$

$$=\int_{A_B}\mu(dx)q(x,A)+\int_{BA^c}\mu(dx)q(x,A)=\int_B \mu(dx)q(x,A).\rbrack$$

利用单调类定理，容易证明

(7.1.10) **定理** 下述断言等价.

(i) $q(x)-q(x,\cdot)$ 关于 μ 可配称;

(ii) 对每 $A\in\mathscr{E}$ 和 $f\in{}_r\mathscr{E}_+$,

$$\int \mu(dx)f(x)q(x,A)=\int_A \mu(dx)\int q(x,dy)f(y)$$

(iii) 对一切 $f,g\in{}_r\mathscr{E}_+$,

$$\int f(x)qg(x)\mu(dx)=\int g(x)qf(x)\mu(dx)$$

$$qf(x)\equiv\int q(x,dy)f(y),\ x\in E.$$

如果 $(E,\mathscr{E})$ 是距离可测空间，则它们也等价于

(iv) 对一切 $f,g\in\mathscr{C}_+$,

$$\int f(x)qg(x)\mu(dx)=\int g(x)qf(x)\mu(dx).$$

§7.2 存在性 唯一性判据

可配称 q 过程的第一个最重要的结果是

(7.2.1)**定理** 最小q过程关于μ可配称当且仅当其q对关于 μ 可配称. 特别地，对于给定的可配称q时，可配称q 过程总存在.

证 必要性见定理 (7.1.9) .往证充分性. 命

$$P^{(1)}(\lambda,x,A)=\delta(x,A)/(\lambda+q(x)),$$

$$P^{(n+1)}(\lambda,x,A)=\int q(x,dy)P^{(n)}(\lambda,y,A)/(\lambda+q(x)),$$

$$n\geqslant 1,$$

则 $P^{\min}(\lambda,x,A)=\sum_{n=1}^{\infty}P^{(n)}(\lambda,x,A)$. 另一方面,

$$\int_A \mu(dx)P^{(1)}(\lambda,x,B)=\int_{AB}\mu(dx)/(\lambda+q(x))$$

关于 A, B 对称. 从而 $P^{(1)}(\lambda,x,\cdot)$ 关于 μ 可配称. 假定对于 n 已真. 那么, 由 q 对关于 μ 的可配称性和定理 (7.1.10) 得

$$\begin{aligned}
&\int_A\mu(dx)P^{(n+1)}(\lambda,x,B)\\
&=\int_A\mu(dx)\int q(x,dy)P^{(n)}(\lambda,y,B)/(\lambda+q(x))\\
&=\int\mu(dx)\left(\frac{\delta(x,A)}{\lambda+q(x)}\right)qP^{(n)}(\lambda,\cdot,B)(x)\\
&=\int\mu(dx)P^{(n)}(\lambda,x,B)\ q\left(\frac{\delta(\cdot,A)}{\lambda+q(\cdot)}\right)(x)\\
&=\int\mu(dx)P^{(n)}(\lambda,x,B)\int_A\frac{q(x,dy)}{\lambda+q(y)}.
\end{aligned}$$

但由归纳假设

$$\int_A\mu(dx)P^{(n)}(\lambda,x,B)=\int_B\mu(dx)P^{(n)}(\lambda,x,A),$$

$$\lambda>0,\ A,B\in\mathscr{E}.$$

从而由单调类定理知

$$\int\mu(dx)f(x)P^{(n)}(\lambda,x,B)=\int_B\mu(dx)\int P^{(n)}(\lambda,x,dy)f(y),$$

$$\lambda>0, B\in q, f\in\mathscr{E}_+$$

于是, 由前面所证

$$\begin{aligned}
&\int_A\mu(dx)P^{(n+1)}(\lambda,x,B)\\
&=\int\mu(dx)P^{(n)}(\lambda,x,B)\int_A\frac{q(x,dy)}{\lambda+q(y)}\\
&=\int_B\mu(dx)\int P^{(n)}(\lambda,x,dy)\int_A\frac{q(y,dz)}{\lambda+q(z)}
\end{aligned}$$

$$=\int_B \mu(dx)P^{(n+1)}(\lambda,x,A)$$

最后一步用到（2.2.8）. 这就证得

$$\int_A \mu(dx)P^{(n)}(\lambda,x,B)=\int_B \mu(dx)P^{(n)}(\lambda,x,A),$$

$$\lambda>0, A,B\in\mathscr{E}, n\geqslant 1.$$

将上式两边对 n 求和，立知 $P^{\min}(\lambda,x,\cdot)$ 关于 μ 可配称. ▌

显然有

（7.2.2）**推论** 若 $q(x)-q(x,\cdot)$ 关于 μ 可配称且 q 过程唯一，则关于 μ 的可配称 q 过程存在且唯一.

在本节的余下部分，我们将给出唯一性的另一个非平凡的充分条件. 注意

$$\{x\in E:\exists\lambda>0,\exists A\in\mathscr{E}\text{ 使 }P(\lambda,x,A)\neq P^{\min}(\lambda,x,A)\}$$

$$=\{x\in E:\exists\lambda>0\text{ 使 }P(\lambda,x,E)\neq P^{\min}(\lambda,x,E)\}$$

$$=\{x\in E:\forall\lambda>0,\ P(\lambda,x,E)\neq P^{\min}(\lambda,x,E)\}$$

显然是 $\mathscr{E}$ 可测的. 因而可引进

（7.2.4）**定义** 称 q 过程 $P(\lambda,x,\cdot)$ 和 $P^{\min}(\lambda,x,\cdot)$ 是 μ 等价的，如果

$$\mu[x\in E:\exists\lambda>0,\exists A\in\mathscr{E}\text{ 使 }P(\lambda,x,A)\neq P^{\min}(\lambda,x,A)]=0.$$

如 $P_i(\lambda,x,\cdot)\ (i=1,2)$ 均 μ 等价于 $P^{\min}(\lambda,x,\cdot)$，则称它们自身是 μ 等价的.

显然有

（7.2.5）**引理** 两个 μ 等价的 q 过程或者同时为 μ 可配称的，或者同时非 μ 可配称的.

（7.2.6）**引理** 设 $q(x)-q(x,\cdot)$ 关于 μ 可配称，$\{f_\lambda:\lambda>0\}$ 为协调族，则

$$\mu[x\in E:f_\lambda(x)\neq 0]=0$$

是否成立与 $\lambda>0$ 无关. 特别地，若上式对 $z(\lambda,\cdot)$ 成立且 q 对保

守，则可记$\dim\mathscr{U}\overset{\mu}{=}0$。

证 设有$\mu>0$使$\mu[x\in E:f_{\mu}(x)\neq 0]=0$，则由协调性得

$$\int\mu(dx)f_{\lambda}(x)$$

$$=\int\mu(dx)f_{\mu}(x)+(\mu-\lambda)\int\mu(dx)\int P^{\min}(\lambda,x,dy)f_{\mu}(y)$$

$$=(\mu-\lambda)\int\mu(dx)P^{\min}(\lambda)f_{\mu}(x)$$

$$=(\mu-\lambda)\int\mu(dx)f_{\mu}(x)P^{\min}(\lambda,x,E)$$

$$=0,\qquad \lambda>0,$$

倒数第二步用到定理（7.2.1）． ▌

（7.2.7）**定理** 设$q(x)-q(x,\cdot)$保守、关于μ可配称。若$\dim\mathscr{U}\overset{\mu}{=}0$或

$$\int\mu(dx)q(x)<\infty,$$

则在μ等价意义下，关于μ的可配称q过程唯一。

证 由于

$$\int\mu(dx)(\lambda+q(x))z(\lambda,x)$$

$$=\int\mu(dx)\int q(x,dy)z(\lambda,y)$$

$$=\int\mu(dx)z(\lambda,x)q(x,E)$$

$$=\int\mu(dx)z(\lambda,x)q(x)$$

$$\leqslant\int\mu(dx)q(x)<\infty.$$

从而

$$\int\mu(dx)z(\lambda,x)=0,\qquad \lambda>0.$$

这样，对任一 q 过程 $P(\lambda,x,\cdot)$，我们有

$$\mu[x\in E: \text{存在 } \lambda>0 \text{ 和} A\in\mathscr{E} \text{ 使 } P(\lambda,x,A)\neq P^{\min}(\lambda,x,A)]$$
$$=\mu[x\in E: \text{存在 } \lambda>0 \text{ 使 } P(\lambda,x,E)\neq P^{\min}(\lambda,x,E)]$$
$$\leqslant\mu[x\in E: \text{存在 } \lambda>0 \text{ 使 } z(\lambda,x)\neq 0]=0.$$ ∎

(7.2.8) **定理** 设

$$\int\mu(dx)z(\lambda,x)<\infty, \qquad \lambda>0,$$

则存在 μ 几乎不断的可配称 B_q 过程的充要条件是，

(i) q对关于 μ 可配称，

(ii) q对保守，

同时成立。

证 当 q 对非保守时，不存在不断的 B_q 过程。故必要性是明显的。当 (i) 、 (ii) 成立且 $\dim\mathscr{U}_\lambda=0$，存在性是平凡的。如 $\dim\mathscr{U}_\lambda\neq 0$ 但 $\dim\mathscr{U}_\lambda\overset{\mu}{=}0$，则任一 B_q 过程等价于 $P^{\min}(\lambda)$，且 μ 几乎不断。如 $\dim\mathscr{U}_\lambda\overset{\mu}{\neq}0$，则

$$P(\lambda,x,A)=P^{\min}(\lambda,x,A)+z(\lambda,x)\varphi_\lambda(A)/(\lambda\varphi_\lambda(E))$$

$$\varphi_\lambda(A)=\int\mu(dx)z(\lambda,x)$$

便是一个不断的 B_q 过程。 ∎

§7.3 向前 向后方程的等价性

本节将证明，对于可配称 q 过程来说，向前、向后方程是几乎等价的。

(7.3.1) **定义** 称向后方程(B_λ)（相应地，向前方程(F_λ)）μ 几乎处处成立，如果存在 μ 零集 N，使得对于一切 $x\notin N$，$A\in\mathscr{E}$ 和 $\lambda>0$，方程 (B_λ)（相应地，(F_λ)）成立。

(7.3.2) **定理** 设 $(E,\mathscr{E})$ 是可数生成的，$P(\lambda,x,\cdot)$ 是任一关于 μ 可配称的 q 过程。那么，$P(\lambda,x,\cdot)$ μ 几乎处处满足

(B_λ) 当且仅当它 μ 几乎处处满足 (F_λ) .

证 设 $P(\lambda,x,\cdot)$ μ 几乎处处满足 (B_λ) . 回忆我们已有 q 划分 $\{E_n\}_1^\infty\subset\mathscr{E}$. 再令 $G_m\uparrow E$, 使 $\mu(G_m)<\infty$. 那么, 由定理 (7.1.9), (7.1.10) 和 (7.1.5) 得

$$
\begin{aligned}
&\int_B I_{AG_mE_n}(x)\mu(dx)\\
&=\int_{AG_mE_n}\mu(dx)(\lambda+q(x))P(\lambda,x,B)\\
&\quad-\int_{AG_mE_n}\mu(dx)\int q(x,dy)P(\lambda,y,B)\\
&=\int_{AG_mE_n}\mu(dx)(\lambda+q(x))P(\lambda,x,B)\\
&\quad-\int I_{AG_mE_n}(x)\mu(dx)(qP(\lambda,\cdot,B))(x)\mu(dx)\\
&=\lambda\int_{AG_mE_n}\mu(dx)P(\lambda,x,B)\\
&\quad-\int\mu(dx)[q(x,AG_mE_n)-q(x)\,I_{AG_mE_n}(x)]P(\lambda,x,B)\\
&=\lambda\int_B\mu(dx)P(\lambda,x,AG_mE_n)\\
&\quad-\int I_B(x)P(\lambda)[q(\cdot,AG_mE_n)-q(\cdot)\,I_{AG_mE_n}(\cdot)](x)\mu(dx)\\
&=\int_B\mu(dx)[\lambda P(\lambda,x,AG_mE_n)-\int P(\lambda,x,dy)\ (q\ (y,AG_mE_n)\\
&\quad-q\ (y)\ I_{AG_mE_n}(y))]\ , \qquad B\in\mathscr{E}
\end{aligned}
$$

取 Radon - Nikodym 导数, 得

$$
\begin{aligned}
&\lambda P(\lambda,x,AG_mE_n)\\
&=\int P(\lambda,x,dy)[q(y,AG_mE_n)-q(y)\ I_{AG_mE_n}(y)]\\
&\quad+\delta(y,AG_mE_n), \qquad \mu\text{—}a.e.
\end{aligned}
$$

令 $m\to\infty$, 得

$$\lambda P(\lambda,x,AE_n)$$

$$= \int P(\lambda, x, dy)[q(y, AE_n) - q(y) I_{AE_n}(y)] + \delta(x, AE_n),$$

$$n \geqslant 1, \quad \mu\text{—}a.e.$$

此外，例外集依赖于 $\lambda>0$，A 和 n. 然而，对于 x 和 A，由预解方程知，$P(\lambda,x,A)$ 关于 λ 连续，因此，我们可选例外集，使之只依赖于 A 和 n. 再利用 $(E,\mathscr{E})$ 的可数生成性质，我们可取到与 A 和 n 也无关的例外集.

类似地可证定理的另一部分断言. ▌

§7.4 q 过程的一般表达式

为了进一步探讨唯一性，我们需要对过程的流入、流出边界作较细致的研究. 即需要某种边界理论，本节先给出 Feller 边界的一些初步的结果，然后导出 q 过程的一般表达式. 本节可看作是第二章的补充.

为方便，用 $\mathscr{U}_\lambda(a)$ 表示以 a 为界的 $\mathscr{U}_\lambda$ 的子集. 回忆 $d(x) \equiv q(x) - q(x,E)$ 为点 x 的非守保量，$z(\lambda,x) = 1 - \lambda P^{\min}(\lambda,x,E)$. 它们之间有如下关系：

(7.4.1) **定理.** 我们有

$$z(\lambda,x) = \overline{X}_\lambda(x) + \int P^{\min}(\lambda,x,dy) d(y),$$

$$\lambda>0, x\in E.$$

其中 $\overline{X}_\lambda$ 为 $\mathscr{U}_\lambda(1)$ 中的最大元. 它可用如下方式得到：命

$$\xi^{(0)}(\lambda,x) = 1,$$

$$\xi^{(n+1)}(\lambda,x) = \int \frac{q(x,dy)}{\lambda+q(x)} \xi^{(n)}(\lambda,y), \qquad n\geqslant 0.$$

则 $\quad \xi^{(n)}(\lambda,x) \downarrow \overline{X}_\lambda(x), \qquad \lambda>0, x\in E.$

证 由引理 (2.5.13) 知，$z(\lambda,\cdot)$ 是方程 (2.5.14) 的最大解；另一方面，由定理 (2.2.5) 和 (2.1.21) 知，$\int P^{\min}(\lambda,\cdot,$

$dy)d(y)$是方程（2.5.14）的最小解。从而两者之差必为$\mathscr{U}_\lambda(1)$中的最大元，迭代方法是典型的。 ▌

若定义

$$\pi(\lambda,x,dy)=q(x,dy)/(\lambda+q(x)),$$
$$\pi(\lambda)^0(x,dy)=\delta(x,dy),$$
$$\pi(\lambda)^{n+1}(x,dy)=\pi(\lambda)\circ\pi(\lambda)^n(x,dy),\ n\geqslant 0,$$

则上面的迭代意味着

$$\pi(\lambda)^n 1\ \downarrow\ \overline{X}_\lambda,$$

此处

$$\pi(\lambda)f(x)\equiv\int\pi(\lambda,x,dy)f(y),x\in E,\ \lambda>0,$$

类似地，可定义

$$\pi(x,dy)=\begin{cases}q(x,dy)/q(x), & \text{如 } q(x)\neq 0,\\ \delta(x,dy), & \text{如 } q(x)=0\end{cases}$$

和

$$\pi^0(x,dy)=\delta(x,dy),\ \pi^{n+1}(x,dy)=\pi\circ\pi^n(x,dy).$$

下面，我们要讨论协调族的表现。注意由预解方程知，协调族是单调下降的：

$$f_\lambda\ \downarrow,\quad \eta_\lambda\ \downarrow,\quad \text{如 } \lambda\uparrow.$$

于是可引进

（7.4.2）**定义** 分别称

$$f\equiv\lim_{\lambda\downarrow 0}f_\lambda\quad ,\ \eta\equiv\lim_{\lambda\downarrow 0}\eta_\lambda$$

为协调族（f_μ）和（η_μ）的标准映像。

（7.4.3）**引理** 协调族及其标准映像有如下关系：

$$f=f_\mu+\mu\int\Gamma(\cdot,dy)f_\mu(y)^{*)},\ \mu>0,$$

$$\eta=\eta_\mu+\mu\int\eta_\mu(dx)\Gamma(x,\cdot),\ \mu>0,$$

*) 如$q(x)=0$，则由$\pi(\mu)f_\mu=f_\mu$知$f_\mu(x)=0$，因而$f_\mu(x)/q(x)=0\cdot\infty=0$。

此处

$$\Gamma(x,A)=\lim_{\lambda\downarrow 0}P^{\min}(\lambda,x,A)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(\pi^n q(\cdot)^{-1})(x,A)$$

此外

$$f=f_\lambda+\lambda\int P^{\min}(\lambda,\cdot,dy)\,f(y),\quad \lambda>0,$$

$$\eta=\eta_\lambda+\lambda\int\eta(dx)P^{\min}(\lambda,x,\cdot),\quad \lambda>0.$$

证 由协调性

$$f_\lambda=f_\mu+(\mu-\lambda)\int P^{\min}(\lambda,\cdot,dy)\,f_\mu(y),$$

$$f_\mu=f_\lambda+(\lambda-\mu)\int P^{\min}(\lambda,\cdot,dy)\,f_\mu(y).$$

如$\int\Gamma(x,dy)f_\mu(y)<\infty$，在前一式中令$\lambda\downarrow 0$，由（1.2.25）得到待证的第一式。如$\int\Gamma(x,dy)\,f_\mu(y)=\infty$。则只需使用 Fatou 引理。类似地可在后一式令$\mu\downarrow 0$得到f的另一分解式。关于η的分解式的证法类似。余下的只是验证

$$\Gamma(x,A)=\sum_{n=1}^{\infty}(\pi^n q(\cdot)^{-1})(x,A)$$

这容易由

$$P^{\min}(\lambda,x,A)=\sum_{n=1}^{\infty}P^{(n)}(\lambda,x,A)$$

和归纳法导出。此处$P^{(n)}(\lambda,x,A)$定义如（7.2.1）证明中的开头。 ▮

记非保守点集为

$$H=\{x\in E:\ d(x)>0\}$$

由定理（7.4.1）立知

$$\tilde{X}_\lambda(x)=\int_H P^{\min}(\lambda,x,dy)d(y)$$

$$=\int P^{\min}(\lambda,x,dy)d(y)$$

$$\leqslant z(\lambda,x)\leqslant 1,\qquad \lambda>0,\ x\in E$$

由（2.5.4）立见$(\widetilde{X}_\lambda:\ \lambda>0)$是协调族，从而有标准映像$\widetilde{X}$。

（7.4.4）**引理** 我们有

（7.4.5）　$\overline{X}+\widetilde{X}+X^0=1$

其中

（7.4.6）　$\widetilde{X}=\int_H \Gamma(\cdot,dy)d(y)$

（7.4.7）　$\widetilde{X}_\lambda=\widetilde{X}-\lambda\int P^{\min}(\lambda,\cdot,dy)\widetilde{X}(y)$

$\overline{X}$为协调族$\overline{X}_\lambda$的标准映像，从而

（7.4.8）　$\overline{X}_\lambda=\overline{X}-\lambda\int P^{\min}(\lambda,\cdot,dy)\overline{X}(y)$

（7.4.9）　$\overline{X}\in\mathscr{U}$,

$$\mathscr{U}=\{f\in\mathscr{E}:\quad \pi f=f,\quad 0\leqslant f\leqslant 1\}$$

而X^0是满足

（7.4.10）　$X^0=\lambda\int P^{\min}(\lambda,\cdot,dy)X^0(y)$

的$\mathscr{U}$中的最大元。

证 由定理（7.4.1）知

$$\overline{X}_\lambda+\widetilde{X}_\lambda\leqslant z(\lambda,\cdot)\leqslant 1$$

从而

$$1\geqslant X^0\equiv\lim_{\lambda\downarrow 0}(1-\overline{X}_\lambda-\widetilde{X}_\lambda)$$

$$=1-\overline{X}-\widetilde{X}\geqslant 0.$$

这就是（7.4.5）．（7.4.6）—（7.4.9）是明显的。再用一次（7.4.1）和（7.4.7），便得（7.4.10）．为证$X^0\in\mathscr{U}$．首先注意，由上述X^0的定义知

$$\lambda P^{\min}(\lambda,\cdot,E)\downarrow X^0,\ \text{当}\ \lambda\downarrow 0$$

如 $q(x)=0$，则自然有 $X^0(x)=\pi X^0(x)$。否则，由方程 (B_λ) 也可导出 $X^0(x)=\pi X^0(x)$。最后，方程 $\lambda\int P^{\min}(\lambda,\cdot,dy)f(y)=f$，$0\leqslant f\leqslant 1$ 的任一解 f 满足

$$f\leqslant\lambda\int P^{\min}(\lambda,\cdot,dy)f(y)\leqslant\lambda P^{\min}(\lambda,\cdot,E)$$

从而 $f\leqslant\lim\limits_{\lambda\downarrow 0}\lambda P^{\min}(\lambda,\cdot,E)=X^0$ 】

(7.4.11) **引理**

(i) $\{f_\lambda:\ \lambda>0\}$ 为函数的协调族的充要条件是它有如下表现：

$$f_\lambda=\int P^{\min}(\lambda,\cdot,dy)\alpha(y)+\overline{f}_\lambda$$

其中 α 对某（从而对一切）$\lambda>0$，满足

$$\int P^{\min}(\lambda,\cdot,dy)\alpha(y)\in{}_b\mathscr{E}_+,$$

而 $\overline{f}_\lambda\in\mathscr{U}_\lambda$ 为协调族。α 因而 $\overline{f}_\lambda$ 由 f_λ 唯一决定：

$$\alpha(x)=(\lambda I-\Omega)f_\lambda(x),x\in E,$$

$$f_\lambda\downarrow 0,\ \lambda f_\lambda\to\alpha,\ \text{当}\ \lambda\uparrow\infty。$$

此处 $\Omega f(x)=\int q(x,dy)f(y)-q(x)f(x)$，$x\in E$，而 I 为单位算子。

(ii) $\{\eta_\lambda:\ \lambda>0\}$ 为测度的协调族的充要条件是它有如下表现：

$$\eta_\lambda=\int w(dx)\,P^{\min}(\lambda,x,\cdot)+\overline{\eta}_\lambda,$$

其中 $w\in\overline{\mathscr{L}}_+$ 对某个（从而一切）$\lambda>0$，

$$\int w(dx)\,P^{\min}(\lambda,x,\cdot)\in\mathscr{L}_+$$

而 $\{\overline{\eta}_\lambda\in\mathscr{V}_\lambda:\ \lambda>0\}$ 是测度的协调族。w 因而 $\overline{\eta}_\lambda$ 由 η_λ 唯一决定：

$$w(A)=\int\eta_\lambda(dx)\,[(\lambda+q(x))(\delta(x,A)-q(x,A)].$$

$$A\in\mathscr{E}\cap\dot{E}_n,\ n\geqslant 1,$$

$$\eta_\lambda\downarrow 0,\ \lambda\eta_\lambda(A)\to w(A),\ 当\ \lambda\uparrow\infty,$$

$$A\in\mathscr{E}\cap E_n,\ n\geqslant 1.$$

证 断言 (ii) 是引理 (3.1.3) 所证明的结论及 (3.1.10) 的重述. 断言 (i) 可用类似的方法证明. ▌

(7.4.12) **推论** 当 $\lambda\uparrow\infty$ 时,

$$\overline{X}_\lambda\downarrow 0,\quad \lambda\overline{X}_\lambda\to 0;$$

$$\widetilde{X}_\lambda\downarrow 0,\quad \lambda\widetilde{X}_\lambda(x)\to d(x),\ x\in E.$$

(7.4.13) **引理** 设 $\{\eta_\lambda:\ \lambda>0\}$ 为测度协调族, 则

$$\tau^0\equiv\lambda\int\eta_\lambda(dx)X^0(x)<\infty\quad 与\ \lambda>0\ 无关.$$

再设 $\{f_\lambda:\ \lambda>0\}$ 为函数协调族, 有标准映像 $f\in{}_b\mathscr{E}_+$, 则

$$\lambda\int\eta_\lambda(dx)\,f(x)\ \uparrow,\ 当\ \lambda\uparrow\infty$$

特别地, 当 $a\in H$ 时, 若记 $X_\lambda^a(x)=P^{\min}(\lambda,x,\{a\})d(a)$, 则

$$V_\lambda^a\equiv\lambda\int\eta_\lambda(dx)X^a(x)\uparrow V^a<\infty,\ X^a=\delta(x,a)d(a),$$

$$V^a=V_\mu^a+\eta_\mu(\{a\})d(a)\ 与\ \mu>0\ 无关.$$

证 由引理 (7.4.3)

$$\lambda\int\eta_\lambda(dx)\,f(x)=\lambda\int\eta_\mu(dx)\int R(\mu,\lambda;x,dy)\,f(y)$$

$$=\lambda\int\eta_\mu(dx)\,f(x)+(\mu-\lambda)\int\eta_\mu(dx)\int\lambda P^{\min}(\lambda,x,dy)f(y)$$

$$=\lambda\int\eta_\mu(dx)\,f(x)+(\mu-\lambda)\int\eta_\mu(dx)\,[f(x)-f_\lambda(x)]$$

$$=\mu\int\eta_\mu(dx)\,f(x)+(\lambda-\mu)\int\eta_\mu(dx)\,f_\lambda(x).$$

从而第二项断言成立. 类似地可证第一项断言. 特别地, 由上式得

$$V_\lambda^a=V_\mu^a+(\lambda-\mu)\int\eta_\mu(dx)\,X_\lambda^a(x),\ x\in H,$$

但 $\lambda X_\lambda^a \leqslant d(a)$，故由控制收敛定理立得后一项断言． 】

下述结果是定理（1.2.25）的改进．

（7.4.14）**定理** q 过程 $P(\lambda,x,\cdot)$ 在点 x 处满足向后方程 (B_1)，即

$$P(\lambda,x,A)=\int\frac{q(x,dy)}{\lambda+q(x)}P(\lambda,y,A)+\frac{\delta(x,A)}{\lambda+q(x)}$$

对一切 $\lambda>0$ 和 $A\in\mathscr{E}$ 成立的充要条件是

（7.4.15） $d(x)=\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda[1-\lambda P(\lambda,x,E)]\equiv D(x)$.

一般地，用"$\geqslant$"代替"$=$"，上式成立．

证 使用虚构状态 $\triangle$，得到 $(E_\triangle,\mathscr{E}_\triangle)$．命

$$P_\triangle(t,x,A)=I_E(x)[P(t,x,A-\{\triangle\})+I_A(\triangle)\times(1-P(t,x,E))]+I_{\{\triangle\}}(x)\delta(x,A).$$
$$x\in E_\triangle,\ A\in\mathscr{E}_\triangle.$$

它显然是一个跳过程，而且 $q_\triangle(x)=I_E(x)q(x)$，从而是 $(E_\triangle,\mathscr{E}_\triangle)$ 上的 q 过程．于是，极限

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda[1-\lambda P(\lambda,x,E)]=\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^2P_\triangle(\lambda,x,\{\triangle\}),\qquad x\in E$$

存在．进而由（4.3.2）得．

$$D(x)=\lim_{\lambda\to\infty}\lambda[1-\lambda P(\lambda,x,E)]\leqslant\lim_{\lambda\to\infty}\lambda z(\lambda,x)=d(x),$$

此即证得最后一项断言．由前面的两项事实易见

$$q_\triangle(x,A)=I_E(x)[q(x,A-\{\triangle\})-I_A(\triangle)D(x)]$$

另一方面，由向后不等式得

$$\lambda P(\lambda,x,A)-\delta(x,A)\geqslant\int_E(q(x,dy)-q(x)\delta(x,dy))P(\lambda,y,A)$$

关于 $P_\triangle(\lambda,x,E_\triangle-A)$ 也有类似的不等式．于是

$$0\geqslant\lambda P_\triangle(\lambda,x,E_\triangle)-1$$
$$=[\lambda P(\lambda,x,A)-\delta(x,A)]+[\lambda P_\triangle(\lambda,x,E_\triangle-A)-$$

$$\delta(x, E_\triangle - A)]$$

$$\geqslant [\int_E (q(x, dy) - q(x)\delta(x, dy)) P(\lambda, y, A)]$$

$$+ [\int_{E_\triangle} (q_\triangle(x, dy) - q_\triangle(x)\delta(x, dy)) P_\triangle(\lambda, y, E_\triangle - A)]$$

$$= \int_E [q(x, dy) - \delta(x, dy)][P(\lambda, y, A) + P(\lambda, y, E-A)$$

$$+ 1/\lambda - P(\lambda, y, E)]$$

$$+ [q_\triangle(x, \{\triangle\}) - q(x)\delta(x, \{\triangle\})] P_\triangle(\lambda, \triangle, \{\triangle\})$$

$$= [q(x, E) - q(x) + D(x)]/\lambda,$$

$$\lambda > 0,\ x \in E,\ A \in \mathscr{E}.$$

这样，只要 $D(x) = d(x)$，上式的每一步的等号必定成立。特别地，方程 (B_λ) 在点 x 处成立。

反之，若在 x 处满足 (B_λ)，则

$$D(x) = \lim_{\lambda \to \infty} \lambda[1 - \lambda P(\lambda, x, E)]$$

$$= \int [q(x, dy) - q(x)\delta(x, dy)] \lim_{\lambda \to \infty} \lambda P(\lambda, x, E)$$

$$= d(x). \quad \blacksquare$$

下面是 q 过程的一般形式

(7.4.16) **定理** 任一 q 过程必有如下形式

$$P(\lambda, x, A) = P^{\min}(\lambda, x, A) + B(\lambda, x, A)$$

$$+ \int_H X(\lambda, x, A) F(\lambda, x, A),$$

$$\lambda > 0,\ x \in E,\ A \in \mathscr{E}.$$

其中

(7.4.17) $$X(\lambda, x, A) = \int_A P^{\min}(\lambda, x, dy) d(y),$$

$$\lambda > 0,\ x \in E,\ A \in \mathscr{E}$$

(7.4.18) 对于固定的 λ 和 x，

$B(\lambda, x, \cdot)$，$F(\lambda, x, \cdot) \in \mathscr{L}_*$;

$\lambda B(\lambda,x,E)\leqslant 1$，$\lambda F(\lambda,x,E)\leqslant 1$；

(7.4.19)　对于固定的 λ 和 A

$B(\lambda,\cdot,A)$，$F(\lambda,\cdot,A)\in {}_r\mathscr{E}_+$；

$B(\lambda,\cdot,A)\in \mathscr{U}_\lambda(1/\lambda)$

(7.4.20)　q 条件：$\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda^2\int_H X(\lambda,x,dy)F(\lambda,y,A)=0$，

$$x\in E,\ A\in \mathscr{E}\cap E_n,\ n\geqslant 1.$$

如过程 $P(\lambda,x,\cdot)$在点 $x\in E$ 处满足向后方程，则 $F(\lambda,x,\cdot)\equiv 0$；如过程满足向前方程，则对于固定的 x，$B(\lambda,x,\cdot)$，$F(\lambda,x,\cdot)\in\mathscr{V}_\lambda$．最后，过程不断的充要条件是：

(7.4.21)　$\lambda F(\lambda,x,E)=1$，$\lambda>0$，$x\in H$

和

(7.4.22)　$\lambda B(\lambda,x,E)=\overline{X}_\lambda(x)$，$\lambda>0$，$x\in E$

同时成立．

证　由向后不等式及 $P^{\min}(\lambda,x,\cdot)$ 满足 (B_λ) 知

$$\int[(\lambda+q(x))\delta(x,dy)-q(x,dy)](P(\lambda,y,A)-P^{\min}(\lambda,y,A))$$

$\geqslant 0$，$\lambda>0$，$x\in E$，$A\in\mathscr{E}$．

而且，若 $d(x)=0$，则由定理 (7.4.14) 知，上式的等号必定成立．这样，我们可命

$$(7.4.23)\qquad F(\lambda,x,A)=\begin{cases}\text{上式左方}/d(x)，& \text{如 } x\in H,\\ 0 ，& \text{如 } x\notin H.\end{cases}$$

显然有

$F(\lambda,x,\cdot)\in\mathscr{L}_*$，$F(\lambda,\cdot,A)\in {}_r\mathscr{E}_+$

且若 $P(\lambda,x,\cdot)$ 满足向后方程，则 $F(\lambda,x,\cdot)\equiv 0$．进而，由引理 (2.5.8)，(i)（使用 $g_n=g\wedge n$ 代替那里的 g，而后令 $n\to\infty$，可见该结论对于 $g\in\mathscr{E}_+$ 亦真）得

$$P(\lambda,x,A)-P^{\min}(\lambda,x,A)\geqslant\int_H P^{\min}(\lambda,x,dy)d(y)F(\lambda,y,A),$$

$$\lambda>0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E}.$$

可见，我们能够定义

$$B(\lambda,x,A)=P(\lambda,x,A)-P^{\min}(\lambda,x,A)$$
$$-\int_H P^{\min}(\lambda,x,dy)\,d(y)F(\lambda,y,A)\geqslant 0$$
$$\lambda>0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E}$$

显然有

$$B(\lambda,x,\cdot)\in\mathscr{L}_*,\ B(\lambda,\cdot,A)\in{}_r\mathscr{E}_*,$$
$$\lambda B(\lambda,x,E)\leqslant\lambda P(\lambda,x,E)\leqslant 1.$$

把 q 过程 $P(\lambda,x,\cdot)$ 写成算子形式：

$$P(\lambda)=P^{\min}(\lambda)+X(\lambda)F(\lambda)+B(\lambda),$$

两边左乘 $(\lambda I-\Omega)$，便得

$$(\lambda I-\Omega)P(\lambda)=(\lambda I-\Omega)P^{\min}(\lambda)+(\lambda I-\Omega)X(\lambda)F(\lambda)$$
$$=I+(\lambda I-\Omega)X(\lambda)F(\lambda)$$

注意由方程 (B_λ) 得

$$(\lambda I-\Omega)X(\lambda)F(\lambda)1(x)$$
$$=(\lambda I-\Omega)\int_H X(\lambda,\cdot,dy)F(\lambda,y,E)(x)$$
$$=(\lambda I-\Omega)\int_H\int P^{\min}(\lambda,\cdot,dy)\,d(y)F(\lambda,y,E)(x)$$
$$=d(x)F(\lambda,x,E),\ x\in H.$$

可见

$$(7.4.24)\qquad (\lambda I-\Omega)P(\lambda)1(x)=1+d(x)F(\lambda,x,E),$$
$$\lambda>0,\ x\in H.$$

另一方面，由 (4.3.19) 得

$$(\lambda I-\Omega)P(\lambda)1(x)\leqslant 1+d(x)/\lambda,\ \lambda>0,\ x\in E.$$

可见

$$\lambda F(\lambda,x,E)\leqslant 1,\ \lambda>0,\ x\in H.$$

如果 $P(\lambda)$ 满足 (F_λ)，则

$$\int B(\lambda,x,dy)[(\lambda+q(y))\delta(y,A)-q(y,A)]$$

$$+\int_H X(\lambda,x,dy)\int F(\lambda,y,dz)[(\lambda+q(z))\delta(z,A)-q(z,A)]$$

$$=0,$$

$$\lambda>0\ \ x\in E,\ \ A\in\mathscr{E}\cap E_n,\ \ n\geqslant 1.$$

左乘 $(\lambda I-\Omega)$ ，便得

$$d(x)\int F(\lambda,x,dy)[(\lambda+q(y))\delta(y,A)-q(y,A)]=0$$

$$\lambda>0,\ x\in H,\ A\in\mathscr{E}\cap E_n,\ n\geqslant 1.$$

进而也有

$$\int B(\lambda,x,dy)[(\lambda+q(y))\delta(y,A)-q(y,A)]=0,$$

$$\lambda>0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E}\cap E_n,\ n\geqslant 1.$$

这表明对于固定 的 $\lambda>0$， $B(\lambda,x,\cdot)\in\mathscr{V}_\lambda$， $x\in E$； $F(\lambda,x,\cdot)\in\mathscr{V}_\lambda$， $x\in H$.

往证最后一项断言. 充分性是明显的. 往证必要性. 设 $P(\lambda)$ 不断，则 $\lambda P(\lambda)1=1$. 于是由 (7.4.24) 立得

$$\lambda+\lambda d(x)F(\lambda,x,E)=(\lambda I-\Omega)\lambda P(\lambda)1(x)$$

$$=(\lambda I-\Omega)1(x)=\lambda+d(x),\ \lambda>0,\ x\in H.$$

从而

$$\lambda F(\lambda,x,E)=1,\qquad \lambda>0,\ x\in E,$$

以此代入 $P(\lambda)$的表达式，得到

$$1=\lambda P(\lambda)1=\lambda P^{\min}(\lambda)1+\lambda B(\lambda,\cdot,E)$$

$$+\int_H X(\lambda,\cdot,dy)\lambda F(\lambda,y,E)$$

$$=1-z(\lambda,\cdot)+\lambda B(\lambda,\cdot,E)+\int P^{\min}(\lambda,\cdot,dy)d(y)$$

$$=1+\lambda B(\lambda,\cdot,E)-z(\lambda,\cdot)+\widetilde{X}_\lambda$$

从而由定理 (7.4.1) 知

$$\lambda B(\lambda,\cdot,E)=z(\lambda,\cdot)-\widetilde{X}_\lambda=\overline{X}_\lambda.$$

剩下的是 q 条件．由定理（2.4.6），$\boldsymbol{P}(\lambda)$ 是一个 q 过程当且仅当

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^2\left(\int_H X(\lambda,x,dy)F(\lambda,y,A)+B(\lambda,x,A)\right)=0$$

$$x\in E,\ A\in\mathscr{E}\cap E_n,\ n\geqslant 1.$$

但我们已证 $B(\lambda,\cdot,E)\in\mathscr{U}_\lambda(1/\lambda)$，从而由定理（7.4.1）知

$$0\leqslant\lambda B(\lambda,\cdot,E)\leqslant\overline{X}_\lambda\quad,\ \lambda>0,$$

由此及推论（7.4.12）得

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^2B(\lambda,\cdot,E)\leqslant\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\overline{X}_\lambda=0.$$

故 q 条件成为（7.4.20）． ▌

本节的最后一个结果，是就一种特殊情形进一步刻画上述定理中的 $B(\lambda,x,\cdot)$，它同时也是定理（2.6.4）的改进．

（7.4.25）**定理** 设 $\dim\mathscr{U}_\lambda>0$，$\{\overline{\xi_\lambda}\in\mathscr{U}_\lambda:\ \lambda>0\}$是一协调族，它有标准映像$\overline{\xi}$．为使

$$P(\lambda,x,A)=P^{\min}(\lambda,x,A)+\overline{\xi_\lambda}(x)F_\lambda(A)\tag{7.4.26}$$

$$\lambda>0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E}$$

是一个满足 $\lambda F_\lambda(E)\leqslant 1$ 的 q 过程的充要条件是：

或者 $F_\lambda\equiv 0$，或者 F_λ 可用如下方式得到：任取 $\omega\in\overline{\mathscr{L}_*}$，使

$$\int\omega(dx)\mathrm{P}^{\min}(\lambda,x,\cdot)\in\mathscr{L}_*,\tag{7.4.27}$$

$$\int\omega(dx)(\overline{X}(x)-\xi\overline{(x)})<\infty,$$

取测度协调族 $\{\overline{\eta_\lambda}\in\mathscr{V}_\lambda:\ \lambda>0\}$ 使

$$\eta_\lambda\equiv\omega\mathrm{P}^{\min}(\lambda)+\overline{\eta_\lambda}\neq 0,\tag{7.4.28}$$

$$W_\lambda\equiv\lambda\overline{\eta_\lambda}(\overline{X}-\overline{\xi})\uparrow W<\infty,\ \lambda\uparrow\infty,$$

$$V_\lambda\equiv\lambda\overline{\eta_\lambda}\widetilde{X}\uparrow V<\infty,\ \lambda\uparrow\infty,$$

这里，测度 ω 作用于 $\mathrm{P}^{\min}(\lambda)$ 仍然是测度，其意义如(7.4.27)；而测度$\overline{\eta_\lambda}$ 作用于函数 $\overline{X}-\overline{\xi}$是普通的积分．以下类同．再记

$$\overline{\sigma^0}=\lambda\overline{\eta_\lambda}X^0<\infty,\ \text{与}\ \lambda\ \text{无关}.\tag{7.4.29}$$

最后，取常数 c 使

$$(7.4.30)\qquad \overline{\sigma^0}+\omega(X^0+\widetilde{X}+\overline{X}-\overline{\xi})+W+V\leqslant c$$

那么

$$(7.4.31)\qquad F_\lambda=\eta_\lambda/[c+\omega(\overline{\xi}-\overline{\xi_\lambda})+\lambda\overline{\eta_\lambda}\overline{\xi}].$$

由 (7.4.26) 所定义的 q 过程必定满足 (B_λ)，它满足 (F_λ) 的充要条件是 $\omega=0$，不断的充要条件是

$$(7.4.32)\qquad q\text{ 对保守且 }c=\overline{\sigma^0}+\omega X^0,\ \overline{\xi_\lambda}=\overline{X}_\lambda.$$

如 $\dim\mathscr{U}=1$，则 $\overline{\xi_\lambda}=\overline{X_\lambda}$，而且我们已构造出全部满足 (B_λ) 的 q 过程。如 $\dim\mathscr{U}=1$ 且 q 对保守，则已构造出全部 q 过程。

证 用 $\overline{\xi_\lambda}$ 代替 $z(\lambda,\cdot)$，注意条件 $\lambda F_\lambda(E)\leqslant 1$ 并可用协调性代替 (2.4.3)，定理 (2.6.4) 的证明是适用的。特别地，我们得到：存在 $c_1\geqslant 0$ 使

$$m_\lambda^{-1}-\lambda\eta_\lambda(E)=c_1\quad\text{与 }\lambda\text{ 无关.}$$

另一方面，由 (2.6.3) 的前两式，我们看到

$$m_\mu^{-1}=m_\lambda^{-1}+(\mu-\lambda)\eta_\lambda\overline{\xi_\mu},$$

但由引理 (7.4.13) 证明的第一步，

$$(\mu-\lambda)\eta_\lambda\overline{\xi_\mu}=\mu\eta_\mu\overline{\xi}-\lambda\eta_\lambda\overline{\xi}.$$

可见也有

$$m_\lambda^{-1}-\lambda\eta_\lambda\overline{\xi}\equiv c\text{ 与 }\lambda\text{ 无关.}$$

这样

$$\begin{aligned}
c-c_1&=\lambda\eta_\lambda(1-\overline{\xi})\\
&=\lambda\omega P^{\min}(\lambda)(1-\overline{\xi})+\lambda\overline{\eta_\lambda}(1-\overline{\xi})\\
&=\lambda\omega P^{\min}(\lambda)(\overline{X}-\overline{\xi}+X^0+\widetilde{X})+\lambda\overline{\eta_\lambda}(\overline{X}-\overline{\xi}+X^0+\widetilde{X})\\
&=\omega X^0+\omega(\widetilde{X}-\widetilde{X}_\lambda)+\omega(\overline{X}-\overline{\xi}-\overline{X}_\lambda+\overline{\xi_\lambda})+\overline{\sigma^0}+W_\lambda+V_\lambda\\
&\uparrow\omega(X^0+\widetilde{X}+\overline{X}-\overline{\xi})+\overline{\sigma^0}+W+V
\end{aligned}$$

由于 c_1 可取 0，故 (7.4.30) 必须成立。而由

$$\begin{aligned}
m_\lambda^{-1}&=c+\lambda\eta_\lambda\overline{\xi}=c+\lambda\omega P^{\min}(\lambda)\overline{\xi}+\lambda\overline{\eta_\lambda}\overline{\xi}\\
&=c+\omega(\overline{\xi}-\overline{\xi_\lambda})+\lambda\overline{\eta_\lambda}\overline{\xi}
\end{aligned}$$

得到 (7.4.31) .

为使过程不断，充要条件是

$$\lambda \overline{\xi_\lambda} F_\lambda(E) = \overline{X}_\lambda + \widetilde{X}_\lambda$$

由于 $\widetilde{X}_\lambda = P^{\min}(\lambda)d = \sum_{n=1}^{\infty}\pi(\lambda)^n d \leqslant z(\lambda,\cdot) \leqslant 1$

以及$\overline{\xi_\lambda}$，$\overline{X}_\lambda \in \mathscr{U}_\lambda(1)$，故在前一式中两边左乘 $\pi^n(\lambda)$，并命 $n\to\infty$，便知不断性等价于

$$\lambda \overline{\xi_\lambda} F_\lambda(E) = \overline{X_\lambda}.$$

故为使过程不断，必须 q 对保守，$\overline{\xi_\lambda} = \overline{X}_\lambda$ 且 $\lambda F_\lambda(E) = 1$. 在前两个条件下，后者等价于 $c = \overline{\sigma^0} + \omega X^0$.

定理的其它断言是明显的. ▌

(7.4.33) 注 在上述定理中，我们也可以对偶地取定测度协调族 $\{F_\lambda\}$，然后讨论施加于$\{\overline{\xi_\lambda}\}$的条件.

§7.5 不断的可逆 q 过程的存在性

本节固定 q 对 $q(x) - q(x,\cdot)$ 及其配称测度 μ，来研究不断的可逆 q 过程的存在性，我们将取定关于 μ 的一个可测划分 $\{G_n\}_1^\infty \subset \mathscr{E}$:

$$G_n \uparrow E, \quad \mu(G_n) < \infty, \quad n \geqslant 1.$$

固定 $\lambda > 0$，设 $f_\lambda \in \mathscr{U}_\lambda$. 令

(7.5.1) $$\mu f_\lambda \equiv \int \mu(dx) f_\lambda(x).$$

(7.5.2) 引理 若 $\mu f_\lambda < \infty$，则

(7.5.3) $$\eta_\lambda \equiv \int_{\cdot} \mu(dx) f_\lambda(x) \in \mathscr{V}_\lambda,$$

如对一切 $\lambda > 0$，$\mu f_\lambda < \infty$ 且$\{f_\lambda:\ \lambda > 0\}$还是协调族，则上式所定义的$\{\eta_\lambda : \lambda > 0\}$也是协调的.

证 设 $A \in \mathscr{E} \cap E_n$，$n \geqslant 1$，则

$$\int \eta_\lambda(dx)(\lambda I-\Omega)I_A(x)$$

$$=\int_A \mu(dx)f_\lambda(x)(\lambda+q(x))-\int \mu(dx)f_\lambda(x)qI_A(x)$$

$$=\int_A \mu(dx)f_\lambda(x)(\lambda+q(x))-\int_A \mu(dx)qf_\lambda(x)$$

$$=\int_A \mu(dx)(\lambda I-\Omega)f_\lambda(x)=0.$$

这便证得前一项断言，另一方面

$$\int \eta_\lambda(dx)R(\lambda,\mu;x,A)$$

$$=\int_A \mu(dx)\int R(\lambda,\mu;x,dy)f_\mu(y)$$

$$=\int_A \mu(dx)f_\mu(x)=\eta_\mu(A),\quad A\in\mathscr{E},\ \lambda,\ \mu>0. \qquad \blacksquare$$

(7.5.4) **引理** 设 $q(x)-q(x,\cdot)$ 关于 μ 可配称，则

(7.5.5) $$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\int \mu(dx)z(\lambda,x)$$

$$=\int \mu(dx)d(x)+\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\int \mu(dx)\overline{X}_\lambda(x).$$

证 如右方之一为无穷，则由 Fatou 引理立知左方亦然。反之，右方极限的存在性是因 (3.1.9)。另一方面，由定理 (7.4.1) 得

$$\lambda\int \mu(dx)z(\lambda,x)=\lambda\int \mu(dx)\widetilde{X}_\lambda(x)+\lambda\int \mu(dx)\widetilde{X}_\lambda(x),$$

因而，只需证

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\int \mu(dx)\widetilde{X}_\lambda(x)=\int \mu(dx)d(x).$$

然而

$$\lambda\int \mu(dx)\widetilde{X}_\lambda(x)=\lambda\int \mu(dx)\int P^{\min}(\lambda,x,dy)d(y)$$

$$=\int \mu(dx)d(x)\lambda P^{\min}(\lambda,x,E)$$

$$= \int \mu(dx) d(x) (1 - z(\lambda, x)) .$$

故由 $z(\lambda, \cdot)$ 的协调性，引理 (7.4.11) 和单调收敛定理立得所述断言。 ▮

(7.5.6) **引理** 设 (7.4.20) 成立。则必有

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda F(\lambda, x, A) = 0, \quad x \in H, \quad A \in \mathscr{E} \cap E_n, \quad n \geq 1.$$

证

$$0 = \lim_{\lambda \to \infty} \lambda^2 \int_H X(\lambda, x, dy) F(\lambda, y, A)$$
$$\geq \lim_{\lambda \to \infty} \lambda^2 X(\lambda, x, \{x\}) F(\lambda, x, A)$$
$$= \lim_{\lambda \to \infty} \lambda^2 P^{\min}(\lambda, x, \{x\}) d(x) F(\lambda, x, A)$$
$$= d(x) \lim_{\lambda \to \infty} \lambda F(\lambda, x, A), \quad x \in H. \qquad ▮$$

(7.5.7) **定理** 设 $q(x) - q(x, \cdot)$ 关于 μ 可配称，则存在关于 μ 可配称的不断的 q 过程的必要条件是

(i) $\int \mu(dx) d(x) = \infty$;

(ii) $\lim_{\lambda \to \infty} \lambda \int \mu(dx) \overline{X}_\lambda(x) = \infty$;

(iii) $\int \mu(dx) d(x) \leq \lim_{\lambda \to \infty} \lambda \int \mu(dx) \overline{X}_\lambda(x) < \infty$

之一成立。

证 我们只需证明，若 $\int \mu(dx) d(x) < \infty$，则

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda \int \mu(dx) \overline{X}_\lambda(x) \geq \int \mu(dx) d(x).$$

事实上，由定理 (7.4.16) 知，若可配称 q 过程存在，则必有

$$\int_A \mu(dx) \int_H X(\lambda, x, dy) F(\lambda, y, B) + \int_A \mu(dx) B(\lambda, x, B)$$
$$= \int_B \mu(dx) \int_H X(\lambda, x, dy) F(\lambda, y, A) + \int_B \mu(dx) B(\lambda, x, A)$$
$$\lambda > 0, \quad A, B \in \mathscr{E}.$$

特别地

$$\int_A \mu(dx)\int_H X(\lambda,x,dy)\lambda F(\lambda,y,E)+\int_A \mu(dx)\lambda B(\lambda,x,E)$$

$$=\int \mu(dx)\int_H \lambda X(\lambda,x,dy)F(\lambda,y,A)+\int \mu(dx)\lambda B(\lambda,x,A)$$

$$\lambda>0,\ A\in\mathscr{E}.$$

于是由不断性和可配称性得

$$\int \mu(dx)d(x)P^{\min}(\lambda,x,A)+\int_A \mu(dx)\overline{X}_\lambda(x)$$

$$=\int \mu(dx)d(x)(1-z(\lambda,x))F(\lambda,x,A)+\lambda\int \mu(dx)B(\lambda,x,A).$$

由于

$$\int \mu(dx)d(x)\lambda P^{\min}(\lambda,x,A)\leqslant\int \mu(dx)d(x)<\infty,$$

$$\int \mu(dx)d(x)(1-z(\lambda,x))\lambda F(\lambda,x,A)\leqslant\int \mu(dx)d(x)<\infty,$$

从而

$$\lambda\int \mu(dx)d(x)P^{\min}(\lambda,x,A)\to\int_A \mu(dx)d(x),\ \lambda\to\infty$$

再用引理（7.5.6），

$$\lambda\int \mu(dx)d(x)(1-z(\lambda,x))F(\lambda,x,A)\longrightarrow 0,\ \lambda\to\infty,$$

$$A\in\mathscr{E}\cap E_n,\ n\geqslant 1.$$

但由（7.4.12），

$$\lambda\int_A \mu(dx)\overline{X}_\lambda(x)\longrightarrow 0,\ \lambda\to\infty,$$

$$A\in\mathscr{E}\cap G_m,\ m\geqslant 1.$$

这表明

$$\int_A \mu(dx)d(x)\leqslant\varliminf_{\lambda\to\infty}\lambda^2\int \mu(dx)B(\lambda,x,A)$$

$$\leqslant\varliminf_{\lambda\to\infty}\lambda\int \mu(dx)\overline{X}_\lambda(x),$$

$$A \in \mathscr{E} \cap E_n \cap G_m, \quad n,m \geqslant 1$$

故

$$\int \mu(dx) d(x) \leqslant \lim_{\lambda \to \infty} \lambda \int \mu(dx) \overline{X}_\lambda(x). \qquad \rule{0.5em}{1em}$$

我们将证明，如 μ 是有限测度（等价地，概率测度），则上述定理之逆也是正确的。为此，需要作若干准备。

(7.5.8) 引理 如 $q(x)-q(x,\cdot)$ 关于 μ 可配称，若 $\int \mu(dx) X^0(x) < \infty$，则

$$(7.5.9) \qquad \int \mu(dx) X^0(x)(1-X^0(x)) = 0.$$

证 由 (7.4.10) 得

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{G_n} \mu(dx)[X^0(x) - \lambda \int P^{\min}(\lambda, x, dy) X^0(y)] \\ &= \int_{G_n} \mu(dx) X^0(x) - \int \mu(dx) X^0(x) \lambda P^{\min}(\lambda, x, G_n) \\ &\geqslant \int_{G_n} \mu(dx) X^0(x) z(\lambda, x) \\ &\quad - \int_{G_n^c} \mu(dx) X^0(x) \lambda P^{\min}(\lambda, x, E), \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} &\int_{G_n^c} \mu(dx) X^0(x)(1-z(\lambda, x)) \\ &\geqslant \int_{G_n} \mu(dx) X^0(x) z(\lambda, x). \end{aligned}$$

注意当 $\lambda \downarrow 0$ 时，$z(\lambda,\cdot) \uparrow (1-X^0)$。在上式中先令 $\lambda \downarrow 0$，再令 $n \to \infty$，便知

$$\int \mu(dx) X^0(x)(1-X^0(x)) = 0. \qquad \rule{0.5em}{1em}$$

(7.5.10) 引理 设 $q(x)-q(x,\cdot)$ 关于 μ 可逆，定义

$$\overline{\eta_\lambda}(A) = \int_A \mu(dx) \overline{X}_\lambda(x),$$

$$\widetilde{\eta}_\lambda(A)=\int_A \mu(dx)\widetilde{X}_\lambda(x), \qquad \lambda>0,\ A\in\mathscr{E}$$

若$\overline{X}_\lambda\neq 0$，$\widetilde{X}_\lambda\neq 0$，则$\overline{X}_\lambda$和$\widetilde{X}_\lambda$，从而$\overline{\eta}_\lambda$和$\widetilde{\eta}_\lambda$线性无关．$\overline{\eta}_\lambda$和$\widetilde{\eta}_\lambda$的标准映像分别是

$$\overline{\eta}(A)=\int_A \mu(dx)\overline{X}(x), \qquad A\in\mathscr{E},$$

$$\widetilde{\eta}(A)=\int_A \mu(dx)\widetilde{X}(x), \qquad A\in\mathscr{E},$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\widetilde{\eta}_\lambda(A)=\int_A \mu(dx)d(x), \qquad A\in\mathscr{E}\cap E_n,\ n\geqslant 1$$

证 $\overline{\eta}_\lambda$和$\widetilde{\eta}_\lambda$的协调性见引理（7.5.2）（由于$\overline{X}$和$\widetilde{X}_\lambda$是协调的）．若对某$\lambda_0>0$，

$$c_1\overline{X}_{\lambda_0}+c_2\widetilde{X}_{\lambda_0}=0$$

则由$\overline{X}_{\lambda_0}\in\mathscr{U}_{\lambda_0}$知

$$c_2(\lambda_0 I-\Omega)\widetilde{X}_{\lambda_0}=0$$

但由$\widetilde{X}_{\lambda_0}\neq 0$知$d(\cdot)\neq 0$．于是

$$(\lambda_0 I-\Omega)\widetilde{X}_{\lambda_0}=d(\cdot)\neq 0$$

导致$c_2=0$，再由$\overline{X}_{\lambda_0}\neq 0$知$c_1=0$．由于$\overline{X}_\lambda$和$\overline{X}_\lambda$是否为0与$\lambda>0$无关．这便证明线性无关性．利用引理（7.4.4）和（7.4.11）立得后三个等式． ■

（7.5.11）引理 设$\overline{\eta}_\lambda$和$\widetilde{\eta}_\lambda$如（7.5.10）．再命

$$W_\lambda^{11}=\lambda\int\overline{\eta}_\lambda(dx)\overline{X}(x),$$

$$W_\lambda^{12}=\lambda\int\overline{\eta}_\lambda(dx)\widetilde{X}(x),$$

$$W_\lambda^{21}=\lambda\int\widetilde{\eta}_\lambda(dx)\overline{X}(x),$$

$$W_\lambda^{22}=\lambda\int\widetilde{\eta}_\lambda(dx)\widetilde{X}(x),$$

则

(i) $W_\lambda^{ab}\uparrow W^{ab}$，$\lambda\uparrow\infty$，$a$，$b=1, 2$，

而且

$$W_\lambda^{11}-W_\mu^{11}=(\lambda-\mu)\int\overline{\eta_\mu}(dx)\overline{X}_\lambda(x),$$

$$W_\lambda^{12}-W_\mu^{12}=(\lambda-\mu)\int\overline{\eta_\mu}(dx)\widetilde{X}_\lambda(x),$$

$$W_\lambda^{21}-W_\mu^{21}=(\lambda-\mu)\int\widetilde{\eta_\mu}(dx)\overline{X}_\lambda(x),$$

$$W_\lambda^{22}-W_\mu^{22}=(\lambda-\mu)\int\widetilde{\eta_\mu}(dx)\widetilde{X}_\lambda(x)\quad,\ \lambda,\ \mu>0.$$

(ii) $W_\lambda^{12}=W_\lambda^{21}(\lambda>0)$ ，从而 $W^{12}=W^{21}$.

证 由引理（7.5.10）和（7.4.13）及其证明立得（i）.而且，再用一次上述两引理，

$$\lambda\int\overline{\eta_\lambda}(dx)\widetilde{X}(x)$$

$$=\lambda\int\overline{\eta}(dx)\widetilde{X}(x)-\lambda^2\int\overline{\eta}(dx)\int P^{\min}(\lambda,x,dy)\widetilde{X}(y)$$

$$=\lambda\int\widetilde{\eta}(dx)\overline{X}(x)-\lambda^2\int\widetilde{\eta}(dx)\int P^{\min}(\lambda,x,dy)\overline{X}(y)$$

$$=\lambda\int\widetilde{\eta_\lambda}(dx)\overline{X}(x).$$

从而

$$W_\lambda^{12}=W_\lambda^{21}\quad,\ \lambda>0.$$ ∎

简记

$$R_\lambda=\begin{pmatrix}R_\lambda^{11} & R_\lambda^{12}\\ R_\lambda^{21} & R_\lambda^{22}\end{pmatrix},\qquad W_\lambda=\begin{pmatrix}W_\lambda^{11} & W_\lambda^{12}\\ W_\lambda^{21} & W_\lambda^{22}\end{pmatrix}.$$

（7.5.12）**引理** 设 $q(x)-q(x,\cdot)$ 关于 μ 可逆，那么，为使

$$P(\lambda)=P^{\min}(\lambda)+(\overline{X_\lambda},\ \widetilde{X_\lambda})R_\lambda\begin{pmatrix}\overline{\eta_\lambda}\\ \widetilde{\eta_\lambda}\end{pmatrix}$$

为可逆 q 过程，充分条件是 2×2 矩阵 R_λ 满足：

(i) R_λ 非负对称；

(ii) $R_\lambda W_\lambda 1 \leqslant 1$, $\lambda > 0$;

(iii) $R_\lambda - R_\mu = R_\lambda (W_\mu - W_\lambda) R_\mu$, λ, $\mu > 0$;

(iv) $R_\lambda \uparrow R \equiv \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ r_2 & 0 \end{pmatrix}$ ，当 $\lambda \uparrow \infty$

过程不断的充要条件是 (ii) 中的等号成立。

证 显然，由条件 (i) 立知 $P(\lambda) \geqslant 0$。简记

$$\begin{pmatrix} F_\lambda^1 \\ F_\lambda^2 \end{pmatrix} = R_\lambda \begin{pmatrix} \overline{\eta_\lambda} \\ \widetilde{\eta_\lambda} \end{pmatrix},$$

从而

$$\lambda F_\lambda^i(E) = \lambda R_\lambda^{i1} \overline{\eta_\lambda}(E) + \lambda R_\lambda^{i2} \widetilde{\eta_\lambda}(E), \quad i = 1, 2.$$

另一方面，由 (7.4.5) 得

$$\begin{aligned} \lambda F_\lambda^i(E) &= \lambda R^{i1} \int \overline{\eta_\lambda}(dx) (X^0(x) + \overline{X}(x) + \widetilde{X}(x)) \\ &\quad + \lambda R^{i2} \int \widetilde{\eta_\lambda}(dx) (X^0(x) + \overline{X}(x) + \widetilde{X}(x)) \\ &= R_\lambda^{i1} (W_\lambda^{11} + W_\lambda^{12}) + R_\lambda^{i2} (W_\lambda^{21} + W_\lambda^{22}), \\ &\qquad i = 1, 2. \end{aligned}$$

这里用到引理 (7.5.8) ：

$$\begin{aligned} (7.5.13) \qquad \int \overline{\eta_\lambda}(dx) X^0(x) &= \int \mu(dx) X^0(x) \overline{X}_\lambda(x) \\ &\leqslant \int \mu(dx) X^0(x) z(\lambda, x) \\ &\leqslant \int \mu(dx) X^0(x) (1 - X^0(x)) = 0, \quad \lambda > 0; \end{aligned}$$

以及

$$\int \widetilde{\eta_\lambda}(dx) X^0(x) = 0, \quad \lambda > 0.$$

这样，范条件 $\lambda P(\lambda) 1 \leqslant 1$ 等价于

$$\lambda F_\lambda^i(E) \leqslant 1$$

而这又等价于条件 (ii) 且过程不断的充要条件是 (ii) 中的等号成立。

利用$\overline{X}_\lambda$，$\widetilde{X}_\lambda$和$\overline{\eta}_\lambda$，$\widetilde{\eta}_\lambda$的协调性，初等的计算可由条件 (iii) 导出预解条件*，然后由 (iii) 立得 (iv)。

最后，由于$\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda\overline{X}_\lambda=0$, $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda\widetilde{X}_\lambda=d(\cdot)$. 因而

$$\begin{aligned}
&\lim_{\lambda\to\infty}\lambda[\delta(x,A)-\lambda P(\lambda,x,A)]\\
&=\lim_{\lambda\to\infty}\lambda[\delta(x,A)-\lambda P^{\min}(\lambda,x,A)]\\
&\qquad-(0,d(\cdot))\begin{pmatrix}r_1 & r_2\\ r_2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \int_A\mu(dx)d(x)\end{pmatrix}\\
&=\lim_{\lambda\to\infty}\lambda[\delta(x,A)-\lambda P^{\min}(\lambda,x,A)],\\
&\qquad\qquad A\in\mathscr{E}\cap E_n,\ n\geqslant 1
\end{aligned}$$

可见q条件也满足。 ▌

(7.5.14) **引理** 记号和假设同 (7.5.12)。补设

$$0<\int\mu(dx)d(x)\leqslant\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\int\mu(dx)\overline{X}_\lambda(x)<\infty$$

则我们可选到R_λ，使得$P(\lambda)$是一个不中断的可逆q过程。

证 如果$\int\mu(dx)d(x)<0$，则$H\neq\varnothing$，从而$\widetilde{X}_\lambda\neq 0$。由假设，我们还有

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\int\mu(dx)\overline{X}_\lambda(x)\geqslant\int\mu(dx)d(x)>0$$

从而也有$\overline{X}_\lambda\neq 0$。今取

$$h_1=\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\int\mu(dx)\overline{X}_\lambda(x),$$

$$h_2=\int\mu(dx)d(x),$$

$$r_1=(h_1-h_2)/h_1^2,\quad r_2=1/h_1,$$

*) 参考定理 (9.4.1) 证明的最后一步。

则显然有 $r_1\geqslant 0$，$r_2>0$，再取

$$R_\lambda^{11}=[r_1+r_2^2(W^{22}-W_\lambda^{22})]/\Delta,$$

$$R_\lambda^{12}=R_\lambda^{21}=r_2[1-r_2(W^{12}-W_\lambda^{12})]/\Delta,$$

$$R_\lambda^{22}=r_2^2(W^{11}-W_\lambda^{11})/\Delta.$$

其中

$$\Delta=[1-r_2(W^{12}-W_\lambda^{12})]^2+r_2^2(W^{11}-W_\lambda^{11})(W^{22}-W_\lambda^{22})$$
$$-r_1(W^{11}-W_\lambda^{11}).$$

而 W_λ^{ab} 和 $W^{ab}(a,b=1,2)$ 如引理（7.5.11）定义．容易验证 $W^{ab}(a,b=1,2)$ 是有限的，从而 W_λ^{ab} 亦然．R_λ 的计算来自于 (iii)，令 $\mu\uparrow\infty$ 便得

$$R_\lambda=(I-(W-W_\lambda))^{-1}R.$$

利用此式容易验证我们所构造的 R_λ 满足引理（7.5.12）的全部条件．而且是不断的． ▌

（7.5.15）**定理** 设 $q(x)-q(x,\cdot)$ 关于 μ 可逆．那么，存在 μ 几乎不断的关于 μ 可逆的 q 过程的充要条件是定理（7.5.7）的条件 (i) — (iii) 之一成立．

证 必要性见定理（7.5.7）．以下分几种情况讨论．

(a) $q(x)-q(x,\cdot)$ 保守．

由定理（7.4.25）知

$$P(\lambda)=P^{\min}(\lambda)+\overline{X}_\lambda\,\overline{\eta}_\lambda/(\lambda\,\overline{\eta}_\lambda(E))$$

是一个 q 过程，它显然是可逆的．如 $\int\mu(dx)\,\overline{X}_\lambda(x)>0$，即 $\overline{\eta}_\lambda(E)>0$，则它已是不断的．否则，

$$\mu[x\in E;\ \lambda P^{\min}(\lambda,x,E)<1]$$
$$\leqslant\mu[x\in E;\ \overline{X}_\lambda(x)\neq 0]=0.$$

因而 $P^{\min}(\lambda)$ 就是一个 μ 几乎不断的 q 过程．

(b) $\dim\mathscr{U}\overset{\mu}{=}0$，$H\overset{\mu}{=}\phi$．即 μ 几乎保守且 μ 几乎零流出．

此时也有

$$\mu[x\in E:\ \lambda P^{\min}(\lambda,x,E)<1]$$
$$=\mu[x\in E:\ z(\lambda,x)\neq 0]$$
$$\leqslant\mu[x\in E:\ \overline{X}_\lambda\neq 0]+\mu[x\in E:\widetilde{X}_\lambda\neq 0]=0.$$

(c) $H\overset{\mu}{=}\varnothing$ 且 $0<\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda\int\mu(dx)\overline{X}_\lambda(x)<\infty$.

此时由 (*a*) 所构造的可逆 q 过程满足

$$\mu[x\in E:\ \lambda P(\lambda,x,E)<1]$$
$$\leqslant\mu[x\in E:\ d(x)\neq 0]+\mu[x\in E:\ d(x)=0,\lambda P(\lambda,x,E)<1]$$
$$=\mu[x\in E:\ z(\lambda,x)-\overline{X}_\lambda(x)\neq 0,\ d(x)=0]$$
$$=\mu[x\in E:\ \widetilde{X}_\lambda(x)\neq 0,\ d(x)=0]=0.$$

(d) $0<\int\mu(dx)d(x)\leqslant\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda\int\mu(dx)\ \overline{X}_\lambda(x)<\infty$.

此时，引理 (7.5.14) 已构造出不断的可逆 q 过程。

(e) $\int\mu(dx)d(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{\lambda\to 8}\lambda\int\mu(dx)\ \overline{X}_\lambda(x)=\infty$.

由引理 (7.5.4) 知

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\int\mu(\mathrm{d}x)z(\lambda,x)=\infty.$$

因而由定理 (3.1.13) 及其证明 (*b*) 知

$$P(\lambda)=P^{\min}(\lambda)+z(\lambda,\cdot)\eta_\lambda/(\lambda\eta_\lambda(E))$$

是一个不断的 q 过程。此处

$$\eta_\lambda(A)=\int\mu(dx)z(\lambda,x),\ \lambda>0,\ A\in\mathscr{E}.$$

它显然是可逆的。 ▌

§7.6 唯一性

本节研究可逆 q 过程的唯一性。我们将固定一个概率测度 μ。本节所讨论的可逆性、唯一性，都是关于这个 μ 而言的。我们也不区别两个 μ 等价的可逆 q 过程。

(7.6.1)**引理** 若 $q(x)-q(x,\cdot)$ 可逆且 $\lim \mathscr{U}_\lambda \overset{\mu}{=} 0$，则可逆的 B_q 过程唯一。若 $q(x)-q(x,\cdot)$ 可逆，$d_{im}\mathscr{U}_\lambda \overset{\mu}{\neq} 0$ 且 $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda\int\mu(dx)\,\overline{X}_\lambda(x)<\infty$，则有无穷多个可逆的 B_q 过程。

证 先设 $q(x)-q(x,\cdot)$ 可逆而可逆 B_q 过程非唯一。则由定理(7.4.16)知，此时必定有形如

$$P(\lambda)=P^{\min}(\lambda)+B(\lambda)$$

的可逆 q 过程，且 $B(\lambda)\neq 0$。由(7.4.19)知存在 $\lambda_0>0$，使

$$0<\int\mu(dx)\lambda_0 B(\lambda_0,x,E)$$

$$\leqslant\int\mu(dx)\,\overline{X}\lambda_0(x)\leqslant 1$$

从而 $\dim\mathscr{U}_\lambda\overset{\mu}{\neq}0$。

反之，设 q 对可逆，$\dim\mathscr{U}_\mu\overset{\mu}{\neq}0$ 且 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\lambda\int\mu(dx)\overline{X}_\lambda(x)<\infty$。那么，由引理(7.2.6)知

$$\int\mu(dx)\overline{X}_\lambda(x)>0,\lambda>0.$$

在定理(7.4.25)中取 $\overline{\xi}_\lambda=\overline{X}_\lambda,\lambda>0$，$\omega=0$，$\overline{\eta}_\lambda(A)=\int_A\mu(dx)\,\overline{X}_\lambda(x)$，则

$$W=\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\int\mu(dx)\,\overline{X}_\lambda(x)\,(\overline{X}(x)-\overline{X}(x))=0$$

$$V=\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\int\mu(dx)\,\overline{X}_\lambda(x)\,\widetilde{X}(x)$$

$$\leqslant\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\int\mu(dx)\,\overline{X}_\lambda(x)<\infty;$$

而由(7.5.13)知

$$\overline{\sigma}^0=\lambda\int\overline{\eta_\lambda}(dx)X^0(x)=0;$$

从而可取无穷多个满足(7.4.30)的常数 c，使得(7.4.26)为 B_q 过程。这些 q 过程显然都是可逆的。而由

$$\overline{\eta_\lambda}(E)=\int\mu(dx)\overline{X}_\lambda(x)>0$$

知，我们得到无穷多个相互不等价的可逆 q 过程。 ▌

(7.6.2) **定理** 可逆 q 过程唯一的充要条件是

(i) q 对可逆；

(ii) $\int\mu(dx)d(x)<\infty$；

(iii) $\dim\mathscr{U}_\lambda\overset{\mu}{=}0$

同时成立。若 (i) 成立，但 (ii) 或 (iii) 不成立，则有无穷多个可逆 q 过程。

证 分三步完成证明。

(a) 如 q 对可逆，条件(iii)不真且

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\int\mu(dx)\ \overline{X}_\lambda(x)<\infty,$$

则由引理 (7.6.1) 知，此时存在无穷多个可逆 B_q 过程。

(b) 如 q 对可逆且而且条件 (ii) 不真或

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\int\mu(dx)\overline{X}_\lambda(x)=\infty,$$

则在定理 (7.5.15)证明的最后一步，改取

$$P(\lambda)=P^{\min}(\lambda)+z(\lambda,\ \cdot)\ \eta_\lambda/[c+\lambda\eta_\lambda(E)]$$

便得到以 $c\geqslant 0$ 为参数族的无穷多个可逆 q 过程。

这便证得条件的必要性。

(c) 设条件 (i) — (iii) 同时成立。

设 $P(\lambda)$ 是任一可逆 q 过程。由定理 (7.4.16) 知， $P(\lambda)$

必有表现

$$P(\lambda)=P^{\min}(\lambda)+B(\lambda)+X(\lambda)F(\lambda).$$

由条件（i）、（iii）和引理（7.6.1）证明的第一步知 $B(\lambda)=0$。另一方面，由引理（7.5.6）知

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda F(\lambda, x, B)=0,\ x\in E,\ B\in\mathscr{E}\cap E_n,\ n\geqslant 1.$$

于是，由可逆性和条件（ii）得

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int\mu(dx)\lambda P^{\min}(\lambda, x, E_n)d(x)\lambda F(\lambda, x, E)$$

$$=\lim_{\lambda\to\infty}\int_{E_n}\mu(dx)\int\lambda P^{\min}(\lambda,x,dy)d(y)\lambda F(\lambda,y,E)$$

$$=\lim_{\lambda\to\infty}\int\mu(dx)\lambda P^{\min}(\lambda,x,dy)d(y)\lambda F(\lambda,x,E_n)$$

$$=\lim_{\lambda\to\infty}\int\mu(dx)\ \lambda P^{\min}(\lambda, x, E)d(x)\lambda F(\lambda, x, E_n)$$

$$=0,\ n\geqslant 1.$$

从而由条件（ii）和控制收敛定理得

$$\int_{E_n}\mu(dx)\ d(x)\ \overline{\lim_{\lambda\to\infty}}\lambda F(\lambda, x, E)=0,\ n\geqslant 1$$

进而

$$\int_E\mu(dx)d(x)\ \overline{\lim_{\lambda\to\infty}}\lambda F(\lambda, x, E)=0.$$

于是存在 μ 零集 N，使

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda F(\lambda, x, E)=0,\ x\notin N.$$

注意

$$\lambda P^{\min}(\lambda, x, dy)d(y)\longrightarrow d(x)\delta(x,dy),\ \lambda\to\infty,$$

$$\lambda F(\lambda,x,A)\leqslant 1,\ \lambda>0$$

便可由定理（1.2.24）导出

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{N^c}\lambda P^{\min}(\lambda,x,dy)d(y)\lambda F(\lambda,y,A)=0,\quad A\in\mathscr{E}.$$

另一方面，由可逆性，

$$\int \mu(dx) P^{\min}(\lambda, x, N) = \int \mu(dx) P^{\min}(\lambda, x, E) = 0.$$

因此，可取零集 $\widetilde{N}$，使 $P^{\min}(\lambda, x, N) = 0$，$x \notin \widetilde{N}$。
故我们实际上有

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int \lambda P^{\min}(\lambda, x, dy) d(y) \lambda F(\lambda, y, A) = 0,$$

$$x \notin \widetilde{N}, \ A \in \mathscr{E}$$

由此立知

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda \left[P(\lambda, x, A) - I_A(x) \right] = q(x, A) = q(x) I_A(x)$$
$$x \notin \widetilde{N}, \ A \in \mathscr{E}.$$

依定理（1.2.25），对每 $x \notin \widetilde{N}$，$P(\lambda, x, \cdot)$ 满足向后方程．但由条件（i）（iii）和引理（7.6.1）知，满足向后方程的可逆 q 过程唯一．故 $P(\lambda)$ 等价于 $P^{\min}(\lambda)$．（或者，使用定理（7.4.16），$F(\lambda, \cdot, E)$ 非零的集合是 μ 零集，因而 $P(\lambda)$ 等价于 $P^{\min}(\lambda)$）．▌

§7.7 补充与注记

在以前发表的文章中，我们称这里的可配称 q 过程为有势 q 过程．对马链，我们常称这里的可逆 q 过程为可配称 q 过程．而把这里的可逆 q 过程施加上遍历条件才称为可逆 Q 过程．之所以使用有势 q 过程的术语，是因为可配称 q 过程常常伴随着某种势函数（参见第十章）．我们将把可配称 q 过程和有势 q 过程视为同一概念．这些术语的变动是基于如下的一些考虑：可逆性的数学抽象是定义（7.1.1）．那么，由定理（7.1.6）可见，可逆 q 过程的自然的定义无需遍历性条件．另一方面，从国际上流行的文献 Fukushima [1]，Silverstein [1] 来看，他们的“可配

称（Symmetrizable）”与我们的“有势”一致.

可配称 q 过程最早是 Колмогоров［2］1936 年开始研究的. 他考虑是离散的时间参数、有限状态的马链. 之后，Kendall［3］做过一些工作. 上段所引的两本书是国外近年来的主要代表作. 但他们基本上没有涉及 q 过程. 国内钱敏平［1］最先考虑可逆马链. 得到定理（7.2.7）的后一结论. 随后，侯振挺等做了深入的研究. 直至 1979 年的结果，基本上已收入钱敏、侯振挺等［1］的专著中.

本章虽已给出可配称 q 过程的基本理论，但相对于前四章关于一般 q 过程的较为完整的理论来说，还相差甚远. 有势 q 过程的唯一性准则，不中断的有势 q 过程的存在准则和唯一性准则，都还没有完成，特别是不断的可逆 q 过程的唯一性问题，有重要的实际意义，因而值得认真地研究.

§7.1—§7.3取自陈木法［2］.该文最早研究抽象空间的可逆 q 过程.推广到可配称情形是郑小谷［1］. 这些结果是我们早期工作（例如见钱、侯等［1］）的抽象化.

§7.4主要参考了杨向群[1],他对 Fellter 边界理论作了重要改进.定理（7.4.14）属于 Reuter，这里的证明取自郑小谷[1].

保守情形不断可逆 Q 过程的存在性最先由侯振挺、郭青峰、陈木法［1］得到、非保守情形由陈安岳、张汉君［1］得到. §7.5 给出了抽象空间的形式. 大多是自然的推广. 但引理（7.5.8）是新的. 它表明：在研究可逆 q 过程时，消极边界 X^0 不起作用.

保守可逆 Q 过程的唯一性见侯、郭、陈［1］. 非保守情形侯振挺、陈木法［4］中曾做过一些研究. §7.6 的结果是新的，我们部分地参考了欧阳荣华、戴永隆的一份手稿. 感谢张汉君指出笔者原稿中的失误.

第八章 Feller边界

在前面几章中已经看到．q 过程或可配称 q 过程的研究依赖于 $\mathscr{U}_\lambda$ 和 $\mathscr{V}_\lambda$，即流出解和流入解的结构．因此，为了更深入地研究过程的构造，需要仔细地探讨 $\mathscr{U}_\lambda$ 和 $\mathscr{V}_\lambda$，这就是边界理论．

本章的目的是研究一种边界理论，称之为Feller边界．其优点是无需对状态空间作额外的限制．本章是下一章的准备．

§8.1 格性质

设 $\Pi(x, A)$ ($x\in E$, $A\in\mathscr{E}$) 是一个次马氏核：关于 x 可测，关于 A 为测度且 $0\leqslant\Pi(x, A)\leqslant1$．定义

$$\Pi f=\int\Pi(\cdot,\ dy)f(y),\qquad f\in{}_b\mathscr{E};$$

$$\Pi^0=I,\ \Pi^{n+1}=\Pi\cdot\Pi^n,\ n\geqslant0.$$

再记

$$\mathscr{U}=\{f\in\mathscr{E}:\ 0\leqslant f\leqslant1,\ \Pi f=f\},$$

$$\mathscr{U}^*=\{f\in\mathscr{E}:\ 0\leqslant f\leqslant1\text{ 且 }\Pi f\geqslant f\},$$

$$\mathscr{U}_*=\{f\in\mathscr{E}:\ 0\leqslant f\leqslant1\text{ 且 }\Pi f\leqslant f\},$$

$$\overline{\mathscr{U}}(f)=\{g\in\mathscr{U}:\ g\leqslant f\},$$

$$\underline{\mathscr{U}}(f)=\{g\in\mathscr{U}:\ g\geqslant f\}.$$

(8.1.1) 引理

(i) 对每 $f\in\mathscr{U}^*$，$\Pi^n f\uparrow g$，$n\to\infty$．且 g 为 $\underline{\mathscr{U}}(f)$ 中的最小元．即对每 $h\in\underline{\mathscr{U}}(f)$，有 $h\geqslant g\geqslant f$；

(ii) 对每 $f\in\mathscr{U}_*$，$\Pi^n f\downarrow g$，$n\to\infty$．且 g 为 $\overline{\mathscr{U}}(f)$ 中的最

大元．即对每 $h\in\overline{\mathscr{U}}(f)$ ，有 $h\leqslant g\leqslant f$．

证 命 $g_0=f\in\mathscr{U}^*$，$g_n=\Pi^n f$．则由归纳法知 $f\leqslant g_n\leqslant g_{n+1}\leqslant 1$，因此 $g_n\uparrow g$ 且由单调收敛定理知 $g=\Pi g\geqslant f$．今设 $h\in\underline{\mathscr{U}}(f)$ ，则 $h\geqslant f=g_0$．由归纳法知 $h\geqslant g_n$．故 $h\geqslant g\geqslant f$．这便证得 (i) ．类似地可证 (ii) ． ▌

(8.1.2) **引理** 设 f_1，$f_2\in\mathscr{U}$，则 $\mathscr{U}$ 中含有不小于 f_1 和 f_2 的唯一的最小上界 $f_1\cup f_2$ 和最大下界 $f_1\cap f_2$．

证 命 $f=f_1\vee f_2$，则 $f\in\mathscr{U}^*$．如上述引理的 (i) ，我们可构造出 $g=\lim\limits_{n\to\infty}\Pi^n f$．易见 g 具有 $f_1\cup f_2$ 所要求的性质．类似地可得到 $f_1\cap f_2$． ▌

(8.1.3) **定理** 假定 f，g，h，… (可带附标) 属于 $\mathscr{U}$，那么

(i) $\alpha(f\cap g)=(\alpha f)\cap(\alpha g)$ ，$\alpha(f\cup g)=(\alpha f)\cup(\alpha g)$，如 $0\leqslant\alpha\leqslant 1$；

(ii) $(f\cap g)\cup h\leqslant(f\cup h)\cap(g\cup h)$，
$(f\cup g)\cap h\geqslant(f\cap h)\cup(g\cap h)$ ；

(iii) $(f\cap g)+h\leqslant(f+h)\cap(g+h)$，
$(f\cup g)+h\geqslant(f+h)\cup(g+h)$，
如 $f+h$，$g+h\in\mathscr{U}$；

(iv) $(f+g)\cap h\leqslant f\cap h+g\cap h$；
$(f+g)\cup h\leqslant(f\cup h)+(g\cup h)$
如 $f+g\in\mathscr{U}$；

(v) $f_1\cup f_2+g_1\cap g_2=h$，如 $f_1+g_1=f_2+g_2=h\in\mathscr{U}$；

(vi) $f_1+f_2=f_1\cup f_2+f_1\cap f_2$；

(vii) $(f+g)\cap h=(f\cap h)+(g\cap h)$，如 $f\cap g=0$．

证 (i) ，(ii) 和 (iii) 容易验证．(vi) 可由 (v) 直接导出．(iv) 来自初等的格性质

$$(f+g)\wedge h\leqslant f\wedge h+g\wedge h,\quad (f+g)\vee h\leqslant f\vee h+g\vee h.$$

往证（v）．显然有

$$h-g_1\cap g_2\geqslant h-g_1=f_1,\ h-g_1\cap g_2\geqslant h-g_2=f_2,$$

从而$h-g_1\cap g_2\geqslant f_1\cup f_2$。类似地，

$$h-f_1\cup f_2\leqslant h-f_1=g_1,\quad h-f_1\cup f_2\leqslant g_2,$$

因而$h-f_1\cup f_2\leqslant g_1\cap g_2$。故（v）成立。

最后，若$f\cap g=0$，则

$$\begin{aligned}(f+g)\cap h&=(f\cup g)\cap h &&（由（vi））\\ &\geqslant(f\cap h)\cup(g\cap h) &&（由（ii））\\ &=f\cap h+g\cap h &&（由（vi））\end{aligned}$$

由此及（iv）即得（vii）． ▌

§8.2 逗留解与逗留集

容易看出，集合$\mathscr{U}$是一个凸集．本节的目的是找出它的极点集．

由于$1\in\mathscr{U}$，我们可应用引理（8.1.1）．（ii），得

(8.2.1) $\quad \Pi^n(x,E)\downarrow s_E(x),\ s_E\in\mathscr{U}.$

这样，我们便得到

(8.2.2) 定理 s_E为$\mathscr{U}$中的最大元．即对每$f\in\mathscr{U}$，有$f\leqslant s_E$．

(8.2.3) 推论 $s_E=1$当且仅当$\Pi(\cdot,E)=1$．

现在，我们来讨论Π的限制，任取$A\in\mathscr{E}$，置$\mathscr{E}_A=\{B\in\mathscr{E}:B\subset A\}$．并用$\Pi_A$表示$\Pi$到$(A,\mathscr{E}_A)$上的限制．

当然，上面的所有讨论均适用于Π_A．特别地，相应于s_E，我们有函数σ_A．它只定义在A上，而且

$$\sigma_A(x)=\lim_{n\to\infty}\Pi_A^n(x,A)$$

它满足方程

$$\Pi_A\sigma_A=\sigma_A,\ 0\leqslant\sigma_A\leqslant 1,$$

而且，由（8.2.2），σ_A 是上述方程的最大解。

为方便，我们把 σ_A 扩张的全空间：

$$\sigma_A(x)=0,\ x\in E-A,$$

那么 $\sigma_A\in\mathscr{U}^*$。于是，我们可应用引理（8.1.1）。（i）于函数 $f=\sigma_A$，得

（8.2.4）$\Pi^n\sigma_A\uparrow s_A,\ n\uparrow\infty,$

而且 s_A 是 $\underline{\mathscr{U}}$（σ_A）中的最小元。特别地，$s_E=\sigma_E$。

（8.2.5）**定义** 称 $A\in\mathscr{E}$ 为逗留集，如 $s_A\neq 0$，或等价地，$\sigma_A\neq 0$。

我们有如下明显的判准：

（8.2.6）**定理** 为使 A 为逗留集，充要条件是：存在 $x\in A$ 和 $\eta>0$，使得对一切 $n\geqslant 0$，有

$$\Pi_A^n(x,\ A)>\eta,$$

此处 $\Pi_A^0=I$。

（8.2.7）**定义** 称 A 与 B 等价，如 $s_A=s_B$。

（8.2.8）**引理** 如 $A\cap B=\phi$，则

（i）$s_A\cap s_B=0$；

（ii）$s_A\cup s_B=s_A+s_B\leqslant s_{A\cup B}$。

证 由定义立得$s_A+s_B\leqslant s_{A\cup B}$。又因

$$\sigma_A+\sigma_B=\begin{cases}\sigma_A, & \text{在 } A \text{ 上},\\ \sigma_B, & \text{在 } B \text{ 上}.\end{cases}$$

从而 $s_A\cup s_B\geqslant\sigma_A+\sigma_B$。两边左乘 Π^n 并命 $n\to\infty$，即得 $s_A\cup s_B\geqslant$ $\geqslant s_A+s_B$。反向不等式平凡。这便证得 $s_A\cup s_B=s_A+s_B$。由此及（8.1.3），（vi）立得（i）。 ▌

现在考虑 $A\subset B$，A，$B\in\mathscr{E}$。定义

$$s_A^B(x)=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\Pi_B^n\sigma_A(x), & x\in B,\\ 0, & x\notin B.\end{cases}$$

显然有

(8.2.9)　$\sigma_A \leqslant s_A^B \leqslant s_A$，$s_A = s_A^E$，$\sigma_A = s_A^A$.

(8.2.10) **引理**　$s_A = \lim_{n\to\infty} \Pi^n s_A^B$. 特别地，如 $A \subset B$，$C \subset B$ 且 $s_C^B = s_A^B$，则 $s_A = s_C$.

证　在 (8.2.9) 两边左乘 Π^n，并令 $n\to\infty$.　】

(8.2.11) **引理**

(i) 如 $f \in \mathscr{U}_+$，则

$$f(x) \geqslant \Pi_A^n f(x) + \sum_{m=0}^{n-1} \Pi_A^m \Pi f I_{E-A}(x), x \in A \in \mathscr{E}, n \geqslant 0.$$

如 $f \in \mathscr{U}$，则等号成立.

特别地，

$$\text{(ii)}\ \Pi_A^n 1(x) + \sum_{m=0}^{n-1} \Pi_A^m \Pi(\cdot, E-A)(x) \leqslant 1, x \in A \in \mathscr{E}, n \geqslant 0,$$

如 $\Pi 1 = 1$，则等号成立；

$$\text{(iii)}\ \sigma_A(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \Pi_A^n \Pi(\cdot, E-A)(x) \leqslant 1, x \in A \in \mathscr{E}.$$

证　在 (i) 中取 $f=1$ 即得 (ii)、在 (ii) 中命 $n\to\infty$ 即得 (iii). 往证 (i). 当 $n=0$ 时，不等式平凡. 假设对某 n 已真，则由 $f \geqslant \Pi f$ 知

$$\Pi_A^n f(x) \geqslant \Pi_A^{n+1} f(x) + \Pi_A^n \Pi f I_{E-A}(x), \ x \in A$$

以此代入 (i) 中的不等式知它对 $n+1$ 亦真. 归纳法完成. 如 $\Pi 1 = 1$，则上述证明中的每一步均取等号.　】

(8.2.12) **引理**　设 f 是方程 $\Pi f = f$ 的有界非负解，$0 < \eta < \|f\| = \sup_x f(x)$，置

$$F_\eta = \{x \in E: f(x) > \|f\| - \eta\},$$

则 F_η 是一个逗留集，如果 $0 < \delta/\eta < \varepsilon$，则

(8.2.13)　$\sigma_{F_\eta}(x) > 1 - \varepsilon$，$x \in F_\delta$.

证　应于引理 (8.2.11). (i) 和 (ii) 于函数 $f/\|f\| = \Pi f/\|f\|$，和 $A = F_\eta$，得

$\|f\|-\delta<f(x)\leqslant\|f\|\Pi^{n}{}_{F_\eta}(x,F_\eta)\quad+(\|f\|-\eta)\times$
$\sum_{m=0}^{n-1}\Pi^{m}{}_{F_\eta}\Pi I_{E-F_\eta}\leqslant\|f\|\Pi^{n}{}_{F_\eta}(x,\ F_\eta)+(\|f\|-\eta)\times$
$(1-\Pi^{n}{}_{F_\eta}(x,F_\eta)),x\in F_\delta$

从而

$$\Pi^{n}_{F_\eta}(x,\ F_\eta)\geqslant 1-\frac{\delta}{\eta},\ x\in F_\sigma$$

然后命 $n\to\infty$。 ▌

(8.2.14) **引理** 对每逗留集 A，我们有

$$\|\sigma_A\|=\|s_A\|=1.$$

证 由于 s_E 是最大逗留解，因此由(8.2.13)立得 $\|s_E\|=1$。应用此结论于 Π_A 和 σ_A，我们得到 $\|\sigma_A\|=1$。但 $\sigma_A\leqslant s_A\leqslant 1$。 ▌

(8.2.15) **引理** 使用 (8.2.12) 的记号．我们有

$$f\geqslant(\|f\|-\eta)s_{F_\eta}.$$

证 由定义，当 $x\notin F_\eta$ 时，$\sigma_{F_\eta}(x)=0$；而当 $x\in F_\eta$ 时，$f(x)\geqslant\|f\|-\eta$。但 $0\leqslant\sigma_{F_\eta}(x)\leqslant 1$，故总有 $f\geqslant(\|f\|-\eta)\sigma_{F_\eta}$。左乘 Π^n 并命 $n\to\infty$ 即得所需结论． ▌

下述结果是引理 (8.2.12) 的补充，它是后面讨论的出发点。

(8.2.16) **定理** 对每逗留集 A 和 $0<\eta<1$，令

$$A_\eta=[x\in E:\ s_A(x)>1-\eta],$$
$$A'_\eta=[x\in E:\ \sigma_A(x)>1-\eta],$$

则 $s_A=s_{A_\eta}=s_{A'_\eta}$。即 A，A_η 和 A'_η 都是等价的。

证 如果 $A=E$，则相应的 $A_\eta=A'_\eta$。因此，只需证

(8.2.17) $\quad s_E=s_{E_\eta}$。

这是引理的一种特殊情形．然而，我们可把一般情形归结为这种情形。事实上，由于 $A'_\eta\subset A_\eta\subset A$，只需证 $s_A=s_{A'_\eta}$。根据引理

(8.2.10)，只需证 $s_{A_\eta}^{A'} = s_A^A = \sigma_A$。但这与（8.2.17）只是记号的不同而已。

往证（8.2.17）。命

$$u = s_E - s_{E_\eta}$$

并假定 $\|u\| > \alpha > 0$。由引理（8.2.12）知，

$$B = \{x \in E;\ u(x) > \alpha\}$$

是一个逗留集。再用一次（8.2.12）于函数 $f = s_E$，那么 $F_\eta = E_\eta$，而且，只要 $\delta < \alpha\eta$，就有

$$s_{E_\eta}(x) > 1 - \alpha, \quad x \in E_\delta.$$

这样，当 $x \in E_\delta \cap B$ 时，我们有

$$s_E(x) = u(x) + s_{E_\eta}(x) > \alpha + (1 - \alpha) = 1,$$

但这是不可能的。因而 $B \subset E - E_\delta$。由此及 E_δ 的定义得

$$s_E(x) \leqslant 1 - \delta, \qquad x \in B,$$

但 $s_E \geqslant s_B \geqslant \sigma_B$，而且由（8.2.12）知，存在 $x \in B$ 使 $\sigma_B(x) > 1 - \delta$。这与上式矛盾。故 $u = 0$。 】

(8.2.18) **定义** 称逗留集 A 是典型的，如存在 $0 < \eta < 1$ 使

$$s_A(x) > 1 - \eta, \qquad x \in A.$$

由（8.2.16）立得

(8.2.19) **引理** 每一逗留集 A 包含一个等价子集，它是典型的。

(8.2.20) **引理** 如 A 是典型的且 $A \subset B$，则

$$s_B = s_A + s_{B-A}.$$

证 我们先处理一种特殊情况：$B = E$。置

$$u = s_E - s_A - s_{E-A}$$

我们要证 $u = 0$。由引理（8.2.8）.（ii）知 $u \geqslant 0$。今设 $\|u\| > > 0$，并定义

$$A_\delta = \{x \in A;\ s_A(x) > 1 - \delta\}$$

$$C_\delta = \{x \in E - A;\ s_{E-A}(x) > 1 - \delta\}$$

$$U_\delta=\{x:\ u(x)\geqslant\|u\|-\delta\}$$

此处 C_δ 可以是空集．选择 δ 使 $2\delta<\|u\|$．当 $x\in A_\delta\cap C_\delta$ 时，由（8.2.8）．（ii）知

$$s_E(x)\geqslant s_A(x)+s_{E\setminus A}(x)>2(1-\delta)>1,$$

这是不可能的．因此 $A_\delta\cap C_\delta=\phi$．同样地，

$$A_\delta\cap C_\delta=\phi,\ A_\delta\cap U_\delta=\phi,\ C_\delta\cap D_\delta=\phi$$

再用一次（8.2.8）．（ii）得

$$s_E\geqslant s_{A_\delta}+s_{C_\delta}+s_{U_\delta}$$

由定理（8.2.16）知，上式等价于

$$s_E\geqslant s_A+s_{E\setminus A}+s_{U_\delta}$$

此处用到我们的约定 $s_\phi=0$．特别地，$u\geqslant s_{U_\delta}$．因而由引理（8.2.14）得 $\|u\|=1$．另一方面，由于 A 是典型的及 u 的定义知

$$s_E(x)\geqslant 2-\eta-\delta,\qquad x\in A\cap U_\delta,$$

这样，若 $\delta<1-\eta$，就有 $A\cap U_\delta=\phi$．对于这样的 δ，$U_\delta\subset E-A$，从而

$$1\geqslant s_E\geqslant s_{E\setminus A}+u\geqslant s_{E\setminus A}+s_{U_\delta}\geqslant 2s_{U_\delta}$$

但因（8.2.14），$\|s_{U_\delta}\|=1$，故上式是荒谬的．因此，我们断定 $u=0$，或

$$s_E=s_A+s_{E\setminus A}.$$

现在，让我们考虑 $B\supset A$ 的一般情形．我们要用 Π_B 代替 Π．由假设，A 关于 E 是典型的．从而 $s_A\neq0$，由引理(8.2.10)知 $s_A^B\neq0$，因而由定理（8.2.16）知，存在 $A'\subset A$，它关于 B 来说也是典型的．这样，我们可以使用前一部分的证明，得到

$$\sigma_B=s^B_{A'}+s^B_{B\setminus A'},\qquad s^B_A=s^B_{A'}.$$

两边左乘 Π^n，并命 $n\to\infty$，由引理（8.2.10）得

$$s_B=s_A+s_{B\setminus A'},\ s_A=s_{A'},$$

由于 $(B\setminus A')-(B\setminus A)=A\setminus A'\subset A$，因而当 $x\in A$ 时，由上式得

$$s_{B\setminus A'}(x)=s_B(x)-s_A(x)=s_B(x)-s_{A'}(x)\leqslant 1-s_{A'}(x)$$
$$=1-s_A(x)\leqslant 1-(1-\eta)=\eta\leqslant 1-\eta.$$
最后一步是因我们选 A' 时，可预先指定 $\eta\leqslant 1/2$. 这样，由定理(8.2.16)知，如 $x\in A$，则 $x\notin (B\setminus A')_\eta$. 即 $(B\setminus A')_\eta\subset B\setminus A$. 故 $s_{B\setminus A'}=s_{(B\setminus A')_\eta}\leqslant s_{B\setminus A}$. 反向不等式 $s_{B\setminus A'}\geqslant s_{B\setminus A}$ 可由 $B\setminus A'\supset B\setminus A$ 立即得到. 故 $s_{B\setminus A'}=s_{B\setminus A}$. 进而 $s_B=s_A+s_{B\setminus A}$. ▮

下面是逗留解的判准.

(8.2.21) **定理** $f\in\mathscr{U}$ 是逗留解的充要条件是

(8.2.22) $\quad f\cap(s_E-f)=0$

或等价地，

(8.2.23) 对每个逗留集 C，若存在 $t>0$ 使 $f\geqslant ts_C$，则 $f\geqslant s_C$.

证 (*a*) 设 $f=s_A$.无妨设 A 是典型的. 由引理 (8.2.20)，此时有 $s_E-f=s_{E\setminus A}$. 从而 (8.2.22) 就是 (8.2.8) . (i) . 可见条件 (8.2.22) 是必要的.

(*b*) 今证 (8.2.22) ⇒ (8.2.23) . 由 (8.2.22) ，我们可以应用 (8.1.3) . (vii) ，得

$$s_C=s_C\cap(f+(s_E-f))$$
$$=s_C\cap f+s_c\,(s_E-f)$$

今假定存在 $t>0$，使 $ts_C\leqslant f$. 则由 (8.2.22) 知，上式的后一项为零. 这样，上式化成 $s_C=s_C\cap f$，或即 $s_C\leqslant f$.

(*c*) 现在假定 (8.2.23) 成立. 我们需要证明：存在逗留集 A 使 $f=s_A$.

按引理 (8.2.12) ，对于这个 $f\in\mathscr{U}$，我们可选到逗留集F_η. 然后由引理 (8.2.15) 及条件 (8.2.23) 知 $f\geqslant s_{F_\eta}$. 从而

$$u\equiv f-s_{F_\eta}\in\mathscr{U}.$$

如果 $u\neq 0$，则方才的论证表明：存在逗留集 A 和 $t>0$，使 $u\geqslant ts_A$. 代入上式得 $f\geqslant ts_A$. 再由 (8.2.23) 得 $f\geqslant s_A$. 今取 A_η

如定理（8.2.16）. 则对于每 $x\in A_\eta$，我们有 $f(x)\geqslant s_A(x)\geqslant 1-\eta$。于是 $A_\eta\subset F_\eta$。但此时由上式得

$$f\geqslant s_{A_\eta}+u\geqslant(1+t)s_{A_\eta}$$

或者 $\|f\|\geqslant 1+t$。这与假设矛盾。故 $u=0$，或者 $f=s_{A_\eta}$。 ▮

（8.2.24）**定理** 如 A 和 B 都是逗留集，则

$$s_{A\cap B}=s_A\cap s_B.$$

证 显然有 $s_{A\cap B}\leqslant s_A\cap s_B$。因此，我们只需证存在 $C\subset A\cap B$，使得 $s_C=s_A\cap s_B$。因此，只需考虑 A 和 B 为典型的便已足够（否则，用典型子集代替之）。实际上，我们将假定

$$s_A(x)>3/4,\ x\in A;\ s_B(x)>3/4,\ x\in B.$$

我们先证

$$(8.2.25)\qquad s_{A\cup B}\leqslant s_{A\cap B}+(s_E-s_A)+(s_E-s_B).$$

首先，若补定义

$$\Pi_A(x,dy)=0,\qquad x\notin A,$$

则由归纳法易见

$$\Pi^n_{A\cup B}(x,A\cup B)\leqslant \Pi^n_{A\cap B}(x,A\cap B)+(1-\Pi^n_A(x,A))+(1-\Pi^n_B(x,B))$$

（注意当 $x\notin A\cap B$ 时，右方 $\geqslant 1$）. 命 $n\to\infty$，得

$$\sigma_{A\cup B}\leqslant\sigma_{A\cap B}+(1-\sigma_A)+(1-\sigma_B)$$

左乘 Π^n，再命 $n\to\infty$，即得（8.2.25）.由此式得：当 $x\in A\cap B$ 时，

$$\begin{aligned}s_{A\cap B}(x)&\geqslant s_{A\cup B}(x)+s_A(x)+s_B(x)-2s_E(x)\\&=2s_A(x)+s_B(x)+s_{(A\cup B)\setminus A}(x)-2s_E(x)\\&>\frac{9}{4}-2=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

倒数第二步用到引理（8.2.20）. 这表明 $A\cap B$ 也是典型的. 因此，我们可以再次使用（8.2.20），得

$$s_A=s_{A\cap B}+s_{A\setminus A\cap B},\quad s_B=s_{A\cap B}+s_{B\setminus A\cap B},$$

注意（8.2.8）(i) 并使用分配律（8.1.3）(vii)，得

$$s_A \cap s_B = s_{A\cap B} + s_{A-A\cap B} \cap s_{A\cap B} + s_{A\cap B} \cap s_{B\setminus A\cap B} + s_{A\setminus A\cap B} \cap s_{B\setminus A\cap B}.$$

再用一次（8.2.8）.(i)，右方后三项为零．故得所欲证． ▌

（8.2.26）**定理** 记

$$\mathscr{X} = \{s_A:\ A \in \mathscr{E}\}$$

约定 $s_\phi = 0$．设 X，Y，$X_n(n \geqslant 1)$ 都是逗留解，那么，我们有

(i) $X \cap Y \in \mathscr{X}$；

(ii) 如 $X \leqslant Y$，则 $Y - X \in \mathscr{X}$；

(iii) $X \cup Y \in \mathscr{X}$；

(iv) 如 $X \cap Y = 0$，则 $X + Y \in \mathscr{X}$；

(v) 如 $X_n \uparrow u$ 或 $X_n \downarrow u$，则 $u \in \mathscr{X}$．

证 (*a*) 我们先说明定理（8.2.24）比（i）深刻．实际上，无妨设 $X, Y \in \mathscr{X}$，$X, Y \neq 0$．则存在逗留集 A 和 B，使 $X = s_A$，$Y = s_B$．由（8.2.24）知 $s_{A\cap B} = s_A \cap s_B$．这表明 $X \cap Y \in \mathscr{X}$．

另一方面，(i) 也可以由判准（8.2.23）直接得到．事实上，若存在 $t > 0$ 使 $X \cap Y \geqslant ts_C$（C 为逗留集），则 $X \geqslant ts_C$．由于 $X \in \mathscr{X}$ 和（8.2.23），$X \geqslant s_C$．同样地，$Y \geqslant s_C$．故 $X \cap Y \geqslant s_C$．然后，判准（8.2.23）表明 $X \cap Y \in \mathscr{X}$．

(*b*) 为证 (ii)，无妨设 $X \neq 0$，$X = s_A$，$Y = s_B$．于是有 $X = X \cap Y = s_{A\cap B}$．因此，必要时以 $A \cap B$ 代替 A，我们可以假定 $A \subset B$．进一步，还可以假定 A 是典型的．现在，由引理（8.2.20）得

$$Y = s_B + s_{B\setminus A} = X + s_{B\setminus A}$$

从而

$$Y - X = s_{B\setminus A} \in \mathscr{X}.$$

(*c*) 由定理（8.1.3）．(v) 得

$$X\cup Y=s_E-(s_E-X)\cap(s_E-Y)$$

然后由（ii）和（i）知右方是逗留解．（iii）得证．

（d）由（8.1.3）．（vi）知，（iv）是（iii）的特款．

（e）如 $X_n\downarrow u$，则由判准（8.2.23）立知 $u\in\mathscr{X}$．如 $X_n\uparrow u$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(s_E-X_n)=s_E-u$，且为单调降的，因而由刚才所证和（ii）知 $s_E-u\in\mathscr{X}$．再用一次（ii），便得 $u=s_E-(s_E-u)\in\mathscr{X}$． ∎

（8.2.27）**定理** $\mathscr{U}$ 的逗留解之集就是 $\mathscr{U}$ 的极点集．即由

$$X=tu+(1-t)v$$

对某 $0<t<1$ 和 $u,v\in\mathscr{U}$ 成立导致 $u=v=X$．

证 （a）假定 $X\in\mathscr{X}$ 并有所述的分解．则

$$s_E-X=t(s_E-u)+(1-t)(s_E-v)$$

由于 $tu\leqslant X$ 且 $t(s_E-u)\leqslant s_E-X$，从而由（8.2.22）得 $u\cap(s_E-u)\leqslant t^{-1}X\cap(s_E-X)=0$．再用一次判准（8.2.22）知 $u\in\mathscr{X}$．同样可得 $v\in\mathscr{X}$．然后由（8.2.23）知

$$X\geqslant u,\quad X\geqslant v,$$

因而

$$(1-t)v=X-tu\geqslant(1-t)u.$$

这表明 $v\geqslant u$．对称地，$u\geqslant v$．故 $u=v=X$．

（b）设 $X\notin\mathscr{X}$，则由定理（8.2.21）知

$$X\cap(s_E-X)\equiv Z\neq0.$$

往证

$$X=\frac{1}{2}(X+Z)+\frac{1}{2}(X-Z)$$

是一个分解．显然 $0\leqslant X-Z\leqslant1$，于是 $X-Z\in\mathscr{U}$．对于一切 x，我们有 $Z(x)\leqslant s_E(x)-X(x)\leqslant1-X(x)$，于是 $0\leqslant X+Z\leqslant1$ 且 $X+Z\in\mathscr{U}$．类似地有 $X-Z\in\mathscr{U}$． ∎

§8.3 流出边界

本节将应用上一节的结果来研究流出空间$\mathscr{U}_\lambda$的结构.

使用(7.4.2)之前的记号Π和$\Pi(\lambda)$. 相应于算子Π, 我们有$\mathscr{U}$, $\mathscr{U}^*$等, 相应于$\Pi(\lambda)$, 可定义$\mathscr{U}(\lambda)$. 但它重合于$\mathscr{U}_\lambda(1)$. 类似地有$\mathscr{U}_\lambda^*(1)$, $\mathscr{U}_{\lambda *}(1)$, $\overline{\mathscr{U}_\lambda}(f)$和$\underline{\mathscr{U}_\lambda}(f)$.

显然, 对每$\lambda>0$, $\mathscr{U}_\lambda(1)\subset\mathscr{U}^*$. 因此, 由引理(8.1.1). (i)立得

(8.3.1) **引理** 对每$f_\lambda\in\mathscr{U}_\lambda(1)$,

$$\Pi^n f_\lambda\uparrow f_0,\qquad n\uparrow\infty$$

且f_0为$\underline{\mathscr{U}}(f_\lambda)$中的最小元. f_0与λ有关.

(8.3.2) **定义** 如上得到的$f_0\in\mathscr{U}$称为$f_\lambda\in\mathscr{U}_\lambda(1)$的标准映像.

下述结果表明, 对于协调族$\{f_\lambda: \lambda>0\}$来说, 这里的标准映像的定义与(7.4.2)是一致的. 因为下述结果与(7.4.3)一致.

(8.3.3) **引理** $f_\lambda\in\mathscr{U}_\lambda(1)$的标准映像$f_0$如下决定:

$$f_0=f_\lambda+\lambda\Gamma f_\lambda$$

$$=f_\lambda+\lambda\sum_{n=0}^{\infty}\int_H\Pi^n(\cdot,dy)f_\lambda(y)/q(y).$$

证 设$y\in H$, 则由

$$f_\lambda(y)+\lambda f_\lambda(y)/q(y)=\Pi f_\lambda(y),$$

得

$$\sum_{m=0}^{n-1}\int_H\Pi^m(x,dy)f_\lambda(y)+\sum_{m=0}^{n-1}\int_H\Pi^m(x,dy)\lambda f_\lambda(y)/q(y)$$

$$=\sum_{m=0}^{n-1}\int_H\Pi^{m+1}(x,dy)f_\lambda(y),$$

即

$$f_\lambda(x)+\lambda\sum_{m=0}^{n-1}\int_H \Pi^m(x,dy)f_\lambda(y)/q(y)$$
$$=\int_H \Pi^n(x,dy)f_\lambda(y).$$

命 $n\to\infty$ 即得所欲证。 ▌

(8.3.4) **引理** 如 $f_0\in\mathscr{U}$，定义

$$f_\lambda=f_0-\lambda P^{\min}(\lambda)f_0$$

则 f_λ 是 $\overline{\mathscr{U}}_\lambda(f_0)$ 中的最大元。

证 显然 $\mathscr{U}\subset\mathscr{U}_\lambda.(1)$，因而由引理（8.1.1）．(ii) 知存在具有所述性质的元素 $\widetilde{f}_\lambda$ 使 $\Pi^n(\lambda)f_0\downarrow\widetilde{f}_\lambda$，当 $n\to\infty$．因此，只需证

$$\widetilde{f}_\lambda^{(n)}\equiv f_0-\lambda P^{(n)}(\lambda)f_0=\Pi(\lambda)^{n+1}f_0,\quad n\geqslant 0,\ .$$

此处，$P^{(n)}(\lambda)$ 为最小 q 过程典型解法的第 n 步：

$$P^{(0)}(\lambda)(x,A)=\delta(x,A)/(\lambda+q(x)),$$
$$P^{(n+1)}(\lambda)=\Pi(\lambda)P^{(n)}(\lambda)+P^{(0)}(\lambda),\quad n\geqslant 0.$$

当 $n=0$ 时，

$$\widetilde{f}_\lambda^{(0+1)}=f_0-\lambda P^{(0)}(\lambda)f_0=f_0-\frac{\lambda}{\lambda+q(\cdot)}f_0=\Pi(\lambda)f_0.$$

设对 n 已真，则

$$\begin{aligned}\widetilde{f}_\lambda^{(n+1)}&=f_0-\lambda(\Pi(\lambda)P^{(n)}(\lambda)+P^{(0)}(\lambda))f_0\\&=\Pi(\lambda)f_0-\lambda\Pi(\lambda)P^{(n)}(\lambda)f_0\\&=\Pi(\lambda)[f_0-\lambda P^{(n)}(\lambda)f_0]\\&=\Pi(\lambda)\Pi^{n+1}(\lambda)f_0\\&=\Pi(\lambda)^{n+2}f_0.\end{aligned}$$ ▌

(8.3.5) **定义** 称（8.3.4）中所构造的从 $\mathscr{U}$ 到 $\mathscr{U}_\lambda(1)$ 的映射为 λ 映像。

(8.3.6) **引理** 设 f_λ 为 $f_0\in\mathscr{U}$ 的 λ 映像，则 $\{f_\lambda:\lambda>0\}$ 是协调的。即

$$f_\lambda = R(\mu,\lambda) f_\mu, \qquad \lambda,\mu > 0.$$

此处

$$R(\mu,\lambda) f_\mu(x) = \int R(\mu,\lambda,x,dy) f_\mu(y).$$

证 由预解方程和引理（8.3.4）立得. ▮

（8.3.7）**定义** $f\in\mathscr{U}$ 称为消极的，如果存在 $\lambda>0$，使

$$f = \lambda P^{\min}(\lambda) f.$$

换言之，若 $g_\lambda\in\overline{\mathscr{U}}_\lambda(f_0)$，则 $g_\lambda=0$. 然后，由引理（8.3.6），上式与 $\lambda>0$ 无关.

我们已经知道，X^0 是最大的消极元（见引理（7.4.4））.

（8.3.8）**引理** 若 $f_0\in\mathscr{U}$ 是 $f_\lambda\in\mathscr{U}_\lambda(1)$ 的标准映像，则

$$f_\lambda = f_0 - \lambda P^{\min}(\lambda) f_0,$$

证 由引理（8.3.4）和（8.3.1）知 $f_\lambda' = f_0 - \lambda P^{\min}(\lambda) f_0 \geqslant f_\lambda$（因为 f_λ' 为 $\overline{\mathscr{U}}_\lambda(f_0)$ 中的最大元而 $f_\lambda\leqslant f_0$）. 当然也就有 $\Pi^n f_\lambda \leqslant \Pi^n f_\lambda'$，$n\geqslant 1$. 于是 f_λ 和 f_λ' 有相同的标准映像 f_0. 这样，$f_\lambda'-f_\lambda\in\mathscr{U}_\lambda(1)$ 有标准映像 0，故由引理（8.3.3）知 $f_\lambda'=f_\lambda$. ▮

（8.3.9）**引理** 为使 $f_0\in\mathscr{U}$ 为

$$f_\lambda = f_0 - \lambda P^{\min}(\lambda) f_0$$

的标准映像，充要条件是不存在非零、消极的 $g\in\overline{\mathscr{U}}(f_0)$.

证 先证充分性. 设 f_0' 为 f_λ 的标准映像，则由引理（8.3.8）得

$$f_0' - f_0 = \lambda P^{\min}(\lambda)(f' - f_0).$$

由于 f_0' 是 $\mathscr{U}(f_\lambda)$ 中的最小元，f_λ 是 $\overline{\mathscr{U}_\lambda}(f_0)$ 中的最大元，从而 $0\leqslant f_0'-f_0\leqslant f_0'\leqslant f_0$. 这样，若不存在非零、消极的 $g\in\overline{\mathscr{U}}(f_0)$，则必有 $f_0'=f_0$.

反之，假定存在非零、消极的 $g\in\overline{\mathscr{U}}(f_0)$. 那么

$$f_\lambda = (f_0-g) - \lambda P^{\min}(\lambda)(f_0-g).$$

从而 $f_0-g\geqslant f_\lambda$. 仍用 f_0' 表示 f_λ 的标准映像. 由于 f_0' 是 $\underline{\mathscr{U}}(f_\lambda)$ 的

最小元，因而$f_0 - g \geqslant f_0'$。这表明$f_0 \neq f_0'$。 ▌

(8.3.10) **推论** 从$\mathscr{U}_\lambda(1)$到$\mathscr{U}$的标准映像的值域与λ无关。

由定理(7.4.1)，$\overline{X}_\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \Pi(\lambda)^n 1$为$\mathscr{U}_\lambda(1)$的最大元。由协调性，两种标准映像一致。因此，$\overline{X}_\lambda$的标准映像$\overline{X}$是从$\mathscr{U}_\lambda(1)$的$\mathscr{U}$中的标准映像值域中的最大元。

分别用$\mathscr{S}_\lambda$和$\mathscr{S}$表示$\mathscr{U}_\lambda(1)$和$\mathscr{U}$的逗留解的全体。

下面是本节的主要结果。

(8.3.11) **定理**

(i) 从$\mathscr{U}_\lambda$(1)到$\mathscr{U}$的标准映像的值域是

$$\overline{\mathscr{U}} = \{f \in \mathscr{U}: f \leqslant \overline{X}\}$$

(ii) $\mathscr{U}_\lambda(1)$和$\overline{\mathscr{U}}$之间的对应是1—1的，即标准映像与λ映像互为逆映像，并且格同构。$\mathscr{S}_\lambda$与$\mathscr{S} \cap \overline{\mathscr{U}}$之间的对应也具有同样的性质。

证 (*a*) 由本定理之前的注解立知标准映像的值域含于$\overline{\mathscr{U}}$之中。反之，如$f \in \overline{\mathscr{U}}$但非标准映像，则由引理(8.3.9)知，存在非零、消极的$g \in \overline{\mathscr{U}}(f)$。从而$g \leqslant f \leqslant \overline{X}$。但$\overline{X}$是标准映像，故由(8.3.9)知$g = 0$。导致矛盾。

(*b*) 设$f_1, f_2 \in \mathscr{U}_\lambda(1)$。如果$f_1$和$f_2$有相同的标准映像$f_0$，则由引理(8.3.8)知$f_1 = f_2$。因而不同元素的标准映像是不同的。由此及(i)即知$\mathscr{U}_\lambda(1)$和$\overline{\mathscr{U}}$之间的对应是1—1的。

关于格同构，由于另一部分的证明类似。我们只证：若f_λ^1，$f_\lambda^2 \in \mathscr{U}_\lambda(1)$，分别有标准映像$f^1$和$f^2$，则$f_\lambda^1 \cup f_\lambda^2$有标准映像$f_0^1 \cup f_0^2$。即

$$f_0 = \lim_{n\to\infty} \Pi^n (f_\lambda^1 \cup f_\lambda^2) = f_0^1 \cup f_0^2.$$

首先，

$$f_0 = \lim_{n\to\infty} \Pi^n (\lim_{m\to\infty} \Pi(\lambda)^m (f_\lambda^1 \vee f_\lambda^2))$$

$$\geqslant (\lim_{n\to\infty} \Pi^n f_\lambda^1) \vee (\lim_{n\to\infty} \Pi^n f_\lambda^2)$$
$$= f_0^1 \vee f_0^2$$
从而 $f_0 \geqslant f_0^1 \cup f_0^2$. 另一方面
$$\Pi_n(f_0^1 \vee f_0^2) \geqslant \Pi(\lambda)^n (f_\lambda^1 \vee f_\lambda^2)$$
命 $n\to\infty$，便得 $f_0^1 \cup f_0^2 \geqslant f_\lambda^1 \cup f_\lambda^2$. 进而 $f_0^1 \cup f_0^2 \geqslant f_0$. 故 $f_0 = f_0^1 \cup f_0^2$.

为证明标准映像与 λ 映像互为逆映像. 设 $f_0 \in \overline{\mathscr{U}}$. 它的 λ 映像是
$$f_\lambda^1 = f_0 - \lambda P^{\min}(\lambda) f_0, \qquad \lambda > 0.$$
另一方面，由于 $f_0 \in \overline{\mathscr{U}}$ 及标准映像是从 $\mathscr{U}_\lambda(1)$ 到 $\overline{\mathscr{U}}$ 上的 1—1 映射. 因而对于每 $\lambda > 0$，存在唯一的 $f_\lambda^2 \in \mathscr{U}_\lambda(1)$，使得 f_λ^2 有标准映像 f_0 且
$$f_\lambda^2 = f_0 - \lambda P^{\min}(\lambda) f_0.$$
故 $f_\lambda^1 = f_\lambda^2$. 特别地，$f_0$ 是它的 λ 映像的标准映像.

为证明关于 $\mathscr{S}_\lambda$ 和 $\mathscr{S}$ 的断言，只需注意 $f_\lambda \in \mathscr{S}_\lambda$ 为零当且仅当它的标准映像 f_0 为零. ▌

下面是逗留解的分离性质.

(8.3.12) **定理** 设 $\{f_0^t;\ t\in T\} \subset \mathscr{S} \cap \overline{\mathscr{U}}$ 满足
$$f_0^t \cap f_0^s = 0, \qquad t \neq s,$$
则对于每 $t\in T$，存在序列 $\{x_n^t\}_{n=1}^\infty \subset E$ 使
$$(8.3.13) \qquad f_\lambda^s(x_n^t) \to \begin{cases} 1, & \text{如 } s=t, \\ 0, & \text{如 } s\neq t, \end{cases} \quad n\to\infty.$$

证 由定理 (8.2.16)，对每 t，我们可选到 $\{x_n^t\}_{n=1}^\infty$，使得 $f_n^t(x_n^t) > 1 - \frac{1}{n+1} = n/(n+1)$. 另一方面，由引理 (8.3.6)，$f_\lambda^t$ 是 λ 的减函数，因而
$$1 \geqslant f_\lambda^t(x_n^t) \geqslant f_n^t(x_n^t) > n/(n+1) \to 1, \quad n\to\infty.$$
如果 $s\neq t$，则由 $f_0^s \cap f_0^t = 0$ 及定理 (8.2.26). (iv) 知 $f_0^s + f_0^t \in$

$\mathscr{S}$. 从而由 (8.3.11) . (ii) 和定理 (8.1.3) . (vi) 知 $f_\lambda^i + f_\lambda^1 = f_\lambda^i \cup f_\lambda^1 \in \mathscr{S}_\lambda$. 最后,

$$0 \leqslant f_\lambda^i(x_n^i) = (f_\lambda^i \cup f_\lambda^1)(x_n^i) - f_\lambda^1(x_n^i)$$
$$\leqslant 1 - f_\lambda^1(x_n^i) \to 0, \ n \to \infty. \quad \blacksquare$$

§ 8.4 有限流出 q 过程的表达式

本节给出有限流出、满足向后方程的 q 过程的表达式.

(8.4.1) **定义** 称 $q(x) - q(x,\cdot)$ 是有限流出的, 如果 dim $\mathscr{U}_\lambda$ 有限.

下面是关于线性无关性的简单结果.

(8.4.2) **引理** 设 $\{f_i\}_1^m \subset {}_r\mathscr{E}$ 是一线性无关族.

(i) 如 $g = \sum_{i=1}^m \alpha_i f_i$, $\{\alpha_i\}_1^m \subset \boldsymbol{R}$ 且 $\alpha_k \neq 0$, 则 $f_1, \cdots, f_{k-1}$, g, f_{k+1}, $\cdots$, f_m 是线性无关的;

(ii) 对任何 $i \neq k$, f_1, $\cdots$, f_{i-1}, $f_i - f_k$, f_{i+1}, $\cdots$, f 是线性无关的.

(8.4.3) **引理**

(i) 如 $f_1, f_2 \in \mathscr{S}_\lambda$, 则

$$(f_1 \cap f_2)(f_i - f_1 \cap f_2) = 0, \ i = 1, 2.$$

(ii) 如 $f, g, h \in \mathscr{S}_\lambda$, $f \leqslant g$ 且 $g \cap h = 0$, 则

$$f \cap h = 0.$$

证 (a) 不失一般性, 可设 $f_1 \neq 0$, $f_2 \neq 0$, 且 $f_i = s_{A_i}$, $A_i \in \mathscr{E}$, $i = 1, 2$. 因为 $A_i (i = 1, 2)$ 是逗留集, 从而由定理 (8.2.24) 知

$$f_1 \cap f_2 = s_{A_1} \cap s_{A_2} = s_{A_1 \cap A_2}.$$

这样, 由引理 (8.2.19) , 存在典型的 $B \subset A_1 \cap A_2$, 使

$$f_1 \cap f_2 = s_B.$$

现在，使用引理（8.2.20）和（8.2.8）

$$(f_1\cap f_2)(f_i-f_1\cap f_2)=s_B\cap s_{A_i-B}=0,\quad i=1,2.$$

(b) (ii) 是平凡的：

$$f\cap h\leqslant g\cap h=0.\qquad \blacksquare$$

(8.4.4) 定理 设 $\dim\mathscr{U}_\lambda=m\geqslant 1$. 则存在一族 $\{X_\lambda^i\}_1^m\subset\mathscr{S}_\lambda$，使得

$$X_\lambda^i\cap X_\lambda^j=0,\quad i\neq j$$

而且 $\mathscr{U}_\lambda(1)$ 中的每一元素都是 $\{X_\lambda^i\}_1^m$ 的线性组合，特别地，

$$\overline{X}_\lambda=\sum_{i=1}^m X_\lambda^i.$$

证 (a) 我们先证 $\dim(\mathscr{S}_\lambda)=\dim\mathscr{U}_\lambda=m$. 由于 $\mathscr{S}_\lambda\subset\mathscr{U}_\lambda(1)$，从而 $\dim\mathscr{S}_\lambda\leqslant\dim\mathscr{U}_\lambda(1)=\dim\mathscr{U}_\lambda=m$. 今设 $\{f_i\}_1^n$ 是 $\mathscr{S}_\lambda$ 的一组基，$n\leqslant m$. 由于 $\mathscr{U}_\lambda(1)$ 是一个有限维 Banach 空间的闭子集（赋一致范数），从而是紧集．它显然是凸集．另一方面，由定理（8.2.27）知，$\mathscr{S}_\lambda$ 为 $\mathscr{U}_\lambda(1)$ 的极点集．这样，由 Krein-Milman 定理（Banach 空间的紧凸集重合于它的凸壳的闭包），我们有 $n\geqslant m$. 故 $n=m$.

下面，我们逐步选择具有所述分离性质的 $\mathscr{S}_\lambda$ 的基．

(b) 选择 $\mathscr{S}_\lambda$ 的一组基，使 $f_1\cap f_2=0$.

如 $f_1\cap f_2\neq 0$，则存在 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)\neq 0$，使 $f_1\cap f_2=\sum_{i=1}^m\alpha_i f_i$.

如果 $\alpha_1\neq 0$，那么，由引理(8.4.2)，我们可以依次作如下替换

$$(f_1,\ f_2,\ f_3,\ \cdots,\ f_m)$$
$$\to(f_1\cap f_2,\ f_2,\ f_3,\ \cdots,\ f_m)$$
$$\to(f_1\cap f_2,\ f_2-f_1\cap f_2,\ f_3,\ \cdots,\ f_m)$$

每一步都保持线性无关性不变．而且，由引理(8.4.3)知 $(f_1\cap f_2)\cap(f_2-f_1\cap f_2)=0$. 因此，我们已经得到一组满足 $f_1\cap f_2=0$ 的 $\mathscr{S}_\lambda$ 的基．对称地可以得到 $\alpha_2\neq 0$ 的情形．如果 $\alpha_1=\alpha_2=0$，则

必定存在 k：$3\leqslant k\leqslant m$，使 $\alpha_k\neq 0$。此时，在保持线性无关性的条件下，我们可以依次作如下的代换

$$
\begin{aligned}
&(f_1,\ f_2,\ \cdots,\ f_m)\\
&\to(f_1,\ f_2,\ \cdots,\ f_{k-1},\ f_1\cap f_2,\ f_{k+1},\ \cdots,\ f_m)\\
&\to(f_1-f_1\cap f_2,\ f_2,\ \cdots,\ f_{k-1},\ f_1\cap f_2,\ f_{k+1},\ \cdots,\ f_m)\\
&\to(f_1-f_1\cap f_2,\ f_1\cap f_2,\ f_3,\ \cdots,\ f_{k-1},\ f_2,\ f_{k+1},\cdots,f_m).
\end{aligned}
$$

也得到所要求的基。

(c) 假定我们已调整到第 $n<m$ 步。即我们已有一组 $\mathscr{S}_\lambda$ 的基 $\{f_i\}_1^m$，满足

$$f_i\cap f_j=0,\ 1\leqslant i,\ j\leqslant,\ i\neq j.$$

如果 $f_i\cap f_{n+1}=0$，$1\leqslant i\leqslant n$，则第 $n+1$ 的调整已经完成。否则，必定存在某 $1\leqslant i\leqslant n$，使 $f_i\cap f_{n+1}\neq 0$。无妨设 $f_1\cap f_{n+1}\neq 0$。此时也存在 $(\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_m)\neq 0$ 使 $f_1\cap f_{n+1}=\sum\limits_{i=1}^m\alpha_i f_i$。如果 $\alpha_1=\alpha_{n+1}=0$，则由假设，必定而且只能有 k：$n+2\leqslant k\leqslant m$，使 $\alpha_k\neq 0$。然后仿 (b) 对 f_1，f_{n+1} 进行调整。此时 f_k 被替换了，但 f_2，$\cdots$，f_n 保持不变。如果 $\alpha_1\neq 0$ 或 $\alpha_{n+1}=0$，则仿 (b) 对 f_1 和 f_{n+1} 进行调整，此时除 f_1，f_{n+1} 而外，其余元素均不变。因此，无论何种情况，我们都可以保持 f_2，$\cdots$，f_n 不动，而使调整到一组新的基，它满足 $f_1\cap f_{n+1}=0$。更进一步，在如上的调整中，我们所得到的基 $(f_1',\ f_2',\ \cdots,\ f_n',\ f_{n+1}',\ \cdots,\ f_m')$ 总满足

$$f_1'\leqslant f_1,\ f_2'=f_2,\ \cdots,\ f_n'=f_n,\ f_{n+1}'\leqslant f_{n+1}.$$

故这组基已满足

$$f_i'\cap f_j'=0,\ 1\leqslant i,\ j\leqslant n+1,\ i\neq j.$$

这样，第 $n+1$ 步的调整已告完成。最后，由于 m 是有限的，因此，我们可用有限步完成上述调整，得到所需的 $\mathscr{S}_\lambda$ 的一组基，记之为 $\{X_i^\lambda\}_1^m$。

(d) 由于 $\overline{X}_\lambda^i\in\mathscr{S}_\lambda$，因而由上面所证，存在 $(\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_m)$

$\neq 0$，使得$\overline{X}_\lambda=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i X_\lambda^i$，此处$\lambda$是固定的。由定理（8.3.11）和（8.3.12），我们可取序列$\{x_n^i\}_{n=1}^{\infty}\subset E$（$1\leqslant i\leqslant m$），使得

$$(8.4.5)\qquad X_\lambda^j(x_n^i)\to\begin{cases}1, & \text{如 } j=i,\\ 0, & \text{如 } j\neq i,\end{cases}\quad n\to\infty.$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\overline{X}_\lambda(x_n^i)=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{m}\alpha_j X_\lambda^j(x_n^i)=\alpha_i,\quad 1\leqslant i\leqslant m.$$

另一方面，

$$1\geqslant\lim_{n\to\infty}\overline{X}_\lambda(x_n^i)\geqslant\lim_{n\to\infty}X_\lambda^i(x_n^i)=1.$$

可见

$$\alpha_i=1,\quad 1\leqslant i\leqslant m.$$

(e) 在 (b) — (d) 的证明中，$\lambda>0$是固定的。现在，我们证明定理的结论对一切$\lambda>0$成立。事实上，对于固定的$\lambda_0>0$，我们已有基$\{X_{\lambda_0}^i\}_1^m$。记其标准映像为$\{X^i\}_1^m\subset\mathscr{S}\cap\overline{\mathscr{U}}$。我们作$\{X^i\}_1^m$的$\lambda$映像$\{X_\lambda^i\}_1^m$。那么，容易看出$\{X_\lambda^i\}_1^m$满足一切条件。 ▌

现在，已经不难给出表现定理。

(8.4.6) **定理** 设$\dim\mathscr{U}_\lambda=m<\infty$。则$P(\lambda)$是一个$B_q$过程当且仅当

$$(8.4.7)\qquad P(\lambda,x,A)=P^{\min}(\lambda,x,A)+\sum_{i=1}^{m}X_\lambda^i(x)\xi_\lambda^i(A)$$

$$\lambda>0,\ x\in E,\ A\in q,$$

此处$\xi_\lambda^i\in\mathscr{L}_+$（$1\leqslant i\leqslant m$）满足

(8.4.8) **预解条件**

$$\xi_\lambda^i(A)-\xi_\mu^i(A)=(\mu-\lambda)\int\xi_\lambda^i(dx)P(\mu,x,A)$$

$$\lambda,\mu>0,\ A\in\mathscr{E}$$

和

(8.4.9) 范条件

$$\lambda\xi_\lambda^i(E)\leqslant 1,\ \lambda>0.$$

$P(\lambda)$不断当且仅当 $q(x)-q(x,\cdot)$是保守的而且上式对于某（从而对一切）$\lambda>0$ 和一切 i 成立.

证 （a）设 $P(\lambda)$是 B_q 过程. 那么对每 $\lambda>0$ 和 $A\in\mathscr{E}$,

$$\lambda(P(\lambda,\cdot,A)-P^{\min}(\lambda,\cdot,A))\in\mathscr{U}_\lambda(1).$$

于是由定理（8.4.4）知，必定存在 $\xi_\lambda^i(A)$ $(1\leqslant i\leqslant m)$ 使(8.4.7)成立. 由（8.4.5）得

$$\xi_\lambda^i(A)=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^m X_\lambda^j(x_n^i)\xi_\lambda^j(A),$$

但

$$\begin{aligned}0&\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}P^{\min}(\lambda,x_n^i,A)\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}P^{\min}(\lambda,x_n^i,E)\\&\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}(1-z(\lambda,x_n^i))/\lambda\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}(1-\overline{X}_\lambda(x_n^i))/\lambda\\&=0,\end{aligned}$$

即

$$(8.4.10)\qquad \lim_{n\to\infty}P^{\min}(\lambda,x_n^i,A)=0,\ \lambda>0,\ A\in\mathscr{E}$$

从而

$$\xi_\lambda^i(A)=\lim_{n\to\infty}P(\lambda,x_n^i,A)$$
$$A\in\mathscr{E},\ \lambda>0,\ 1\leqslant i\leqslant m.$$

于是由定理（1.2.24）.（i）知 $\xi_n^i\in\mathscr{L}_+$, $\lambda>0$, $1\leqslant i\leqslant m$.

（b）利用 X_λ^i（$1\leqslant i\leqslant m$）的协调性和线性无关性易证 $P(\lambda)$满足预解条件当且仅当（8.4.8）成立. 利用(8.4.9)和(8.4.10)立知范条件等价于（8.4.9）.

（c）如果 q 对保守且（8.4.9）成立，则

$$\begin{aligned}\lambda P(\lambda)1&=\lambda P^{\min}(\lambda)1+\sum_{i=1}^m X_\lambda^i\\&=\lambda P^{\min}(\lambda)1+\overline{X}_\lambda=1,\end{aligned}$$

从而过程不断，反之，若 B_q 过程不断，则由第四章知 q 对必定保守。再用一次（8.4.9）和（8.4.10）立知

$$\lambda\xi_\lambda^i(E)=1,\ \lambda>0,\ 1\leqslant i\leqslant m. \quad \blacksquare$$

§8.5 补充与注记

Feller 边界理论是由 Feller[2]建立的。随即被应用于 Q 过程的构造论。见 Feller[3], Willams[1], 杨向群[1]及其所附的参考文献。郑小谷[3]把这一理论推广到抽象空间。

本章取材于 Feller[2]和郑[3]。§8.1—§8.3 是前者的直接推广。但定理（8.3.12）和§8.4 的主要定理（8.4.4）是属于后者的。

第九章 有限流出可配称q过程

本章中，我们将假定 $q(x)-q(x,\cdot)$ 是关于一个固定的 σ 有限测度 μ 的可配称 q 对，并且 $\dim \mathscr{U}_\lambda = m < \infty$. 我们将讨论关于这个 μ 和这个 q 对，可配称q 过程的构造、存在性和唯一性问题.

§9.1 预备知识

由定理（8.4.4）知，我们可以选取$\mathscr{S}_\lambda$的线性无关族 $\{X_\lambda^a: a=1, 2, \cdots, m\}$，使得 $X_\lambda^a(\lambda>0)$有相同的标准映像 X^a，$a=1, 2, \cdots, m$. 而且，如（8.4.5），我们可选取$\{x_n^a\}_{n=1}^\infty \subset E$，使得

$$(9.1.1)\qquad X_\lambda^b(x_n^a) \to \begin{cases} 1, & 如\ a=b \\ 0, & 如\ a\neq b \end{cases}, \quad n\to\infty,$$

本章中，我们将固定这一族$\{X_\lambda^a\}$和相应的序列$\{x_n^a\}_{n=1}^\infty$. 现在，为使用方便，我们将把所要用到的、由前两章得到的基本结果重述如次：

$$(9.1.2)\qquad 0\leqslant \overline{X} = \sum_{c=1}^m X^c \leqslant 1,$$

$$(9.1.3)\qquad 0\leqslant \overline{X}_\lambda = \sum_{c=1}^m X_\lambda^c \leqslant 1,$$

$$(9.1.4)\qquad X_\lambda^a = X^a - \lambda P^{\min}(\lambda) X^a,\ 1\leqslant a\leqslant m,$$

$$(9.1.5)\qquad X_\lambda^a - X_\mu^a = (\mu-\lambda) P^{\min}(\lambda) X_\mu^a, \\ = (\mu-\lambda) P^{\min}(\mu) X_\lambda^a,\ 1\leqslant a\leqslant m,$$

$$(9.1.6)\qquad X^0 = \lim_{\lambda\downarrow 0} \lambda P^{\min}(\lambda) 1,$$

(9.1.7) $X^0=\lambda P^{\min}(\lambda)X^0$,

(9.1.8) $\widetilde{X}_\lambda=P^{\min}(\lambda)d(\cdot)$

$$=\int P^{\min}(\lambda,\cdot,dy)[q(y)-q(y,E)],$$

(9.1.9) $\widetilde{X}=\lim_{\lambda\downarrow 0}\widetilde{X}_\lambda$,

(9.1.10) $\widetilde{X}_\lambda=\widetilde{X}-\lambda P^{\min}(\lambda)\widetilde{X}$,

(9.1.11) $\widetilde{X}_\lambda-\widetilde{X}_\mu=(\mu-\lambda)P^{\min}(\lambda)\widetilde{X}_\mu$,

$$=(\mu-\lambda)P^{\min}(\mu)\widetilde{X}_\lambda,$$

(9.1.12) $\overline{X}+X^0+\widetilde{X}=1$,

(9.1.13) $\overline{X}_\lambda+\widetilde{X}_\lambda=z(\lambda,\cdot)$。

命

$$J=\left\{a:\ \int X_\lambda^a(x)\mu(dx)<\infty\right\}$$

$$I=\{a\in J:\ \mu[x:\ X_\lambda^a(x)\neq 0]>0\}$$

相应于流出解 X_λ^a 的流入解是

(9.1.14) $\eta_\lambda^a=\int_\cdot \mu(dx)X_\lambda^a(x)$, $1\leqslant a\leqslant m$。

它的标准映像是

(9.1.15) $\eta^a=\int_\cdot \mu(dx)X^a(x)$, $1\leqslant a\leqslant m$。

我们有如下结果：

(9.1.16) I 和 J 与 $\lambda>0$ 无关；

(9.1.17) 如 $\sum_{a\in I} b_a X_\lambda^a \overset{\mu}{=} 0$，则 $b_a=0$，$a\in I$；

(9.1.18) $\{\eta_\lambda^a:\ a\in I\}$线性无关；

(9.1.19) $\eta_\lambda^a-\eta_\mu^a=(\mu-\lambda)\eta_\mu^a P^{\min}(\lambda)$

$$=(\mu-\lambda)\eta_\lambda^a P^{\min}(\mu),$$

$$\lambda,\ \mu>0,\ 1\leqslant a\leqslant m,$$

(9.1.20) $\eta_\lambda^a=\eta^a-\lambda\eta^a P^{\min}(\lambda)$,

(9.1.21) $\eta_\lambda^a \in \mathscr{V}_1$, $\lambda>0$.

这里，只有（9.1.17）是需要说明的. 为此，只需证明在 μ 零集外有（8.4.5）的分离性. 但如定理（8.3.12）的证明所示，若能证明 $X^a = s_A^a$，A 为典型的且 $\mu(A)>0$，则我们可从 A 中抽所需的序列. 这可由下述结果导出：

(9.1.22) **引理** 对于每 a $(1\leqslant a\leqslant m)$，$X_\lambda^a \stackrel{\mu}{=} 0$ 当且仅当对于 $X_\lambda^a = s_A^a$，其中 A 为典型的，有 $\mu(A)=0$.

证 如 $\mu(A)>0$，则 $\mu[X_\lambda^a \neq 0] = \mu[s_A^a \neq 0] \geqslant \mu(A)>0$. 反之，如 $\mu(A)=0$，则由可配称性

$$0\leqslant \int \mu(dx)\Pi(\lambda)\sigma_A(x)$$

$$= \int \mu(dx)\sigma_A(x)\int q(x,dy)/(\lambda+q(y))$$

$$\leqslant \int_A q(x,E)\mu(dx)/\lambda = 0,$$

因而由归纳法得

$$\Pi(\lambda)^n\sigma_A \stackrel{\mu}{=} 0,\quad n\geqslant 1,$$

命 $n\to\infty$，即得

$$X_\lambda^a = s_A^a \stackrel{\mu}{=} 0. \qquad \blacksquare$$

今定义

$$u_\lambda^{ab} = \lambda\int \eta_\lambda^a(dx)X^b(x),\quad \lambda>0,\quad a,b\in \mathbf{I},$$

$$\tau^a = \lambda\int \eta_\lambda^a(dx)X^0(x),\quad \lambda>0,\quad a\in \mathbf{I},$$

$$\Delta_\lambda^a = \lambda\int \eta_\lambda^a(dx)\widetilde{X}(x),\quad \lambda>0,\quad a\in \mathbf{I}.$$

则我们有

(9.1.23) $u_\lambda^{ab} = \lambda\eta_\lambda^a X^b = \lambda\eta^a X_\lambda^b = u_\lambda^{ba}$,

(9.1.24) $u_\lambda^{ab} - u_\mu^{ab} = (\lambda-\mu)\eta_\lambda^a X_\mu^b$,

(9.1.25) $u_\lambda^{ab} \uparrow u^{ab} \leqslant \infty$, $\lambda \uparrow \infty$,

(9.1.26) $\tau^a (1 \leqslant a \leqslant m)$ 与 $\lambda > 0$ 无关,

(9.1.27) $\Delta_\lambda^a - \Delta_\mu^a = (\lambda - \mu)\ \eta_\lambda^a \widetilde{X}_\mu$.

(9.1.28) $\Delta_\lambda^a \uparrow \Delta^a \leqslant \infty$, $\lambda \uparrow \infty$.

§9.2 可配称 B_q 过程的表达式

本节的目的是要导出有限流出可配称 B_q 过程的表达式. 我们将要证明: 在 μ 等价意义下, 除了由 X_λ^a 导出的 η_λ^a 而外, 其余的流入解不起作用, 直观上, 这是可配称性的直接推论.

由定理 (8.4.6) 知, 每一 B_q 过程必具形式:

$$\mathbf{P}(\lambda, x, A) = \mathbf{P}^{\min}(\lambda, x, A) + \sum_{a=1}^{m} X_\lambda^a(x) \xi_\lambda^a(A),$$

$$\lambda > 0, \ x \in E, \ A \in \mathscr{E}.$$

其中 ξ_λ^a 满足条件 (8.4.8) 和 (8.4.9). 我们先排除 J 外的边界点:

(9.2.1) 引理 若 $P(\lambda)$ 是一个可配称 B_q 过程, 则相应的

$$\xi_\lambda^a = 0, \ \lambda > 0, \ a \notin J.$$

证 由可配称性立知, 对于一切 $f, g \in {}_b\mathscr{E}_+$,

$$(9.2.2) \quad \int \mu(dx) f(x) (\mathbf{P}(\lambda) - \mathbf{P}^{\min}(\lambda)) g(x)$$

$$= \int \mu(dx) g(x) (\mathbf{P}(\lambda) - \mathbf{P}^{\min}(\lambda)) f(x).$$

取 $\{G_n\}_1^\infty \subset \mathscr{E}$ 使 $G_n \uparrow E$ 且 $\mu(G_n) < \infty$. 则由上式得

$$\infty > \sum_{a=1}^{m} \xi_\lambda^a(E) \int_{G_n} X_\lambda^a(x) \mu(dx)$$

$$= \sum_{a=1}^{m} \xi_\lambda^a(G_n) \int X_\lambda^a(x) \mu(dx).$$

可见

$$\xi_\lambda^a(G_n)=0,\ n\geqslant 1,\ \lambda>0,\ a\notin J,$$

这表明断言成立。 ▌

下面，我们延拓定义（7.2.4）．

（9.2.3）**定义** 称两个 q 过程 $P_1(\lambda)$ 和 $P_2(\lambda)$ 是 μ 等价的，如果存在 μ 零集 N，使得

$$P_1(\lambda,x,A)=P_2(\lambda,x,A),\ \lambda>0,\ A\in\mathscr{E},\ x\notin N.$$

为书写方便，对于 $(E,\mathscr{E})$ 上的函数（或常数）u_1，…，u_n，我们记

$$[u]_1^n=\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_n\end{pmatrix},\ [u]_1^{n*}=(u_1,\ \cdots,\ u_n)$$

并用 M 表示矩阵 (m^{ab})．不失一般性，可假定 $I=\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$，$n\leqslant m$．

（9.2.4）**引理** 在 μ 等价意义下，每一个有限流出可配称 B_q 过程可表成

$$P(\lambda,x,A)=P^{\min}(\lambda,x,A)+[X_\lambda(x)]_1^{n*}N_\lambda[\xi_\lambda(A)]_1^n$$
$$\lambda>0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E}.$$

此处 N_λ 为 $n\times n$ 矩阵而 $\{\xi_\lambda^a;\ \lambda>0\}$ $(1\leqslant a\leqslant n)$ 是协调族。

证 由引理（9.2.1），$P(\lambda)$ 必定形如

$$P(\lambda,x,A)=P^{\min}(\lambda,x,A)+\sum_{a\in J}X_\lambda^a(x)\xi_\lambda^a(A).$$

今命

$$\overline{P}(\lambda,x,A)=P^{\min}(\lambda,x,A)+\sum_{a\in I}X_\lambda^a(x)\xi_\lambda^a(A).$$

往证 $\overline{P}(\lambda)$ 也是一个可配称 B_q 过程而且 μ 等价于 $P(\lambda)$。为证前一项断言，先看

$$\begin{aligned}&\xi_\lambda^a(P(\mu)-\overline{P}(\mu))(A)\\ &=\sum_{b\in J-I}\int\xi_\lambda^a(dx)X_\mu^b(x)\xi_\mu^b(A)\\ &=\sum_{b\in J-I}\xi_\mu^b(A)\int\mu(dx)X_\lambda^a(dx)X_\mu^b(x)\end{aligned}$$

$= 0,$

$$\lambda,\mu>0,\ A\in\mathscr{E},\ a\in J.$$

由假设，ξ_λ^a ($a\in J$) 满足预解条件

$$\xi_\lambda^a-\xi_\mu^a=(\mu-\lambda)\int\xi_\lambda^a(dx)P(\mu,x,\cdot).$$

因而

$$\xi_\lambda^a-\xi_\mu^a=(\mu-\lambda)\int\xi_\lambda^a(dx)\overline{P}(\mu,x,\cdot).$$

这样，由定理 (8.4.6)，引理 (9.2.1) 及上述事实立知 $\overline{P}(\lambda)$ 也是一个 B_q 过程，μ 等价性来自如下事实：

$$X^a\overset{\mu}{=}0 \quad \text{当且仅当}\ X_\lambda^a\overset{\mu}{=}0.$$

从而

$$X^a\overset{\mu}{=}0,\quad a\in J-I,$$

进而

$$\mu(\bigcup_{a\in J-I}[x;\ X^a(x)\neq 0])=0.$$

其次，我们证明：我们可以选出协调族$\{\xi_\lambda^a;\ \lambda>0\}$，使 $\overline{P}(\lambda)$ 有所述的形式。注意预解条件可改写为

$$\sum_{b\in I}[\delta_{ab}+(\mu-\lambda)\int\xi_\lambda^a(dx)X_\mu^b(x)]\xi_\mu^b(A)$$
$$=\int\xi_\lambda^a(dx)R(\lambda,\mu;\ x,A),$$

此即

$$(9.2.5)\qquad \xi_\lambda^a(A)=\sum_{b\in I}[\delta_{ab}+(\mu-\lambda)\int\xi_\lambda^a(dx)X_\mu^b(x)]$$
$$\cdot\int\xi_\mu^b(dy)R(\mu,\lambda;\ x,A).$$

显然，若 $\lambda\leqslant\mu$，则

$$\int\xi_\mu^a(dy)R(\mu,\lambda;\ y,A)\geqslant\xi_\mu^a(A).$$

而若 $\lambda\geqslant\mu$，则

$$\int\xi_\mu^a(dy)R(\mu,\lambda;\ y,A)$$

$$=\xi_\mu^a(A)-(\lambda-\mu)\int\xi_\mu^a(dy)P^{\min}(\lambda,y,A)$$

$$\geqslant\xi_\mu^a(A)-(\lambda-\mu)\int\xi_\mu^a(dy)P(\lambda,y,A)=\xi_\lambda^a(A).$$

从而

$$\eta_{\lambda\mu}^{ab}\equiv\int\xi_\mu^a(dx)R(\mu,\lambda;\ x,\cdot)\geqslant 0,\ a\in I.$$

若记

$$n_{\lambda\mu}^{ab}\equiv\delta_{ab}+(\mu-\lambda)\int\xi_\lambda^a(dx)X_\mu^b(x),\ a,b\in I$$

并固定 $\mu=1$，则 (9.2.5) 成为

$$[\xi_\lambda(A)]_1^n=N(\lambda,1)[\eta_{\lambda 1}(A)]_1^n,\ A\in\mathscr{E},$$

此处 $N(\lambda,1)=(n_{\lambda 1}^{ab}:\ a,b\in I)$ 。显然 $\eta_{\lambda 1}^a$ ($a\in I$) 满足引理的条件。 ∎

最后，我们要证明：上述引理中的 ξ_λ^a ($a\in I$) 可用 η_λ^a($a\in I$) 表出。

(9.2.6) **定理** 在 μ 等价意义下，每一个有限流出可配称 B_q 过程可表成

$$P(\lambda,x,A)=P^{\min}(\lambda,x,A)+[X_\lambda(x)]_1^{n*}M_\lambda[\eta_\lambda(A)]_1^n$$
$$\lambda>0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E}.$$

此处 M_λ 是一个非负对称 $n\times n$ 矩阵。

证 由于上述引理中的所构造的$\{\xi_\lambda^a\}$ ($a\in I$) 和$\{\eta_\lambda^a\}$ ($a\in I$) 都满足方程

$$\begin{cases}\varphi_\mu=\varphi_\lambda M(\lambda,\mu),\\ \varphi_\lambda(E)<\infty,\ \lambda,\mu>0.\end{cases}$$

而此方程的解显然构造一个线性空间$\mathscr{L}$。记由 $\{\xi_\lambda^a,\ \eta_\lambda^a,\ a\in I\}$ 所张成的线性子空间为$\mathscr{L}_0$。由于$\{\eta_\lambda^a,\ a\in I\}$线性无关，故可扩张成$\mathscr{L}_0$的一组基$\{\eta_\lambda^a:\ a=1,\ 2,\ \cdots,\ p\}$，$p\leqslant 2n$。而且存在 $n\times p$ 矩

阵N_λ^1，使

$$[\xi_\lambda(A)]_1^n = N_\lambda^1[\eta_\lambda(A)]_1^p,\quad A\in\mathscr{E}.$$

置 $M_\lambda = N_\lambda N_\lambda^1$，则由引理（9.2.4）得

$$P(\lambda,x,A) = P^{\min}(\lambda,x,A) + [X_\lambda(x)]_1^{n*}M_\lambda[\eta_\lambda(A)]_1^p.$$

若记

$$\widetilde{\eta}_\lambda^1 = [\eta_\lambda]_1^n,\quad \widetilde{\eta}_\lambda^2 = [\eta_\lambda]_{n+1}^p,$$

$$M_\lambda^1 = \begin{pmatrix} m_\lambda^{11}\cdots m_\lambda^{1n} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ m_\lambda^{n1}\cdots m_\lambda^{nn}\end{pmatrix},\quad M_\lambda^2 = \begin{pmatrix} m_\lambda^{1,n+1}\cdots m_\lambda^{1,p} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ m_\lambda^{n,n+1}\cdots m_\lambda^{n,p}\end{pmatrix}.$$

则

$$P(\lambda,x,A) = P^{\min}(\lambda,x,A) + [X_\lambda(x)]_1^{n*}(M_\lambda^1, M_\lambda^2)\begin{pmatrix}\widetilde{\eta}_\lambda^1(A)\\ \widetilde{\eta}_\lambda^2(A)\end{pmatrix}.$$

从而

$$\int_B \mu(dx)[P(\lambda,x,A) - P^{\min}(\lambda,x,A)]$$

$$= (\widetilde{\eta}_\lambda^1(A))^*(M_\lambda^1,\ M_\lambda^2)\begin{pmatrix}\widetilde{\eta}_\lambda^1(A)\\ \widetilde{\eta}_\lambda^2(A)\end{pmatrix},\quad A,B\in\mathscr{E}.$$

由（9.2.2），我们得到

$$(\widetilde{\eta}_\lambda^1(A))^*(M_\lambda^1,\ M_\lambda^2)\begin{pmatrix}\widetilde{\eta}_\lambda^1(B)\\ \widetilde{\eta}_\lambda^2(B)\end{pmatrix}$$

$$= (\widetilde{\eta}_\lambda^1(B))^*(M_\lambda^1,\ M_\lambda^2)\begin{pmatrix}\widetilde{\eta}_\lambda^1(A)\\ \widetilde{\eta}_\lambda^2(A)\end{pmatrix},$$

但

$$(\widetilde{\eta}_\lambda^1(A))^*(M_\lambda^1,\ M_\lambda^2)\begin{pmatrix}\widetilde{\eta}_\lambda^1(B)\\ \widetilde{\eta}_\lambda^2(B)\end{pmatrix} =$$

$$((\widetilde{\eta_\lambda^1}(B))^*, (\widetilde{\eta_\lambda^2}(B))^*)\binom{M_\lambda^{1*}}{M_\lambda^{2*}}(\widetilde{\eta_\lambda^1}(A)).$$

由以上两式得

$$(\widetilde{\eta_\lambda^1}(B))^* M_\lambda^2 \widetilde{\eta_\lambda^2}(A) = [-(\widetilde{\eta_\lambda^1}(B))^* M_\lambda^1 + (\widetilde{\eta_\lambda^1}(B))^* M_\lambda^{1*} + (\widetilde{\eta_\lambda^2}(B))^* M_\lambda^{2*}]\widetilde{\eta_\lambda^1}(A), \quad A, B \in \mathscr{E}.$$

由于 $\{\eta_\lambda^a: a=1, 2, \cdots, p\}$ 是线性无关的，从而

$$(\widetilde{\eta_\lambda^1}(B))^* M_\lambda^2 = [0]_{n+1}^p, \quad B \in \mathscr{E},$$

又因 $\{\eta_\lambda^a: a=1, \cdots, n\}$ 是线性无关的，故

$$M_\lambda^2 = 0, \quad \lambda > 0.$$

这样，我们得到

$$P(\lambda, x, A) = P^{\min}(\lambda, x, A) + [X_\lambda(x)]_1^{n*} M_\lambda^1 \widetilde{\eta_\lambda^1}(A),$$

$$\lambda > 0, \quad x \in E, \quad A \in \mathscr{E},$$

现在，无妨分别用 M_λ 代替 M_λ^1，它是一个 $n\times n$ 矩阵．利用范条件得

$$\int_A \sum_{b\in I} m_\lambda^{ab} X_\lambda^b(x)\mu(dx) \geqslant 0, \quad A \in \mathscr{E},$$

即

$$\sum_{b\in I} m_\lambda^{ab} X_\lambda^b \geqslant 0, \quad \mu—a.e.$$

使用我们用于证明（9.1.17）的方法易证 M_λ 是一个非负矩阵．剩下的只需再证 M_λ 是对称的．记

$$\overline{M}_\lambda = M_\lambda - M_\lambda^*,$$

则由（9.2.2）得

$$(\eta_\lambda(B))_1^{n*} M_\lambda (\eta_\lambda(A))_1^n = (\eta_\lambda(A))_1^{n*} M_\lambda (\eta_\lambda(B))_1^n$$

$$= (\eta_\lambda(B))_1^{n*} M_\lambda^* (\eta_\lambda(A))_1^n,$$

即

$$(\eta_\lambda(B))_1^{n*} \overline{M}_\lambda (\eta_\lambda(A))_1^n = 0, \quad A, \quad B \in \mathscr{E}.$$

两次使用 $\{\eta_\lambda^a: a=1, \cdots, n\}$ 的线性无关性，便得

$$(\eta_\lambda(B))_1^{n*} \overline{M}_\lambda = [0]_1^{n*}, \quad B \in \mathscr{E},$$

$$\overline{M}_\lambda = 0.$$

故 $M_\lambda = M_\lambda^*$. ∎

在以下几节里，我们将就各种情形进一步刻画矩阵 M_λ. 从现在起，我们将使用如下记号

$$\xi_\lambda^a = \sum_{b\in I} m_\lambda^{ab} \eta_\lambda^b, \quad \lambda > 0, \quad a \in \mathbf{I}.$$

(9.2.7) **引理**

(i) $\sum_{b,c\in I} m_\lambda^{ab} u_\lambda^{bc} \leqslant 1, \quad \lambda > 0, \quad a \in \mathbf{I};$

(ii) $$\xi_\lambda^a = \sum_{c\in I} \left[[\delta_{ac} + (\mu - \lambda) \int \xi_\lambda^a(dx) X_\mu^c(x) \right] \cdot$$
$$\cdot \int \xi_\mu^c(dx) R(\mu, \lambda; x, \cdot)$$
$$a \in \mathrm{I}, \quad \lambda, \ \mu > 0;$$

(iii) $$m_\lambda^{ab} = \sum_{c\in I} \left[\delta_{ac} + (\mu - \lambda) \int \xi_\lambda^a(dx) X_\mu^c(x) \right] m_\mu^{cb}$$
$$= \sum_{c\in I} \left[\delta_{ac} + \sum_{d\in I} m_\lambda^{ad} (u_\mu^{dc} - u_\lambda^{dc}) \right] m_\mu^{cb}$$
$$\lambda, \ \mu > 0, \ a, \ b \in \mathrm{I}.$$

证 (*a*) 由

$$\sum_{b,c\in I} m_\lambda^{ab} u_\lambda^{bc} = \lambda \sum_{b,c\in I} m_\lambda^{ab} \int \eta_\lambda^b(dx) X^c(x)$$
$$\leqslant \lambda \sum_{b\in I} m_\lambda^{ab} \int \eta_\lambda^b(dx) \overline{X}(x) \leqslant \lambda \int \xi_\lambda^a(dx) \overline{X}(x)$$
$$\leqslant \lambda \xi_\lambda^a(E) \leqslant 1.$$

(*b*) 断言 (ii) 即是 (9.2.5)．那里的证明依然有效.

(*c*) 为证断言 (iii) 中的第一个等式. 注意由协调性和(ii)得

$$\sum_{b=1}^n m_\lambda^{ab} \eta_\lambda^b = \sum_{c=1}^n \left[\delta_{ac} + (\mu - \lambda) \int \xi_\lambda^a(dx) X_\mu^c(x) \right] \cdot$$

$$\sum_{d=1}^{n} m_{\mu}^{cd}\eta_{\lambda}^{d}$$

然后由$\{\eta_{\lambda}^{a}: a\in I\}$的线性无关性立得第一个等式.最后由(9.1.24)立得后一个等式. ▌

§9.3 不断可配称 B_q 过程的存在性判准

在进一步讨论可配称 B_q 过程的构造之前，本节先给出一个简单的判准. 这里的结果比定理（7.2.8）和 §7.5 的结果稍强些.

（9.3.1）**定理** 对于有限流出的 q 对，存在关于 μ 可配称的不断 B_q 过程的充要条件是

(i) q 对保守且关于 μ 可配称；

(ii) $I=J=\{1,2,\cdots,m\}$，等价地，对每 a $(1\leqslant a\leqslant m)$，

$$0<\int\mu(dx)X_{\lambda}^{a}(x)<\infty.$$

证 充分性可参考定理（7.2.8）的证明. 那里也证明了条件（i）是必要的. 如果 $n<m$，则

$$\lambda P(\lambda,x,E)=\lambda P^{\min}(\lambda,x,E)+\sum_{a=1}^{n}X_{\lambda}^{a}(x)\lambda\xi_{\lambda}^{a}(E)$$

$$\leqslant 1-\overline{X}_{\lambda}+\sum_{a=1}^{n}X_{\lambda}^{a}(x)=1-\sum_{a=n+1}^{m}X_{\lambda}^{a}(x)<1.$$

因此，条件（ii）也是必要的. ▌

§9.4 构 造

本节将构造出一切有限流出可配称 B_q 过程. 我们将先处理

$U=(u^{ab})<\infty$的较为简单的情形，而后研究一般情形的构造。

我们将始终固定一个σ有限的测度μ及关于μ可配称的q对$q(x)-q(x,\cdot)$。

(9.4.1) **定理** 设$\dim \mathscr{U}_\lambda=m<\infty$且$U<\infty$。任取一个非负对称矩阵$M$，并取$S=MU$。假定

(9.4.2) $S[1]_1^n+M[\tau]_1^n+M[\varDelta]_1^n\leqslant[1]_1^n,$

此处约定$0\cdot\infty=0$。再取

(9.4.3) $M_\lambda=(I-S+MU_\lambda)^{-1}M,$

并定义

(9.4.4) $$P(\lambda,x,A)=P^{\min}(\lambda,x,A)+[X_\lambda]_1^{n*}M_\lambda[\eta_\lambda]_1^n$$
$$\lambda>0,x\in E,A\in\mathscr{E}.$$

那么$P(\lambda)$是可配称B_q过程. $P(\lambda)$不断的充要条件是q对保守、$n=m$且(9.4.2)中的等号成立。此外,在μ等价意义下,每一个可配称B_q过程可用这种方式得到

证 (*a*) 先证：若M为对称非负矩阵，满足(9.4.2)，则$(I-S+MU_\lambda)^{-1}$存在且非负．注意对于每$a,b\in I$，u_λ^{ab}是否为0与$\lambda>0$无关．事实上，若对某$\lambda>0$，$u_\lambda^{ab}=0$，则$\mu[X_\lambda^a\neq0]=\mu[X^b\neq0]=0$，从而对于一切$\mu>0$，$\mu[X_\mu^b\neq0]=0$．然后由(9.1.24)立知$u_\mu^{ab}=0$，$\mu>0$。另一方面，如$MU_\lambda$的某一行和为零，则$MU$的同一行和也是零，从而$I-MU+MU_\lambda=I-S+MU_\lambda$的这一行和等于1而大于零．反之，如$MU_\lambda$的某一行和大于零，则由(9.4.2)知$I-S+MU_\lambda$的同一行和不小于$MU_\lambda$的这一行和而大于零.因此，$I-S+MU_\lambda$的任一行和总大于零．再则，$I-S+MU_\lambda$的非对角线元素总是非正的，故矩阵$I-S+MU_\lambda$有非负逆矩阵．

(*b*) 试证：M_λ是对称的当且仅当M是对称的．事实上，M_λ是对称的当且仅当

$$M^*-MUM^*+MU_\lambda M^*=M-MU^*M^*+MU_\lambda^*M^*,$$

于是由（9.1.23）立知断言成立。

（c）试证范条件等价于（9.4.2）．由（9.1.2）和（9.1.12）得

$$(9.4.5)\quad [1]_1^n \geqslant [\lambda\xi_\lambda(E)]_1^n$$
$$= M_\lambda[\lambda\eta_\lambda(\overline{X}+X^0+\widetilde{X})]_1^n$$
$$\geqslant M_\lambda U_\lambda[1]_1^n + M_\lambda[\tau]_1^n + M_\lambda[\varDelta_\lambda]_1^n,$$

即

$$M(U_\lambda[1]_1^n+[\tau]_1^n+[\varDelta_\lambda]_1^n)\leqslant(I-S+MU_\lambda)[1]_1^n$$

或

$$S[1]_1^n+M[\tau]_1^n+M[\varDelta^\lambda]_1^n\leqslant[1]_1^n,\ \lambda>0.$$

然后由（9.1.28）知，这等价于（9.4.2）．

（d）试证必要性．

由引理（9.2.7）．（iii）知，定理（9.2.6）的表达式中的 M_λ 是非负单调降的，记

$$M=\lim_{\lambda\to\infty}M_\lambda$$

M 和 M_λ 都是对称的 $n\times n$ 矩阵．由于 $U<\infty$，在（9.2.7）．（iii）的第二式中命 $\mu\to\infty$，得

$$M_\lambda=(I+M_\lambda(U-U_\lambda))M$$

或

$$M_\lambda(I-UM+U_\lambda M)=M,$$

由对称性得

$$(I-MU+MU_\lambda)M_\lambda=M,$$

于是，由所证的（a）立知 M_λ 必定形如（9.4.3）．

（e）充分性．为证所得到的 $P(\lambda)$ 是可配称 B_q 过程，只需再证 ξ_λ^i 满足预解条件（8.4.8）．为此，先证 M_λ 满足矩阵方程

$$(9.4.6)\quad M_\lambda-M_\mu=M_\lambda(U_\mu-U_\lambda)M_\mu.$$

事实上，

$$M_\lambda(U_\mu-U_\lambda)M_\mu$$

$$= (I - S + MU_\lambda)^{-1} M (U_\mu - U_\lambda)(I - S + MU_\mu)^{-1} M$$
$$= (I - S + MU_\lambda)^{-1}[(I - S + MU_\mu) - (I - S + MU_\lambda)]$$
$$\cdot (I - S + MU_\mu)^{-1} M$$
$$= (I - S + MU_\lambda)^{-1} M - (I - S + MU_\mu)^{-1} M$$
$$= M_\lambda - M_\mu.$$

此即是（9.4.6）其次，由 $\{\eta_\lambda^a : \lambda > 0\}$ 的协调性，得

$$(\mu - \lambda)\xi_\mu^a P(\mu)$$
$$= (\mu - \lambda)\xi_\lambda^a \left(P^{\min}(\mu) + \sum_{c=1}^{n} X_\mu^c \xi_\mu^c \right)$$
$$= (\mu - \lambda)\xi_\lambda^a P^{\min}(\mu) + \sum_{c=1}^{n} (\mu - \lambda)(\xi_\lambda^a X_\mu^c)\xi_\mu^c$$
$$= \sum_{t=1}^{n} M_\lambda^{at} \eta_\lambda^t (\mu - \lambda) P^{\min}(\mu) + \sum_{c=1}^{n} \sum_{b=1}^{n} M_\lambda^{ab} (U_\mu^{bc} - U_\lambda^{bc})$$
$$\cdot \sum_{t=1}^{n} M_\mu^{ct} \eta_\mu^t$$
$$= \sum_{t=1}^{n} M_\lambda^{at} (\eta_\lambda^t - \eta_\mu^t) + \sum_{t=1}^{n} (M_\lambda^{at} - M_\lambda^{at}) \eta_\mu^t$$
$$= \sum_{t=1}^{n} M_\lambda^{at} \eta_\lambda^t - \sum_{t=1}^{n} M_\mu^{at} \eta_\mu^t$$
$$= \xi_\lambda^a - \xi_\mu^a.$$

故条件（8.4.8）满足。

现在，我们讨论 U 可能含有无穷元时可配称 B_q 过程的构造问题。此时问题要复杂得多。显然，下面的定理也适用于 U 有限的情形，但它显得冗长，因此，我们已单独作了处理。

我们把每一个 X^a 对应于一个流出边界点 ω^a。这样，共有 m 个流出边界点。我们注意，如果可配称 B_q 过程

$$P(\lambda, x, A) = P^{\min}(\lambda, x, A) + \sum_{a=1}^{m} X_\lambda^a(x) \xi_\lambda^a(A)$$

中有某两个 ξ_λ^a 相等（此时称 $\{\xi_\lambda^a\}$ 是累赘的，否则称为非累赘的），例如 $\xi_\lambda^1=\xi_\lambda^2$，则我们可将 X_λ^1 和 X_λ^2 去掉，代之以 $X_\lambda^1+X_\lambda^2$，并取新的 ξ_λ^1 代替原来的 $\xi_\lambda^1=\xi_\lambda^2$，而将问题化成只有 $m-1$ 个边界点的情形，一般地，我们可将 $\omega^a(1\leqslant a\leqslant m)$ 合并成 $\widetilde{\omega}^a(a\in A)$，其个数 $|A|\leqslant m$，合并后的 X_λ^a $(a\in A)$ 仍然满足 §9.1 中的一切条件.

设 $\overline{A}\subset A$, $\overline{A}$ 中的元记作 $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \cdots$.

(9.4.7) **定理** 设 $\dim \mathscr{U}_\lambda=m<\infty$，$A$ 为 $\{\omega^a: a\in I\}$ 的任一不交划分. 任取 $\overline{A}\subset A$ 和 $A\times\overline{A}$ 上的非负矩阵 $G=(g^{a\overline{a}})$，使得

$$(9.4.8)\qquad g^{\overline{a}\overline{a}}=1,\ \overline{a}\in\overline{A};\quad \sum_{\overline{a}\in\overline{a}} g^{a\overline{a}}\leqslant 1,\ a\in A.$$

任取 $\overline{A}\times A$ 上的非负矩阵 $N=(n^{\overline{a}a})$，使

$$(9.4.9)\qquad \sum_{b\in A} n^{\overline{a}b}=1, \overline{a}\in\overline{A}.$$

再取 $\overline{A}\times A$ 上的一个有限矩阵 $S=(S^{\overline{a}a})$，使

$$(9.4.10)\qquad \infty>-s^{\overline{a}c}\geqslant\sum_{t\in A} n^{\overline{a}t}u^{tc},$$

$$c\neq\overline{a}\in\overline{A},\ c\in A.$$

$$(9.4.11)\qquad SG[1]_{\overline{A}}\geqslant N([\tau]_A+U([1]_A-G[1]_{\overline{A}})+[\Delta]_A)$$

$$(9.4.12)\qquad G((NU_\lambda+S)G)^{-1}N = N^*(G^*(U_\lambda N^*+S^*))^{-1}G^*,$$

此处 $0\cdot\infty=0$，而 $[u]_A$ 表示列向量 $(u^a: a\in A)$. 如果 U 的第 a 列元素都是有限的，则 (9.4.10) 式对于这个 a 和一切 $\overline{a}\in\overline{A}$, $\overline{a}\neq a$ 取等号. 最后，取

$$(9.4.13)\qquad M_\lambda=G((NU_\lambda+S)G)^{-1}N$$

那么，

$$(9.4.14)\qquad P(\lambda,x,A)\equiv P^{\min}(\lambda,x,A)+[X_\lambda]_A^* M_\lambda[\eta_\lambda]_A$$

是一个可配称 B_q 过程. 它是不断的当且仅当 q 对保守、$n=m$ 而且

$$(9.4.15)\quad \sum_{\bar{a}\in\bar{A}} g^{a\bar{a}}=1,\ a\in A;\ S[1]_A=N[\tau]_A$$

同时成立. 反之, 在 μ 等价意义下, 每一个可配称 B_q 过程可用这种方式得到.

证 (a) 必要性

设 $P(\lambda)$ 是可配称 B_q 过程. 不失一般性, 可设 $\{\xi_\lambda^a\}$ 是非累赘的. 我们证明: 必定存在 G, N 和 S 满足 (9.4.8) — (9.4.12).

由定理 (9.2.6), 每一个可配称 B_q 过程必定具有该定理所给的形式. 而且, 相应的 $\xi_\lambda^a(a\in A)$ 必定满足预解条件、范条件和 (9.2.7) 中的 (i) — (iii). 今固定 $\lambda>0$, 由于集 $\{0\}\cup\{\xi_\lambda^a: a\in A\}$ 的凸包是 l^1 空间中的紧凸集, 它的极点可以记作 $\{0\}\cup\{\xi_\lambda^{\bar{a}}\neq 0,\ \bar{a}\in\bar{A}\}$. 由 Krein-Milman 定理, 每一个 ξ_λ^a $(a\in A)$ 可以表成

$$(9.4.16)\quad \xi_\lambda^a=\sum_{\bar{a}\in\bar{A}} g^{a\bar{a}}\xi_\lambda^{\bar{a}},$$

此处

$$g^{a\bar{a}}\geqslant 0,\ g^{\bar{a}\bar{a}}=1,\ \sum_{\bar{a}\in\bar{A}} g^{a\bar{a}}\leqslant 1,\ a\in A,\ \bar{a}\in\bar{A}.$$

至此, 我们只证明了 (9.4.16) 对此固定的 $\lambda>0$ 成立, 然而, 在 (9.4.16) 的两边右乘 $(I+(\lambda-\mu)P^{\min}(\mu))$, 便知 (9.4.16) 对于一切 $\mu>0$ 成立.

令

$$(9.4.17)\quad n_\lambda^{\bar{a}b}=\frac{m_\lambda^{\bar{a}b}}{\sum_{b\in A} m_\lambda^{\bar{a}b}},\quad \bar{a}\in\bar{A},\ b\in A,\ \lambda>0.$$

由 $\xi_\lambda^{\bar{a}}\neq 0$ 易见 $\sum_{b\in A} m_\lambda^{\bar{a}b}\neq 0$, 从而上式有意义. 由上式知 $\sum_{b\in A} n_\lambda^{\bar{a}b}=1$.

利用对角线程序，可抽子列 $\lambda_n\to\infty$，使

$$0\leqslant n_{\lambda_n}^{\bar{a}b}\to n^{\bar{a}b},\ \sum_{b\in A}n^{\bar{a}b}=1.$$

根据引理（6.2.7）（iii），

$$m_\lambda^{\bar{a}b}=\sum_{c\in A}\left[\delta_{\bar{a}c}+\sum_{d\in A}m_\lambda^{\bar{a}d}(u_\mu^{\bar{a}d}-u_\lambda^{dc})\right]m_\mu^{cb}$$

$$=\sum_{c,d\in A}m_\lambda^{\bar{a}d}u_\mu^{dc}m_\mu^{cb}+\sum_{c\in A}\left[\delta_{\bar{a}c}-\sum_{d\in A}m_\lambda^{\bar{a}c}u_\lambda^{dc}\right]m_\mu^{cb}.$$

令

$$(9.4.18)\qquad s_\lambda^{\bar{a}c}=\frac{\delta_{\bar{a}c}-\sum\limits_{d\in A}m_\lambda^{\bar{a}d}u_\lambda^{dc}}{\sum\limits_{b\in A}m_\lambda^{\bar{a}b}},$$

$$\bar{a}\in\bar{A},\ c\in A.$$

则

$$n_\lambda^{\bar{a}b}=\sum_{c,d}n_\lambda^{\bar{a}d}u_\mu^{dc}m_\mu^{cb}+\sum_c s_\lambda^{\bar{a}c}m_\mu^{cb},$$

$$\bar{a}\in\bar{A},\ b\in A.$$

在 $\{\lambda_n\}_1^\infty$ 中抽子列（为了书写方便不妨仍记作 $\{\lambda_n\}$）$\{\lambda_n\}$，使得 S_λ 收敛于某极限 S. 往证 S 是有限的. 事实上，若存在 $\bar{a}\in\bar{A}$，使 $s^{\bar{a}\bar{a}}=0$，则由（9.2.7）.（i）得

$$0\leqslant -s^{\bar{a}c}=\lim_{\lambda_n\to\infty}\frac{\sum\limits_d m^{\bar{a}d}_{\lambda_n}u_{\lambda_n}^{dc}}{\sum\limits_b m_{\lambda_n}^{\bar{a}b}}$$

$$\leqslant\lim_{\lambda_n\to\infty}\frac{\sum\limits_{c\neq d}\sum\limits_d m^{\bar{a}d}_{\lambda_n}u_{\lambda_n}^{dc}}{\sum\limits_b m^{\bar{a}b}_{\lambda_n}}$$

$$\leqslant\lim_{\lambda_n\to\infty}\frac{\delta_{\bar{a}\bar{a}}-\sum\limits_d m_{\lambda_n}^{\bar{a}d}u_{\lambda_n}^{d}}{\sum\limits_b m^{\bar{a}b}_{\lambda_n}}$$

$$= S^{\bar{a}\bar{a}} = 0, \qquad c \in A,$$

若 $s^{\bar{a}\bar{a}} \neq 0$，则充分大的 λ_n，$s_{\lambda_n}^{\bar{a}\bar{a}} \neq 0$。对于这样的 λ，命

$$t_\lambda^{\bar{a}b} = -s_\lambda^{\bar{a}b}/s_\lambda^{\bar{a}\bar{a}}, \quad b \neq \bar{a}.$$

此时

$$\sum_{b \neq \bar{a}} t_\lambda^{\bar{a}b} = -\sum_{b \neq \bar{a}} s_\lambda^{\bar{a}b}/s_\lambda^{\bar{a}\bar{a}}$$

$$= \frac{\sum_{c \neq \bar{a}} \sum_t m_\lambda^{\bar{a}t} u_\lambda^{tc}}{\sum_b m_\lambda^{\bar{a}b}} \Bigg/ \frac{1 - \sum_t m_\lambda^{\bar{a}t} u_\lambda^{t\bar{a}}}{\sum_b m_\lambda^{\bar{a}b}}$$

$$\leqslant 1.$$

因此，我们可从子列 $\{\lambda_n\}$ 再抽子列 $\{\lambda_n''\}$，使

$$(9.4.19) \qquad t_{\lambda_n''}^{\bar{a}b} \to t^{\bar{a}b} \geqslant 0, \quad b \neq \bar{a}; \quad \sum_{b \neq \bar{a}} t^{\bar{a}b} \leqslant 1, \quad \bar{a} \in \bar{A}.$$

如果 $s^{\bar{a}\bar{a}} = \infty$，则在 (9.4.18) 的两边同除以 $s_{\lambda_n''}^{\bar{a}b}$（足够大的 λ_n''），固定 μ，再命 $\lambda_n'' \to \infty$，便得

$$\xi_\mu^{\bar{a}} = \sum_b m_\mu^{\bar{a}b} \eta_\mu^b = \sum_{c \neq \bar{a}} t^{\bar{a}c} \sum_b m_\mu^{cb} \eta_\mu^b$$

$$= \sum_{c \neq \bar{a}} t^{\bar{a}c} \xi_\mu^c = \sum_{c \neq \bar{a}} t^{\bar{a}c} \sum_{\bar{e}} g^{c\bar{e}} \xi_\mu^{\bar{e}}$$

$$= \sum_{\bar{e}} \left(\sum_{c \neq \bar{a}} t^{\bar{a}c} g^{c\bar{e}} \right) \xi_\mu^{\bar{e}}.$$

如果 $\sum_{c \neq \bar{a}} t^{\bar{a}c} g^{c\bar{a}} < 1$，则由上式得

$$\xi_\mu^{\bar{a}} = \sum_{\bar{e} \neq \bar{a}} \left[\left(\sum_{c \neq \bar{a}} t^{\bar{a}c} g^{c\bar{e}} \right) \Big/ \left(1 - \sum_{c \neq \bar{a}} t^{\bar{a}c} g^{c\bar{a}} \right) \right] \xi_\mu^{\bar{e}}.$$

但

$$\sum_{\bar{e} \neq \bar{a}} \left[\left(\sum_{c \neq \bar{a}} t^{\bar{a}c} g^{c\bar{e}} \right) \Big/ \left(1 - \sum_{c \neq \bar{a}} t^{\bar{a}c} g^{c\bar{a}} \right) \right] \leqslant 1,$$

这与 $\xi_\mu^{\bar{a}}$ 为极点相悖。我们已经证得

$$\sum_{c \neq \bar{a}} t^{\bar{a}c} g^{c\bar{a}} = 1.$$

由此及（9.4.19），我们看到 $g^{c\bar{a}}=1$ 对每 $c\neq\bar{a}$ 成立。进而，对一切 c，$g^{c\bar{a}}=1$。于是，对于每 $\bar{e}\neq\bar{a}$ 和 c，$g^{c\bar{e}}=0$。故

$$\xi_\lambda^{c}=\sum_{e} g^{c\bar{e}}\xi_\lambda^{\bar{e}}=\xi_\lambda^{a}.$$

这矛盾于 $\{\xi_\lambda^a: a\in A\}$ 非累赘的假设。至此，我们已经完全证明了 S 是有限的。

在（9.4.18）之后 N_λ 的表达式中，令 λ 沿 $\{\lambda_n''\}$ 趋于无穷，得

(9.4.20) $$N=(NU_\mu+S)M_\mu=(NU_\mu+S)G\,\overline{M}_\mu$$

此处 $\overline{M}$ 是 M 到 $\overline{A}\times A$ 上的限制。往证矩阵 $(NU_\mu+S)G$ 可逆。先证此矩阵的非对角线元素非正。事实上，由

$$\sum_c\left[\sum_t m_\lambda^{\bar{a}t}(u_\mu^{tc}-u_\lambda^{tc})+\delta_{\bar{a}\bar{c}}\right]g^{c\bar{e}}$$

$$=\sum_c\sum_t m_\lambda^{\bar{a}t}(u_\mu^{tc}-u_\lambda^{tc})g^{c\bar{e}}+g^{\bar{a}\bar{e}}$$

$$\leqslant 0,\quad \bar{a}\neq\bar{e},\ \mu\leqslant\lambda,$$

知

$$[(NU_\mu+S)G]^{\bar{a}\bar{e}}$$

$$=\lim_{\lambda_n''\to\infty}\sum_c\left(\sum_t n_\lambda^{\bar{a}t}u_\mu^{tc}+s_\lambda^{\bar{a}c}\right)g^{c\bar{e}}$$

$$=\lim_{\lambda_n''\to\infty}\left(\sum_b m_\lambda^{\bar{a}b}\right)^{-1}\left[\sum_t m_\lambda^{\bar{a}t}u_\mu^{tc}+\delta_{\bar{a}\bar{c}}-\sum_t m_\lambda^{\bar{a}t}u_\lambda^{tc}\right]g^{c\bar{e}}$$

$$\leqslant 0,\qquad \bar{a}\neq\bar{e}.$$

另一方面，（由（9.4.20），我们有

$$\sum_{\bar{e}}[(NU_\mu+S)G]^{\bar{a}\bar{e}}\mu\xi_\mu^{\bar{e}}(E)$$

$$=\sum_{\bar{e}}\left[(NU_\mu+S)G\right]^{\bar{a}\bar{e}}\mu\sum_t m_\mu^{\bar{e}t}\eta_\mu^t(E)$$

$$=\mu\sum_t n^{\bar{a}t}\eta_\mu^t(E)$$

注意

$$\mu\eta_\mu^t(E)>0,\ t\in A;\ \sum_t n^{\bar{a}t}=1,\ \bar{a}\in\bar{A}.$$

便知

$$\sum_{\bar{e}}[(NU_\mu+S)G]^{\bar{a}\bar{e}}\mu\xi_\mu^{\bar{e}}(E)>0.$$

这样，矩阵（$[(NU_\mu+S)G]^{\bar{a}\bar{e}}\mu\xi_\mu^{\bar{e}}$：$\bar{a}$，$\bar{e}\in\bar{A}$）有非负逆，从而矩阵（$NU_\mu+S)G$ 也有非负逆.

由（9.4.20）得

$$\bar{M}_\lambda=[(NU_\lambda+S)G]^{-1}N,$$

从而

$$M_\lambda=G\bar{M}_\lambda=G[(NU_\lambda+S)G]^{-1}N.$$

此即是（9.4.13）.

由（9.4.17）和（9.4.18）得，如果 $c\neq\bar{a}$，则

$$-\bar{s}_\lambda^{ac}=\sum_{d\in A}n_\lambda^{\bar{c}d}u_\lambda^{dc},$$

令 $\lambda_n''\to\infty$，我们得到

$$\infty>-s^{\bar{a}\bar{c}}\geqslant\sum_{d\in A}n^{\bar{a}\bar{d}}u^{dc}$$

此处"≥"是因为 $0\cdot\infty=0$. 如果 U 的第 c 列元素都有限，则上式的等号成立.

在定理（9.4.1）的证明（c）中，我们已经证明了范条件等价于

(9.4.21) $M_\lambda([\tau]_A+U_\lambda[1]_A+[\Delta_\lambda]_A)\leqslant[1]_A,\ \lambda>0.$

特别地，我们有

(9.4.22) $\bar{M}_\lambda([\tau]_A+U_\lambda[1]_A+[\Delta_\lambda]_A)\leqslant[1]_{\bar{A}},\lambda>0.$

反之，若（9.4.22）成立，在上式两边左乘 G，便得（9.4.21），从而范条件等价于（9.4.22）. 但这又等价于

$$[(NU_\lambda+S)G]^{-1}N([\tau]_A+U_\lambda[1]_A+[\Delta_\lambda]_A)\leqslant[1]_{\bar{A}}$$

或

$$N([\tau]_A + U_\lambda[1]_A + [\Delta_\lambda]_A) \leqslant (NU_\lambda + S)G[1]_{\overline{A}},$$

$$SG[1]_{\overline{A}} \geqslant N([\tau]_A + U_\lambda([1]_A - G[1]_{\overline{A}}) + [\Delta_\lambda]_A], \quad \lambda > 0.$$

令 $\lambda \to \infty$ 便知范条件等价于（9.4.11）.

至于不断性，我们可以假定 q 对保守且 $n=m$. 此时 $[\Delta]_1^m = [0]_1^m$. 因而 $P(\lambda)$ 不断当且仅当

$$(9.4.23) \qquad SG[1]_{\overline{A}} = N([\tau]_A + N_\lambda([1]_A - G[1]_{\overline{A}}))$$

现在，我们只需证明(9.4.15)等价于上式. 由定理(8.4.6)和(9.4.16)，我们看到（9.4.15）的第一式必须成立. 由此及上式知第二式也必须成立. 反之，若（9.4.15）成立，则显然上式也成立.

最后，M_λ 的对称性等价于 M 的对称性是明显的.

(b) 充分性

范条件和 M_λ 的对称性在 (a) 中已经证明. 故我们只需再证明在定理的条件下矩阵 $(NU_\lambda + S)G$ 可逆，并且 $P(\lambda)$ 满足预解条件.

由（9.4.10），我们有

$$-\sum_{c \neq \overline{e}} s^{\overline{a}c} g^{c\overline{e}} \geqslant \sum_{c \neq \overline{a}} \sum_{t \in A} n^{\overline{a}t} u^{tc} g^{c\overline{e}}.$$

注意 $g^{\overline{a}\overline{e}} = 0$ $(\overline{a} \neq \overline{e})$，我们得到

$$-\sum_{c} s^{\overline{a}c} g^{c\overline{e}} \geqslant \sum_{c,t} n^{\overline{a}t} u^{tc} g^{c\overline{e}}$$

$$\geqslant \sum_{c,t} n^{\overline{a}t} u_\lambda^{tc} g^{c\overline{e}}, \quad \overline{a} \neq \overline{e}.$$

这说明 $(NU_\lambda + S)G$ 的非对角线元素非正. 另一方面，由（9.4.11），（9.4.9）和 U_λ 的对角线元素是正的这一事实，我们得到

$$(NU_\lambda + S)G[1]_{\overline{A}} = NU_\lambda G[1]_{\overline{A}} + SG[1]_{\overline{A}}$$

$$\geqslant NU_\lambda G[1]_{\overline{A}} + N[\tau]_A + NU_\lambda([1]_A - G[1]_{\overline{A}}) =$$

$$=NU_\lambda[1]_A+N[v]_A\geqslant NU_\lambda[1]_A>0,$$

因而 $(NU_\lambda+S)G$ 是可逆的且逆矩阵非负.

由定理 (9.4.1) 的证明中可见，为证 $P(\lambda)$ 满足预解条件，只需证明 M_λ 满足 (9.4.6).

$$\begin{aligned}
&M_\lambda(U_\mu-U_\lambda)M_\mu\\
&=G[(NU_\lambda+S)G]^{-1}N(U_\mu-U_\lambda)G[(NU_\mu+S)G]^{-1}N\\
&=G[(NU_\lambda+S)G]^{-1}[(NU_\mu+S)G-\\
&\quad-(NU_\lambda+S)G][(NU_\mu+S)G]^{-1}N\\
&=G[(NU_\mu+S)G]^{-1}N-G[(NU_\mu+S)G]^{-1}N\\
&=M_\lambda-M_\mu. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

对于不断情形，上述定理可以叙述得更为简洁. 因为 $\sum_{\bar{a}\in\bar{A}}g^{a\bar{a}}=1$，$a\in A$，从而

$$\begin{aligned}
\sum_{a\in\bar{A}}X_\lambda^a\xi_\lambda^a&=\sum_{a\in A}X_\lambda^a\xi_\lambda^a+\sum_{\bar{a}\in\bar{A}}X_\lambda^{\bar{a}}\xi_\lambda^{\bar{a}}\\
&=\sum_{a\in A}X_\lambda^a\sum_{\bar{a}\in\bar{A}}g^{a\bar{a}}\xi_\lambda^{\bar{a}}+\sum_{\bar{a}\in\bar{A}}X_\lambda^{\bar{a}}\xi_\lambda^{\bar{a}}\\
&=\sum_{\bar{a}\in\bar{A}}\left[X_\lambda^{\bar{a}}+\sum_{a\in A}X_\lambda^a g^{a\bar{a}}\right]\xi_\lambda^{\bar{a}},
\end{aligned}$$

令

$$\widetilde{X}_\lambda^{\bar{a}}=X_\lambda^{\bar{a}}+\sum_{a\in A}X_\lambda^a g^{a\bar{a}},\quad \bar{a}\in\bar{A},$$

则 $\widetilde{X}_\lambda^{\bar{a}}$ $(\bar{a}\in\bar{A})$ 也满足本章开头所述的关于 X_λ^a 的条件. 另一方面，由

$$\xi_\lambda^a=\sum_{\bar{a}\in\bar{A}}g^{a\bar{a}}\xi_\lambda^{\bar{a}},\quad a\in A,$$

导出

$$m_\lambda^{ab}=\sum_{\bar{a}\in\bar{A}}g^{a\bar{a}}m_\lambda^{\bar{a}b},\quad a,b\in A,$$

再由 M_λ 的对称性得

$$m_\lambda^{ba}=\sum_{\bar a\in\bar A}g^{a\bar a}m_\lambda^{b\bar a},\quad a,b\in A.$$

于是

$$\begin{aligned}\xi_\lambda^{\bar a}&=\sum_{c\in A}m_\lambda^{\bar a c}\eta_\lambda^{c}\\&=\sum_{\bar a\in\bar A}m_\lambda^{\bar a\bar c}\eta_\lambda^{\bar a}+\sum_{c\in\bar A}m_\lambda^{\bar a c}\eta_\lambda^{c}\\&=\sum_{\bar c\in\bar A}m_\lambda^{\bar a\bar c}\eta_\lambda^{\bar a}+\sum_{c\in\bar A}\Big(\sum_{\bar a\in\bar A}g^{c\bar c}m_\lambda^{\bar a\bar c}\Big)\eta_\lambda^{c}\\&=\sum_{\bar c\in\bar A}m_\lambda^{\bar a\bar c}\Big[\eta_\lambda^{\bar c}+\sum_{c\in\bar A}g^{c\bar c}\eta_\lambda^{c}\Big].\end{aligned}$$

若命

$$\tilde\eta_\lambda^{\bar a}=\eta_\lambda^{\bar a}+\sum_{a\in\bar A}g^{a\bar a}\eta_\lambda^{a},\qquad \bar a\in\bar A,$$

则

$$\tilde\eta_\lambda^{\bar a}=\int_{\bullet}\mu(dx)\,\tilde X_\lambda^{\bar a}(x),\quad \bar a\in\bar A,$$

也满足我们的要求，并且 $P(\lambda)$ 可表成

$$P(\lambda,\ x,\ A)=P^{\min}(\lambda,x,A)+\sum_{\bar a,\bar b\in\bar A}m_\lambda^{\bar a\bar b}\tilde X_\lambda^{\bar a}(x)\tilde\eta_\lambda^{\bar b}(A).$$

而且

$$\tilde\xi_\lambda^{\bar a}=\xi_\lambda^{\bar a}=\sum_{\bar a\in\bar A}m_\lambda^{\bar a\bar c}\tilde\eta_\lambda^{\bar c}.$$

这就化成了 $A=\bar A$，且 G 为单位矩阵的情形。因此，不失一般性，可取 G 为单位矩阵。由此不难证明

(9.4.24) **定理** 设 $\dim\mathscr{U}_\lambda=m<\infty$，$\{\widetilde{\omega^a}:a\in A\}$ 是 $\{\omega^a:a=1,2,\cdots,m\}$ 的任一不交划分。任取 $A\times A$ 上的非负矩阵 $M==(m^{ab})$，使

(9.4.25) $\qquad\sum_{b\in A}m^{ab}=1,\ a\in A.$

任取 $A\times A$ 上的有限矩阵 $S=(s^{ab})$，使

(9.4.26) $\infty > -s^{ab} \geqslant \sum_{t\in A} m^{at} u^{tb}$, $a \neq b$,

(9.4.27) $S[1]_A = M[\tau]_A$,

(9.4.28) $MS^{*} = SM^{*}$,

此处 $0\cdot\infty = 0$，而且，若 U 的第 b 列的元素全都有限，则对于这个 b 和一切 a，(9.4.26) 式取等号. 最后，取

(9.4.29) $M_\lambda = (MU_\lambda + S)^{-1}M$,

那么，由上式所定义的 M_λ 和 (9.4.14) 所定义的 $P(\lambda)$ 是一个不断的可配称 B_q 过程. 反之，每一个不断的可配称 B_q 过程可用这种方式得到.

§9.5 唯一性：单流出或双流出情形

在本节和下一节里，我们将讨论不断的可配称 B_q 过程的唯一性问题. 本节讨论单流出或双流出情形，同时也为下一节研究一般的有限流出情形作准备.

由于定理 (9.3.1)，我们可以并将假定 q 对 $q(x) - q(x,\cdot)$ 保守，关于 $\mu \in \mathscr{L}_+$ 可配称，$\dim \mathscr{U}_\lambda = m < \infty$，并且

$$0 < \int \mu(dx) X_\lambda^a(x) < \infty \ , \ a = 1, 2, \cdots, m.$$

(9.5.1) **定理** 如 $m=1$，则在 μ 等价意义下，不断可配称 B_q 过程唯一. 它就是

(9.5.2) $P(\lambda, x, A) = P^{\min}(\lambda, x, A) + \overline{X}_\lambda(x)$
$$\times \int_A \mu(dx) \overline{X}_\lambda(x) \Big/ \left(\lambda \int \mu(dx) \overline{X}_\lambda(x)\right).$$

证 在定理 (9.4.24) 中取 A 为单点集. 我们看到 $M=(1)$，$s=\tau$；又

$$u_\lambda + \tau = \lambda \int \eta_\lambda(dx) \overline{X}(x) + \lambda \int \eta_\lambda(dx) X^0(x)$$

$$= \lambda \eta_\lambda(E) = \lambda \int \mu(dx) \overline{X_\lambda}(x),$$

可见

$$m_\lambda = (u_\lambda + \tau)^{-1} = \left(\lambda \int \mu(dx) \overline{X}_\lambda(x)\right)^{-1}. \qquad \blacksquare$$

(9.5.3) **引理** 设

$$P(\lambda, x, A) = P^{\min}(\lambda, x, A) + [X_\lambda(x)]_1^{m*} M_\lambda [\eta_\lambda(A)]_1^m,$$

$$\widetilde{P}(\lambda, x, A) = P^{\min}(\lambda, x, A) + [X_\lambda(x)]_1^{m*} \widetilde{M}_\lambda [\eta_\lambda(A)]_1^m$$

是两个可配称 B_q 过程，则 $P(\lambda) = \widetilde{P}(\lambda)$ 的充要条件是 $M_\lambda = \widetilde{M}_\lambda$.

证 充分性平凡. 往证必要性. 设 $P(\lambda) = \widetilde{P}(\lambda)$. 则

$$[X_\lambda(x)]_1^{m*} (M_\lambda - \widetilde{M}_\lambda) [\eta_\lambda(A)]_1^m$$

$$\lambda > 0, x \in E, A \in \mathscr{E}.$$

然后使用定理 (9.2.6) 证明的最后一部分立得

$$M_\lambda = \widetilde{M}_\lambda, \quad \lambda > 0.$$

(9.5.4) **定理** 设 $\dim \mathscr{U}_\lambda = 2$，那么，在 μ 等价意义下，或者只存在一个不断的可配称 B_q 过程，或者有无穷多个. 详言之

(i) 如果 $u^{11} = u^{12} (= u^{21}) = \infty$ 或者 $u^{22} = u^{12} (= u^{21}) = \infty$，则不断的可配称 B_q 过程唯一；

(ii) 在其余情况下，有无穷多个不断的可配称 B_q 过程.

证 (a) 由定理 (9.4.24) 知，在条件 (i) 之下，每一个不断的可配称 B_q 过程必定形如

$$P(\lambda, x, A) = P^{\min}(\lambda, x, A) + \overline{X}_\lambda(x) M_\lambda \int_A \mu(dx) \overline{X}_\lambda(x)$$

从而是唯一的.

(b) 此时有五种情况可能发生：

(1) $U < \infty$；

(2) $u^{11} = \infty$ 但 $u^{12} = u^{21} < \infty$ 且 $u^{22} < \infty$；

(3) $u^{22} = \infty$ 但 $u^{12} = u^{21} < \infty$ 且 $u^{11} < \infty$；

(4) $u^{11} = u^{22} = \infty$ 但 $u^{12} = u^{21} < \infty$；

(5)　$u^{12}=u^{21}=\infty$ 但 $u^{11}<\infty$ 且 $u^{22}<\infty$.

由于（2）和（3）是对称的，从而只需讨论（1）、（2）、（4）和（5）.

(1) $U<\infty$.

此时，我们有

$$\max\ \{u^{12}+u^{22}+\tau_2,\ u^{11}+u^{12}+\tau_1\}<\infty.$$

因而存在无穷多个 m 使得

$$0<m<(u^{12}+u^{22}+\tau_2+u^{11}+u^{12}+\tau_1)^{-1}.$$

任取其中之一，并命

$$m^{11}=\frac{1-m(u^{12}+u^{22}+\tau_2)}{u^{11}+u^{12}+\tau_1},$$

$$m^{22}=\frac{1-m(u^{11}+u^{12}+\tau_1)}{u^{12}+u^{22}+\tau_2},$$

$$M=\begin{pmatrix} m^{11} & m \\ m & m^{22}\end{pmatrix}.$$

容易验证 M 满足定理（9.4.1）的全部条件. 因而我们得到一个不断的可配称 B_q 过程. 使用引理（9.5.3）易证，对于不同的 m，相应的 M_λ 是不同的. 故我们构造出无穷多个不断的可配称 B_q 过程.

(2)　$u^{11}=\infty$，但 $u^{12}=u^{21}<\infty$，$u^{22}<\infty$.

取

$$-s^{21}>u^{12},$$

由假设，s^{21} 有无穷多种取法，再取

$$m^{11}=\frac{s^{21}-\tau_2-u^{22}}{2s^{21}+u^{12}-\tau_2-u^{22}},$$

$$m^{12}=1-m^{11},\ m^{21}=0,\ m^{22}=1,$$

$$-s^{12}=m^{11}u^{12}+m^{12}u^{22},$$

$$s^{11}=\tau_1-s^{12},\ s^{22}=\tau_2-s^{21}.$$

应用定理（9.4.24），不难得到我们的结论.

(4) $u^{11}=u^{22}=\infty$ 但 $u^{12}=u^{21}<\infty$。

取

$$M=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix},$$

$$-s^{12}=-s^{21}=s>u^{12}=u^{21},$$

$$s^{11}=\tau_1+s,\quad s^{22}=\tau_2+s。$$

然后应用定理（9.4.24）

(5) $u^{12}=u^{21}=\infty$ 但 $u^{11}<\infty$ 且 $u^{22}<\infty$。

取

$$M=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix},$$

$$-s^{12}=-s^{21}=s>\max\{u^{11},u^{22}\},$$

$$s^{11}=\tau_2+s,\quad s^{22}=\tau_1+s,$$

然后应用定理（9.4.24）。

（9.5.5）**推论** 设$\dim\mathscr{U}_s=m\geqslant 2$.如果存在两个$X_\lambda^1$和$X_\lambda^2$使得定理的条件(ii)满足,则存在无穷多个不断的可配称B_q过程。

§9.6 唯一性：一般情形

下面是不断的可配称 B_q 过程的唯一性准则。

（9.6.1）**定理** 设定理（9.3.1）的条件满足.则在 μ 等价意义下，不断的可配称 B_q 过程唯一当且仅当下述两条件同时成立：

(i) $m\leqslant 1$;

(ii) $m\geqslant 2$，但对于 $\{X_\lambda^a,\ a=1,2,\cdots,m\}$ 的任意划分

$$\widetilde{X}_\lambda^1=\sum_{l=1}^{n}X_\lambda^{k_l},\quad 1\leqslant k_1<\cdots<k_n\leqslant m,\ n<m$$

$$\widetilde{X}_\lambda^2=\widetilde{X}_\lambda-\widetilde{X}_\lambda^1$$

定义

$$\widetilde{u}_\lambda^{ab} = \lambda\int\mu(dx)\ \widetilde{X}_\lambda^a(x)\ \widetilde{X}^b(x), \quad a,b = 1,2.$$

$$\widetilde{U}_\lambda \uparrow \widetilde{U},\ \lambda\uparrow\infty,$$

都有 U 的某一行的元素全是无穷.

非唯一时，必定有无穷多个.

证 $m=0$ 的情形是平凡的.$m=1$ 时见定理（9.5.1）.以下设 $m\geqslant 2$.如条件(ii)不满足，那么，由推论（9.5.5）知，必定存在无穷多个.

反之，设 $m\geqslant 2$，且不断的可配称 B_q 过程非唯一，往证(ii)不真. $m=2$ 的情形见定理（9.5.4）.以下设 $m>2$. 我们已经知道，此时每一个可配称 B_q 过程形如

$$P(\lambda,x,A) = P^{\min}(\lambda,x,A) + [X_\lambda]_1^{m*}M_\lambda[\eta_\lambda]_1^m,$$

仍记

$$[\xi_\lambda]_1^m = M_\lambda[\eta_\lambda]_1^m.$$

无妨设 $\{\xi_\lambda^a\}$ 非累赘.否则只须变动一下记号而无损于后面的讨论.然后，由定理（9.4.7）的证明及 $P(\lambda)$ 不断的事实知，存在随机矩阵 $G=(g^{ab})$，使得 $\{\xi_\lambda^a\}$ 可通过它的极点表出. 即存在 $\{1,2,\cdots;m\}$ 的一个子集，无妨设 $\{1,2,\cdots,n\}$，$n\leqslant m$，使得

$$\xi_\lambda^a = \sum_{b=1}^n g^{ab}\xi_\lambda^b, \qquad a=1,2,\cdots,m,$$

其中

$$g^{ab}\geqslant 0,\ g^{aa}=1,\ a=1,2,\cdots,n,$$

$$\sum_{b=1}^n g^{ab} = 1, \qquad a=1,2,\cdots,m.$$

如果 $n=1$，则 $P(\lambda)$ 又可表成

$$P(\lambda,x,A) = P^{\min}(\lambda,x,A) + \overline{X}_\lambda(x)M_\lambda\int_A\mu(dx)\overline{X}_\lambda(x)$$

但这种形式的不断的 q 过程唯一，故由非唯一假定，可设 $n\geqslant 2$.

现在，由定理（9.4.24）之前的注解知，我们可命

$$\widetilde{X}_\lambda^a = X_\lambda^a + \sum_{b=n+1}^{n} X_\lambda^b g^{ba}, \qquad a=1,2,\cdots,n,$$

而将 $P(\lambda)$ 表成

$$P(\lambda, x, A) = P^{\min}(\lambda, x, A) + [\widetilde{X}_\lambda]_1^{n*}\widetilde{M}_\lambda[\widetilde{\eta}_\lambda]_1^n,$$

此时 $\widetilde{\xi}_\lambda^a$，$a=1,2,\cdots,n$ 都是极点。由 $\widetilde{X}_\lambda^a$ 产生矩阵 $\widetilde{U}=(\widetilde{u}^{ab}: a,b=1,2,\cdots,n)$。我们说，矩阵 $\widetilde{U}$ 的每一行、每一列至多只有一个无穷元。否则，例如说 $\widetilde{u}^{11}=\widetilde{u}^{12}=\infty$，则由（9.4.26）知，矩阵 $\widetilde{M}$ 的第一列元素全为零。再由（9.4.29）知，矩阵 $\widetilde{M}_\lambda$ 的第一行、第一列元素也全是零。故由定理（9.3.1）的证明可见 $P(\lambda)$ 中断。是为矛盾。

先假定 $\widetilde{U}$ 有无穷元存在。无妨设在第一行有无穷元。分两种情况：

(a) $\widetilde{u}^{11}=\infty$。

此时由上段的讨论知

$$\widetilde{u}^{1b}<\infty, \quad b=2,3,\cdots,n$$

从而

$$\sum_{b=2}^{n}\widetilde{u}^{1b}<\infty.$$

命

$$\underset{\sim}{X}_\lambda^1 = X_\lambda^1 + \sum_{\substack{m\geqslant c\geqslant n+1\\ g^{c1}=1}} X_\lambda^c,$$

$$\underset{\sim}{X}_\lambda^2 = \sum_{b=a}^{n} X_\lambda^b + \sum_{\substack{m\geqslant d\geqslant n+1\\ g^{d1}<1}} X_\lambda^d$$

$$= \overline{X}_\lambda - \underset{\sim}{X}_\lambda^1$$

则由

$$\sum_{b=2}^{n}\widetilde{u}_\lambda^{1b} = \lambda\sum_{b=2}^{n}\left[\eta_\lambda^1 + \sum_{c=n+1}^{m} g^{c1}\eta_\lambda^c\right]\left[X^b + \sum_{d=n+1}^{m} X^d g^{db}\right]$$

$$= \sum_{b=2}^{n} u_\lambda^{1b} + \sum_{c=n+1}^{m} g^{c1} \sum_{b=2}^{n} u_\lambda^{cb} + \sum_{d=n+1}^{m} u_\lambda^{1d}(1 - g^{d1})$$

$$+ \sum_{c=n+1}^{m} g^{c1} \sum_{d=n+1}^{m} u_\lambda^{cd}(1 - g^{d1})$$

$$\uparrow \sum_{b=2}^{n} \tilde{u}^{1b} < \infty, \quad \lambda \uparrow \infty.$$

易见

$$\sum_{b=2}^{n} u^{1b} < \infty, \qquad \sum_{\substack{m \geq c \geq n+1 \\ g^{c1}=1}} \sum_{b=2}^{n} u^{cb} < \infty,$$

$$\sum_{\substack{m \geq d \geq n+1 \\ g^{d1}<1}} u^{1d} < \infty,$$

$$\sum_{\substack{m \geq c \geq n+1 \\ g^{c1}=1}} \sum_{\substack{m \geq d \geq n+1 \\ g^{d1}>1}} u^{cd} < \infty.$$

从而

$$\underset{\sim}{u}^{21} = \underset{\sim}{u}^{12} = \lim_{\lambda\to\infty}\left(\sum_{b=2}^{n} u_\lambda^{1b} + \sum_{\substack{m \geq c \geq n+1 \\ g^{c1}=1}} \sum_{b=2}^{n} u_\lambda^{cb}\right.$$

$$\left. + \sum_{\substack{m \geq d \geq n+1 \\ g^{d1}<1}} u_\lambda^{1d} + \sum_{\substack{m \geq c \geq n+1 \\ g^{c1}=1}} \sum_{\substack{m \geq d \geq n+1 \\ g^{d1}<1}} u_\lambda^{cd}\right) < \infty.$$

这样，我们已选到 $\tilde{X}_\lambda^1$ 和 $\tilde{X}_\lambda^2$，使得 $\underset{\sim}{U}$ 的每行、每列至多有一个无穷元，故此时(ii)不成立。

(*b*) $\tilde{u}^{1k} = \infty$，$k \neq 1$。无妨设 $k = 2$，则

$$\tilde{u}^{1b} < \infty, \quad b = 1, 3, 4, \cdots, n$$

由对称性，$\tilde{u}^{21} = \infty$，从而

$$\tilde{u}^{2b} < \infty, \qquad b = 2, 3, \cdots, n.$$

进而

$$\sum_{a=1}^{2} \sum_{b=3}^{n} \tilde{u}^{ab} < \infty.$$

命

$$\underset{\sim}{X}_\lambda^1 = X_\lambda^1 + X_\lambda^2 + \sum_{\substack{m\geq c\geq n+1\\ g^{c1}+g^{c2}=1}} X_\lambda^c$$

$$\underset{\sim}{X}_\lambda^2 = \sum_{b=3}^{n} X_\lambda^b + \sum_{\substack{m\geq d\geq n+1\\ g^{d1}+g^{d2}<1}} X_\lambda^d = \overline{X}_\lambda - \underset{\sim}{X}_\lambda^1,$$

则由

$$\begin{aligned}\sum_{a=1}^{2}\sum_{b=3}^{n}\widetilde{u}_\lambda^{ab} &= \sum_{a=1}^{2}\sum_{b=3}^{n} u_\lambda^{ab} + \sum_{c=n+1}^{m}(g^{c1}+g^{c2})\sum_{b=3}^{n} u_\lambda^{cb}\\ &+ \sum_{a=1}^{2}\sum_{d=n+1}^{m} u_\lambda^{ad}(1-g^{d1}-g^{d2})\\ &+ \sum_{c=n+1}^{m}(g^{c1}+g^{c2})\sum_{d=n+1}^{m} u_\lambda^{cb}(1-g^{d1}-g^{d2})\\ &\uparrow \sum_{a=1}^{2}\sum_{b=3}^{n}\widetilde{u}^{ab}<\infty,\ \lambda\uparrow\infty\end{aligned}$$

易见

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{u}^{21} = \underset{\sim}{u}^{12} = \lim_{\lambda\to\infty}\Bigg(&\sum_{a=1}^{2}\sum_{b=3}^{n} u_\lambda^{ab} + \sum_{\substack{m\geq c\geq 1+1\\ g^{c1}+g^{c2}=1}}\sum_{b=3}^{n} u_\lambda^{cb}\\ &+\sum_{a=1}^{2}\sum_{\substack{m\geq d\geq n+1\\ g^{d1}+g^{d2}<1}} u_\lambda^{ad} + \sum_{\substack{m\geq c\geq n+1\\ g^{c1}+g^{c2}=1}}\sum_{\substack{m\geq d\geq n+1\\ g^{d1}+g^{d2}<1}} u_\lambda^{cd}\Bigg)<\infty.\end{aligned}$$

故此时 (ii) 不成立。

最后，如果 U 有限，则更易处理。特别，可同情况 (a) 一样选 $\underset{\sim}{X}_\lambda^1$ 和 $\underset{\sim}{X}_\lambda^2$。(ii) 也不成立。 ▮

§9.7 补充与注记

在侯振挺等（见钱、侯等[1]）研究了可配称生灭过程、单流出过程的基础上，笔者[3]研究了保守有限流出可配称 Q 过程。

一般有限流出 Q 过程的构造早已由 Williams [1]完成. 但在他们的构造中，流入解作了调整，因而并不能直接用于我们的情况. 之后，陈安岳[1]研究了有限流出、有限非保守的可配称Q过程. 由前两章的讨论可见，非保守点可合并成流出解（这种想法主要来自杨向群[1]），因此新的困难主要在于 q 条件，本章只限于 B_q 过程，因而非保守部分本质上不起作用. 郑小谷[1]把这些结果推广到抽象空间.

本章主要取材于笔者[3]和郑[1].

不断的可配称 q 过程的一般的唯一性是至今尚未解决的重要问题. 从定理（9.6.1）已经看到，这个问题依赖于可配称 q 过程的流出边界的组合情况. 如果能够证明（9.6.1）的条件(ii)（当 $m\geqslant 2$时）必定不会发生，则问题便可完满地解决. 但即便对于双流出情形，也还属未知. 从这个角度来看，也许可以说可配称不断 q 过程比起一般的不断 q 过程复杂. 有趣的是，虽然 Williams [2]解决了全瞬时情形的 Q 过程的存在性问题，但他却未能解决全瞬时可配称 Q 过程的存在性（见Williams [2,3]）.

第十章　粒子系统的可逆性

在前三章里，我们已经研究了关于一个给定的配称测度，可配称 q 过程的存在性、唯一性及构造问题。自然要问，对于给定的 q 对，如何寻找配称测度？本章的目的之一就是讨论这个问题，即引进场论的工具。然后，我们将应用这一工具研究两种基本的粒子系统——自旋变相过程和排它过程的可逆性问题以及可逆测度（即 Gibbs 态）的构造。

§10.1　场　论

设 E 是任一非空集，T 是一指标集。再设 a：$T\times E\times E\longrightarrow \overline{R}=[-\infty,+\infty]$ 满足

(10.1.1) **基本假设**

(i) 对每 $t\in T$ 和 $x,\tilde{x}\in E$，$x\neq\tilde{x}$，有

$$\infty>a(t,x,\tilde{x})\geqslant 0;$$

(ii) $a(t,x,\tilde{x})=0$ 等价于 $a(t,\tilde{x},x)=0$。

(10.1.2) **定义**　给定 $x,\tilde{x}\in E,x\neq\tilde{x}$。称在时刻 t，x 直达 $\tilde{x}$，如果 $a(t,x,\tilde{x})>0$；记作 $x\overset{t}{\longrightarrow}\tilde{x}$。称在时刻 t，x 可达 $\tilde{x}$，如果存在 E 中的 $x^{(1)},x^{(2)},\cdots,x^{(n)}$，使得

$$x\overset{t}{\longrightarrow}x^{(1)}\overset{t}{\longrightarrow}x^{(2)}\overset{t}{\longrightarrow}\cdots\overset{t}{\longrightarrow}x^{(n)}\overset{t}{\longrightarrow}\tilde{x}$$

并记作 $x\overset{t}{\leadsto}\tilde{x}$。此时，称

$$L(t)=(x,x^{(1)},\cdots,x^{(n)},\tilde{x})$$

是在时刻 t 从 x 到 $\tilde{x}$ 的一条路。

记

$$\mathscr{A}(t)=\{a(t,x,\widetilde{x}):\ x,\widetilde{x}\in E\},\quad t\in T$$

用 $\mathscr{L}(t)$ 表示在时刻 t，$\mathscr{A}(t)$ 的路的全体。由基本假设立知：

$$x\xrightarrow{t}\widetilde{x}\Longleftrightarrow\widetilde{x}\xrightarrow{t}x;$$

$$x\overset{t}{\rightsquigarrow}\widetilde{x}\Longleftrightarrow\widetilde{x}\overset{t}{\rightsquigarrow}x.$$

今定义

$$(10.1.3)\quad \varphi(t,x,\widetilde{x})=\log a(t,\widetilde{x},x)-\log a(t,x,\widetilde{x})\qquad \text{如 } x\xrightarrow{t}\widetilde{x};$$

及

$$(10.1.4)\quad \varphi(L(t))=\sum_{k=0}^{n}\varphi(t,x^{(k)},x^{(k+1)}),$$

$$\text{如}L(t)=(x=x^{(0)},x^{(1)},\cdots,x^{(n+1)}=\widetilde{x})\in\mathscr{L}(t).$$

再记 $\mathscr{S}(t)=\{\varphi(t,x,\widetilde{x}):\ x,\widetilde{x}\in E\}$，此处当 x 不能在时刻直达 $\widetilde{x}$ 时，$\varphi(t,x,\widetilde{x})$ 是不定元。

(10.1.5) **定义** 称四元组$(E,\mathscr{A}(t),\mathscr{L}(t),\mathscr{S}(t))$ $(t\in T)$ 为一个场。以后也简称 $\mathscr{A}(t)$ $(t\in T)$ 为场。称$\varphi(L(t))$为场$\mathscr{A}(t)$沿路 $L(t)$所做的功。

称场 $\mathscr{A}(t)$为一个势场（也称 $\mathscr{A}(t)$有势），如果存在 $T\times E$ 上的实值函数 v，使得

$$(10.1.6)\quad \varphi(t,x,\widetilde{x})=v(t,\widetilde{x})-v(t,x),\qquad \text{凡 } x\xrightarrow{t}\widetilde{x}.$$

即场 $\mathscr{A}(t)$沿路 $x\xrightarrow{t}\widetilde{x}$ 所做的功$\varphi(t,x,\widetilde{x})$等于在 x 和 $\widetilde{x}$ 的势之差。此时，称 $V(t)=\{v(t,x):\ x\in E\}$ $(t\in T)$ 为势场 $\mathscr{A}(t)$ 的势函数。

古典势场的基本特征是路径无关性。称$\mathscr{A}(t)$是路径无关的，如果对每一闭路 $L(t)$（即 $x^{(0)}=x^{(n+1)}$），我们有 $\varphi(L(t))=0$。

为了给出势场的判准，我们还需引进若干记号。任意固定 $t\in T$，定义如下关系“$\overset{t}{\sim}$”：

(10.1.7) 对每 $x,\widetilde{x}\in E$，$x\overset{t}{\sim}\widetilde{x}$当且仅当

$$x\overset{t}{\rightsquigarrow}\widetilde{x}\ \text{或者}\ x=\widetilde{x}.$$

容易看出，这是一个等价关系。这样，我们可将E划分成若干等价类$\{E_l(t): l\in D(t)\}$。对每$l\in D(t)$，任取参考点$\Delta_l=\Delta_l(t)\in E_l(t)$。然后，对每$x\in E_l(t), x\neq\Delta_l$，任取一参考路径

$$L(t,\Delta_l,x)=(\Delta_l,x^{(1)},\cdots,x^{(k)},x)$$

并置

$$(10.1.8)\begin{cases}\hat{a}(t,\Delta_l,x)=a(t,\Delta_l,x^{(1)})a(t,x^{(1)},x^{(2)})\cdots a(t,x^{(k)},x).\\ \hat{a}(t,x,\Delta_l)=a(t,x,x^{(k)})a(t,x^{(k)},x^{(k-1)})\cdots a(t,x^{(1)},x).\end{cases}$$

从现在起，我们将固定这些$\Delta_l(l\in D(t))$和$L(t,\Delta_l,x)$。

下述概念是我们的原始目的。

(10.1.9) **定义** 称$\mathscr{A}(t)$是可配称的，如果存在实函数族$U(t)=\{u(t,x): x\in E\}$ $(t\in T)$使得

(10.1.10) 对任何$t>0$和$x\in E$, $u(t,x)>0$;

$$(10.1.11)\quad u(t,x)a(t,x,\tilde{x})=u(t,\tilde{x})a(t,\tilde{x},x),\quad t\in T,\ x,\tilde{x}\in E.$$

此时称$U(t)$为$\mathscr{A}(t)$的配称函数。

至此，我们已经完成了必要的准备。下面是场论的基本定理。

(10.1.12) **定理** 下述各项断言等价：

(i) $\mathscr{A}(t)$是势场；

(ii) $\mathscr{A}(t)$是路径无关的；

(iii) $\mathscr{A}(t)$是可配的；

(iv) 对每$t\in T$,, $l\in D(t)$和$x,\tilde{x}\in E_l(t)$，我们有

$$(10.1.13)\quad \hat{a}(t,\Delta_l,x)a(t,x,\tilde{x})\hat{a}(t,\tilde{x},\Delta_l)=\hat{a}(t,\Delta_l,\tilde{x})a(t,\tilde{x},x)\hat{a}(t,x,\Delta_l).$$

如果上述(i)——(iv)之一成立，则λ: $T\times E\longrightarrow\mathbf{R}$

$$(10.1.14)\quad \lambda(t,x)=\begin{cases}1, & 如\ x=\Delta_l\\ \dfrac{\hat{a}(t,\Delta_l,x)}{\hat{a}(t,x,\Delta_l)}, & 如\ x\neq\Delta_l,\end{cases}\quad t\in T, x\in E_l(t)$$

便是一个配称函数，而且$-\log\lambda$就是$\mathscr{A}(t)$的势（函数）。进而，

如果 λ' 是另一个配称函数，则对每一个 $l\in D(t)$，存在 $a_l(t)>0$，使

$$\lambda'(t,x)=a_l(t)\lambda(t,x),\qquad x\in E_l(t).$$

最后，$\mathscr{A}(t)$ 是一个势场当且仅当：对每 $l\in D(t)$，$\mathscr{A}(t)$ 在 $E_l(t)$ 上的限制是一个势场。

证 (i)$\Longrightarrow$(ii)。设 V 是 $\mathscr{A}(t)$ 的一个势而

$$L(t)=(x=x^{(0)},x^{(1)},\cdots,x^{(n+1)}=x)$$

为任一闭路，则

$$\varphi(L(t))=\sum_{k=0}^{n}\varphi(t,x^{(k)},x^{(k+1)})$$

$$=\sum_{k=0}^{n}[v(t,x^{(k+1)})-v(t,x^{(k)})]$$

$$=v(t,x^{(n+1)})-v(t,x^{(0)})=0.$$

(ii)$\Longrightarrow$(iv) 如 $x \overset{t}{\not\rightarrow} \tilde{x}$，即在时刻 t，x 不能直达 $\tilde{x}$，则 (10.1.13) 是平凡的。今假定 $x\overset{t}{\longrightarrow}\tilde{x}$。对于我们已选定的路径 $L(t,\Delta_l,x)$ 和 $L(t,\Delta_l,\tilde{x})$，由条件(ii)得

$$\varphi(L(t,\Delta_l,x))+\varphi(t,x,\tilde{x})=\varphi(L(t,\Delta_l,\tilde{x})).$$

因而由 (10.1.3)，(10.1.4) 和 (10.1.8) 得

$$\log\left[\frac{\hat{a}(t,\Delta_l,x)}{\hat{a}(t,x,\Delta_l)}\cdot\frac{a(t,x,\tilde{x})}{a(t,\tilde{x},x)}\cdot\frac{\hat{a}(t,\tilde{x},\Delta_l)}{\hat{a}(t,\Delta_l,\tilde{x})}\right]=0.$$

此即是 (10.1.13)。

(iv)$\Longrightarrow$(iii) 注意当 x，$\tilde{x}$ 不属于同一个 $E_l(t)$ 时，

$$a(t,x,\tilde{x})=a(t,\tilde{x},x)=0.$$

由此事实和 (10.1.13)，(10.1.14) 即知 λ 是 $\mathscr{A}(t)$ 的配称函数

(iii)$\Longrightarrow$(i) 设 $(u(t,x))$ 是任一配称函数。取

$$v(t,x)=-\log u(t,x),\quad t\in T,\ x\in E,$$

则由 (10.1.11) 立得 (10.1.6)。

至此，我们已证明定理的主要部分。余下部分是容易的。】

(10.1.15) **定义** 称势场$\mathscr{A}(t)$是保守场，如果$\mathscr{A}(t)$有与t无关的势.称这种势函数为保守势.

容易证明

(10.1.16) **定理** 如果$\mathscr{L}(t)$与$t\in T$无关并且$\mathscr{A}(t)$是一个保守场，则每一个保守势必定形如

$$v(x) = -\log \lambda(t_0, x) + c_l(x),\ x\in E_l,\ l\in D.$$

其中c_l为E_l上的任一函数，t_0为任一固定的T中元.

(10.1.17) **定义和记号**

设S为任一非空集，$\mathscr{S}$表S的子集的全体，$\mathscr{S}_f$表S的有限子集的全体.对每$u\in S$,设E_u是非空集,并记$E=\prod\limits_{u\in S}E_u$.如基本假设(10.1.1)成立，那么我们可以定义一个场$(E, \mathscr{A}(t), \mathscr{L}(t), \mathscr{S}(t))$.称之为积场.

称积场$\mathscr{A}(t)$具有局部特征，如果对一切$t\in T$，只要$x\xrightarrow{t}\widetilde{x}$，就有

(10.1.18) $\{u\in S:\ x(u)\neq\widetilde{x}(u)\}\subset\mathscr{S}_f$.

今设$\Lambda\in\mathscr{S}_f$，$z\in\prod\limits_{u\in S\setminus\Lambda}E_u$.以

$$\mathscr{A}_\Lambda^z(t)=\{a(t,x,\widetilde{x}):x,\ \widetilde{x}\in\prod_{u\in\Lambda}E_u\times\{z\}\}$$

表场$\mathscr{A}(t)$在$\prod\limits_{u\in\Lambda}E_u\times\{z\}$上的限制.类似地可定义$\mathscr{L}_\Lambda^z(t)$和$\mathscr{S}_\Lambda^z(t)$.称场$(\prod\limits_{u\in\Lambda}E_u\times\{z\}, \mathscr{A}_\Lambda^z(t), \mathscr{L}_\Lambda^z(t)), \mathscr{S}_\Lambda^z(t))$(简单地，$\mathscr{A}_\Lambda^z(t)$)为$\mathscr{A}(t)$的局部场.一个积场称为局部势场，如果对一切$\Lambda\in\mathscr{S}_f$，$z\in\prod\limits_{u\in S-\Lambda}E_u$，$\mathscr{A}_\Lambda^z(t)$是一个势场.

(10.1.19) **定理** 一个具有局部特征的积场$\mathscr{A}(t)$成为势场的充要条件是它是一个局部势场.

证 必要性 设$\mathscr{A}(t)$有势V，则V在$T\times(\prod\limits_{u\in\Lambda}E_u\times\{z\})$上

的限制是$\mathscr{A}_\Lambda^z(t)$的势．故$\mathscr{A}(t)$是局部势场．

充分性　我们只需证明$\mathscr{A}(t)$是路径无关的．设

$$L(t)=(x=x^{(0)},x^{(1)},\cdots,x^{(n)},x^{(n+1)}=x)\in\mathscr{L}(t)$$

是任一闭路，则由（10.1.18）知

$$\Lambda\equiv\bigcup_{k=0}^{n}\{u\in S:\ x^{(k)}(u)\neq x^{(k+1)}(u)\}\in\mathscr{S}_f.$$

记$z=x_{S-\Lambda}$（即x在$\prod\limits_{u\in S-\Lambda}E_u$上的限制），则$L(t)$也是$\mathscr{A}_\Lambda^z(t)$的一条闭路．由于场$\mathscr{A}(t)$沿$L(t)$所做的功与场$\mathscr{A}_\Lambda^z(t)$沿$L(t)$所做的功是一样的，而且$\mathscr{A}_\Lambda^z(t)$是势场，故$\varphi(L(t))=0$． ▌

作为基本定理的简单的应用，我们有

（10.1.20）**推论**　生灭Q矩阵（单边或双边，保守或非保守）总是可配称的．

证　因为可配称性与对角线元素无关，因而保守或非保守是无关重要的．又因生灭Q矩阵的每一条闭路都是往返路，而场沿这种闭路所做的功恒为零． ▌

在以下三节里，我们将把本节的结果应用于各种特殊的情形．

§10.2　格子场

先看有限维单位方体的有势性判准

（10.2.1）**引理**　设$S=\{u_1,\ \cdots,\ u_N\}$，$E=\{0,\ 1\}^S$．定义

$$_ux(v)=\begin{cases}x(u), & \text{如 } u\neq v\\ 1-x(u), & \text{如 } u=v\end{cases},$$

$$x\in E,\ u,\ v\in S,$$

取

$$a(x,\tilde{x})\begin{cases} >0, & \text{如 } \tilde{x}={}_ux, \\ =0, & \text{如 } \tilde{x}\neq x,\ {}_ux. \end{cases}$$

那么场 $\mathscr{A}=\{a(x,\tilde{x}) \ : x, \tilde{x}\in E\}$成为势场的充要条件是下述四边形条件：

$$(10.2.2)\quad a(x,{}_ux)a({}_ux,{}_{uv}x)a({}_{uv}x,{}_vx)a({}_vx,x)$$
$$=a(x,{}_vx)a({}_vx,{}_{vu}x)a({}_{vu}x,{}_ux)a({}_ux,x)$$
$$u,v\in S, x\in E$$

成立。此处 ${}_{uv}x={}_u({}_vx)$。

证 条件显然是必要的．为证充分性，定义**E**到自身的变换 $\zeta(u)$：

$$x\zeta(u)={}_ux,\ x\in E,\ u\in S.$$

这样，对于每一条路 $L=(x=x^{(0)},\ x^{(1)},\ \cdots,\ x^{(n)})$，必定存在 $\{u_1,\ \cdots,\ u_k\}\subset S$，使得

$$x^{(k)}=x\zeta(u_1)\zeta(u_2)\cdots\zeta(u_k)$$
$$={}_{u_ku_{k-1}\cdots u_1}x,\ 1\leqslant k\leqslant n.$$

在下面的证明中，我们也将把 $x\zeta(u_1)\cdots\zeta(u_n)$ 视作为路 L，它以 x 为起点；同时，我们将$\zeta(u_i)$视为一节路：$x^{(i-1)}\to x^{(i)}$。

由（10.1.4）得

$$(10.2.3)\quad \varphi(x\zeta(u_1)\cdots\zeta(u_n))$$
$$=\varphi(x\zeta(u_1)\cdots\zeta(u_k))+\varphi(x^{(k)}\zeta(u_{k+1})\cdots\zeta(u_n)),$$
$$1\leqslant k\leqslant n-1,$$

使用上述记号，我们可把（10.2.2）改写成

$$(10.2.4)\quad \varphi(x\zeta(u)\zeta(v))=\varphi(x\zeta(v)\zeta(u)),$$
$$x\in E,\ u,v\in S, u\neq v.$$

显然

$$(10.2.5)\quad \varphi(x\zeta(u)\zeta(u))=0,\ x\in E,\ u\in S,$$

我们需要证明：对于一切闭路 $L=(x,x^{(1)},\cdots,x^{(n)}=x)$，

(10.2.6)　　$\varphi(x\zeta(u_1)\zeta(u_2)\cdots\zeta(u_n)) = 0.$

由于每一条闭路必由偶数节 组成，因此 $n=2m$，m为 正 整数．我们对 m 使用归纳法．当 $m=1$ 时，$u_1=u_2$，此时(10.2.6)退化为 (10.2.5)．假定 (10.2.6) 对于 $n=2(m-1)$ 已真．那么，对于 $n=2m$，必有 k：$2\leqslant k\leqslant n$，使得

$$u_k=u_1;\ u_l\neq u_1,\ 2\leqslant l\leqslant k-1.$$

使用 (10.2.3) 和 (10.2.4)，得

$$\begin{aligned}
&\varphi(x\zeta(u_1)\cdots\zeta(u_n))\\
&=\varphi(x\zeta(u_1)\zeta(u_2))+\varphi((_{u_2u_1}x)\zeta(u_3)\cdots\zeta(u_n))\\
&=\varphi(x\zeta(u_2)\zeta(u_1))+\varphi((_{u_1u_2}x)\zeta(u_3)\cdots\zeta(u_n))\\
&\varphi(x\zeta(u_2))+\varphi((_{u_2}x)\zeta(u_1)\zeta(u_3)\cdots\zeta(u_n))
\end{aligned}$$

类似地，反复使用 (10.2.3) 和 (10.2.4)，并注意 (10.2.5)，得

$$\begin{aligned}
&\varphi(x\zeta(u_1)\cdots\zeta(u_n))\\
&=\varphi(x\zeta(u_2))+\varphi((_{u_2}x)\zeta(u_3))+\varphi((_{u_3u_2}x)\zeta(u_1)\zeta(u_4)\cdots\\
&\quad\zeta(u_n))\\
&=\varphi(x\zeta(u_2)\zeta(u_3))+\varphi((_{u_2u_3}x)\zeta(u_1)\zeta(u_4)\cdots\zeta(u_n))\\
&=\cdots\\
&=\varphi(x\zeta(u_2)\cdots\zeta(u_{k-1}))+\varphi((_{u_{k-1}\cdots u_2}x)\zeta(u_1)\zeta(u_k)\cdots\\
&\quad\zeta(u_n))\\
&=\varphi(x\zeta(u_2)\cdots\zeta(u_{k-1}))+\varphi((_{u_{k-1}\cdots u_2}x)\zeta(u_1)\zeta(u_k))\\
&\quad+((_{u_ku_1u_{k-1}\cdots u_2}x)\zeta(u_{k+1})\cdots\zeta(u_n))\\
&=\varphi(x\zeta(u_2)\cdots\zeta(u_{k-1})\zeta(u_{k+1})\cdots\zeta(u_n))\\
&=0.\qquad\blacksquare
\end{aligned}$$

下面讨论一般的格子场．

(10.2.7) **定义**　取 $E_1=(0,\pm1,\pm2,\cdots)$，E_N 为 E_1 的 N 重积．场$\mathscr{A}=(a(e,e')$：$e,e'\in E_N)$ 称为格子场，如果

$$a(e,e')>0,\ e'\in F_e,\ e\in E_N$$

$$a(e,e')=0,\ e'\notin F_e,\ e\in E_N$$

此处 $e=(i_1,\cdots,i_N)$，而

$$F_e=\{(i_1,\cdots,i_{k-1},i_k+\delta_k,\ i_{k+1},\cdots,i_N):\ \delta_k=\pm 1, 1\leqslant k\leqslant N\}$$

(10.2.8) **定理** 格子场 $\mathscr{A}$ 成为势场当且仅当下述四边形条件

$$a(e,e^u)a(e^u,e^{uv})a(e^{uv},e^v)a(e^v,e)$$
$$=a(e,e^v)a(e^v,e^{vu})a(e^{vu},e^u)a(e^u,e),$$
$$u,v\in\{1,2,\cdots,N\},\ e\in E_N$$

成立，此处

$$e^u(v)=\begin{cases}e(v), & \text{如}u\neq v,\\ e(v)+1, & \text{如}u=v.\end{cases}$$

而 $e^{uv}=(e^u)^v$。此外，如 $\mathscr{A}$ 是势场，则势函数为 $(-\log\pi_e:\ e\in E_N)$：

$$\pi_e=\pi_{e_0}\prod_{k=1}^{N}\prod_{l=\mathrm{sign}(i_k)}^{i_k}\frac{a(e_{k,l-\mathrm{sign}(i_k)};\ e_{k,l})}{a(e_{k,l};\ e_{k,l-\mathrm{sign}(i_k)})},$$
$$e\in E_N.$$

其中

$$e_0=e_{10}=(0,0,\cdots,0);$$
$$e_{1,\mathrm{sign}(i_1)}=(\mathrm{sign}(i_1),0,\cdots,0);$$
$$e_{1,2\mathrm{sign}(i_1)}=(2\,\mathrm{sign}(i_1),0,\cdots,0);$$
$$\cdots$$
$$e_{1,i_1-\mathrm{sign}(i_1)}=(i_1-\mathrm{sign}(i_1),0,\cdots,0);$$
$$e_{1,i_1}=(i_1,0,\cdots,0)=e_{2,0};$$
$$e_{2,\mathrm{sign}(i_2)}=(i_1,\mathrm{sign}(i_2),0,\cdots,0);$$
$$e_{2,\mathrm{sign}(i_2)}=(i_1,2\,\mathrm{sign}(i_2),0,\cdots,0);$$
$$\cdots$$
$$e_{2,i_2}=(i_1,i_2,0,\cdots,0)=e_{3,0};$$

…

$$e_{Ni_N}=(i_1,i_2,\cdots,i_N)=e.$$

而 π_{i_0} 是任意常数。

证 (a) 条件显然是必要的。往证充分性。我们只需证：对于每一闭路 $L=(e,e_1,\cdots,e_n,e)$ ，$\varphi(L)=0$。无妨设 e，$e_1,\cdots,e_n$ 互不相同。一般情形可归结为这种情形。记 L 的长度（按欧氏距离）为 l。当然有 $l\geqslant 4$。如果 $l=4$，则由四边形条件立知 $\varphi(L)=0$。因此，我们可设 $l>4$。如果含于N维闭方体内，则由引理(10.2.1) 知 $\varphi(L)=0$。这样，我们只需考虑不能为N维闭方体所包的 L，而且它的长度>4。对于这样的L，必定存在一个二维平面（如 $N\geqslant 3$）或直线（如 $N=2$）Z，它将 L 分成两部分。从 e 出发，用 e_k 表示沿 L 首次到达 Z 的点。然后沿着 L 继续往前走，我们将在某点离开Z。用 e_l $(l>k)$ 表示离开 Z 后首次回到 Z 的位置。那么，e_k 和 e_l 把 L 分割成两部分，一部分是

$$L_1=(e,e_1,\cdots,e_k) \ , \ L_2=(e_l,e_{l+1},\cdots,e_n,e).$$

另一部分是

$$L_3=(e_k,e_{k+1},\cdots,e_l) \ .$$

在Z内，我们取从 e_k 到 e_l 的任一条最短的路径，记之为

$$L_4=(e_k,e'_1,e'_2,\cdots,e'_s,e_l) \ .$$

我们断定 l_3（表示 L_3 的长度，余类推）$>l_4$。事实上，如果我们用L'_3表示 L_3 到 Z 上的投影，则显然有 $l_4\leqslant l'_3$。从而 $l_3>l'_3\geqslant l_4$。类似地可证 $l_1+l_2>l_4$。置

$$L_5=(e,e_1,\cdots,e_k,e'_1,e'_2,\cdots,e'_s,e_l,e_{l+1},\cdots,e_n,e) \ ,$$

$$L_6=(e_k,e_{k+1},\cdots,e_l,e'_s,e'_{s-1},\cdots,e'_1,e_k) \ .$$

则 l_5，$l_6<l$，而且 $\varphi(L)=\varphi(L_5)+\varphi(L_6)$。由此及归纳假设立知 $\varphi(L)=0$。

(b) 为证明第二项断言，对于每一个$e\in E_N$，我们取一条从 e_0 到 e 的路

$$L_e = (e_0 = e_{10},\ e_{1,\mathrm{sign}(i_1)},\ e_{1,2\,\mathrm{sign}(i_1)},\ \cdots,\ e_{1i_1},$$

$$e_{2,\mathrm{sign}(i_2)},\ \cdots,\ e_{2i_2},\ \cdots,\ c_{Ni_N} = e)$$

并令

$$\hat{a}(e_0, e) = \prod_{k=1}^{N} \prod_{l=\mathrm{sign}(i_k)}^{i_k} a(e_{k,l-\mathrm{sign}(i_k)},\ e_{k,l}),$$

$$\hat{a}(e, e_0) = \prod_{k=1}^{N} \prod_{l=\mathrm{sign}(i_k)}^{i_k} a(e_{k,l}, e_{k,l-\mathrm{sign}(i_k)}).$$

然后使用定理（10.1.12）. ▌

§10.3 马氏链场

取 $T=(0,\ \infty)$，E为任一可数集. 设 $P(t)=(P_{ij}(t):\ i,\ j\in E)$ $(t\geqslant 0)$ 为一跳过程. 取

$$a(t,i,j)=P_{ij}(t),\ t>0,\ i,\ j\in E.$$

注意 $P_{ij}(t)=0$ 对于某 $t>0$ 成立当且仅当它对于一切 $t>0$ 成立. 因而 $\mathscr{L}(t)$, $D(t)$ 和 $E_l(t)$ 均与 $t>0$ 无关.

（10.3.1）**定义** 设 $P(t)$ 是零同的. 即满足（10.1.1）(ii). 那么，由（10.1.5）所定义的场 $(E, P(t), \mathscr{L}, \mathscr{S}(t))$（简单地，$P(t)$）称为链场.

（10.3.2）**引理** 如果链场 $P(t)$ 是既约的：

$$P_{ij}(t)>0,\ i,\ j\in E,\ t>0$$

且可配称，则它必有保守势 $(-\log\lambda_i(1):\ i\in E)$，此处 $(\lambda_i(1):\ i\in E)$ 的定义见（10.1.14）. 进而，$P(t)$ 的任一势必为

$$u_i(t) = -\log\lambda_i(1) + w(t),$$

$w(t)$ 为 T 上的任一函数.

证 如果 $P(t)$ 是一个势场，则由（10.1.14）所定义的函数 $(\lambda_i(t):\ i\in E)$ 是一个配称函数，即

$$\lambda_i(t)P_{ij}(t)=\lambda_j(t)P_{ji}(t),\quad t>0,\quad i,j\in E,$$

但

$$\lambda_i(t)P_{ij}(2t)=\sum_{k\in E}\lambda_i(t)P_{ik}(t)P_{kj}(t)$$
$$=\sum_k P_{ki}(t)\lambda_k(t)P_{kj}(t)=\lambda_j(t)P_{ji}(2t).$$

由归纳法，可证

$$\lambda_i(t)P_{ij}(mt)=\lambda_j(t)P_{ji}(mt),m\geqslant 1.$$

注意$\lambda_\Delta(t)\equiv 1$，$P(t)$的可配称性及$P(t)$的不可约性，我们有

$$\lambda_i(mt)=\lambda_i(t)=\hat{P}_{\Delta i}(t)/\hat{P}_{i\Delta}(t),$$

从而

$$\lambda_i\left(\frac{m}{n}\right)=\lambda_i(1)=\hat{P}_{\Delta i}(1)/\hat{P}_{i\Delta}(1),\quad m,n\geqslant 1.$$

综合以上两式得

$$\lambda_i(t)=\lambda_i(1),\quad t>0.$$

今设$u(t)$为$P(t)$的任一势函数，则

$$u_i(t)-u_\Delta(t)=-\log\lambda_i(t)+\log\lambda_\Delta(t)$$
$$=-\log\lambda_i(t)=-\log\lambda_i(1).$$

取$w(t)=u_\Delta(t)$，便得引理断言。】

(10.3.3) **定理** 链场$P(t)$为势场当且仅当它是保守场。此时，一切势函数形如

$$u_i(t)=-\log\lambda_i(1)+w_l(t),\quad i\in E_l,\quad l\in D,$$

此处$(\lambda_i(1):i\in E)$由(10.1.14)所定义，而$w_l(l\in D)$是T上的任一函数。

证 由定理(10.1.12)和引理(10.3.2)易得。 】

§10.4 某些速度函数的有势性

本节研究两种可数维积场的有势性。

(10.4.1) **定义** 设S是一可数集，$E=\{0,1\}^S$. 函数 $c(u,(x)(u\in S,x\in E)$ 和 $c(u,v,x)$ $(u,v\in S,x\in E)$ 满足

(i) $c(u,x)>0$, $u\in S$, $x\in E$;

(ii) $c(u,v,x)>0$, $u,v\in S$, $u\neq v$; $x\in E$,

$$x(u)\neq x(v).$$

置

$$(10.4.2)\quad q_s(x,\tilde{x})=\begin{cases}c(u,x), & 如\ \tilde{x}={}_ux,\\ 0 & ,如\ \tilde{x}\neq x,{}_ux.\end{cases}$$

$$(10.4.3)\quad q_e(x,\tilde{x})=\begin{cases}c(u,v,x), & 如\ \tilde{x}={}_{(v,v)}x,\\ 0 & ,\quad 如\ \tilde{x}\neq{}_{(u,v)}x,x\end{cases}$$

此处

$$({}_{(u,v)}x)(w)=\begin{cases}x(w), & 如\ w\neq u,v,\\ x(v), & 如\ w=u,\\ x(u), & 如\ w=v.\end{cases}$$

分别称 $Q_s\equiv(q_s(x,\tilde{x}):x,\tilde{x}\in E)$ 和$Q_e\equiv(q_e(x,\tilde{x}):x,\tilde{x}\in E)$ 为自旋变相速度函数场和排它速度函数场。

(10.4.4) **定理**

(i) Q_s是势场的充要条件是下述四边形条件

$$c(u,x)c(v,x)c(u,{}_vx)c(v,{}_ux)$$
$$=c(v,x)c(u,{}_vx)c(v,{}_{vu}x)c(u,{}_ux)$$

对任何的 $u,v\in S$ 和 $x\in E$ 成立；

(ii) Q_e 是势场的充要条件是下述三角形条件

$$c(u,v,x)c(v,w,{}_{(u,v)}x)c(w,u,{}_{(w,u)}x)$$
$$=c(u,w,x)c(w,u,{}_{(u,w)}x)c(v,u,{}_{(v,u)}x)$$

对任何 $u,v,w\in S$ 和 $x\in E$ 成立.

证 由 (10.2.1) 和 (10.1.19)立得 (i) . 往证 (ii) . 类似于 (10.2.1) 的证法，我们引进如下记号：如 $u\neq v$且$x(u)$

$\neq x(v)$，则记

$$x\zeta(u,v) = {}_{(u,v)}x.$$

但这里的$\zeta(u,v)$并非E到自身的变换，因为它只定义在$\{x\in E: x(u)\neq x(v)\}$上．我们也用

$$x\zeta(u_1,v_1)\cdots\zeta(u_n,v_n)$$

表示由起点$x=x^{(0)}$和$x^{(k)}=x^{(k-1)}\zeta(u_k,v_k)$ $(1\leqslant k\leqslant n)$组成的路$L=(x=x^{(0)}, x^{(1)}, \cdots, x^{(n)})$，并视$\zeta(u_k,v_k)$为$L$的第$k$节路径．使用这些记号，我们可把三角形条件改写成

$$\varphi(x\zeta(u,v)\zeta(v,w))=\varphi(x\zeta(u,w)), \quad u,v,w\text{互不相同}, x(u)\neq x(v)=x(w) \tag{10.4.5}$$

此外，显然有$\zeta(u,v)=\zeta(v,u)$及

$$\varphi(x\zeta(u,v)\zeta(v,u)=0, \quad u,v\in S,\ u\neq v,\ x\in E,\ x(u)\neq x(v) \tag{10.4.6}$$

$$\begin{aligned}\varphi(x\zeta(u_1,v_1)\cdots\zeta(u_n,v_n))&=\varphi(x\zeta(u_1,v_1)\cdots\zeta(u_k,v_k))\\&\quad+\varphi(x^{(k)}\zeta(u_{k+1},v_{k+1})\cdots\zeta(u_n,v_n))\end{aligned} \tag{10.4.7}$$

我们先证

$$\begin{aligned}\varphi(x\zeta(u_1,v_1)\zeta(u_2,v_2))&=\varphi(x\zeta(u_2,v_2)\zeta(u_1,v_1))\\&u_1,v_1,u_2,v_2\text{互不相同},\\&x(u_i)\neq x(v_i),\ i=1,2\end{aligned} \tag{10.4.8}$$

不失一般性，我们可设$x(u_1)=x(u_2)\neq x(v_1)=x(v_2)$．于是$x\zeta(u_1,v_2)$有意义．注意

$$x\zeta(u_1,v_1)\zeta(u_2,v_2)\zeta(u_1,v_1)\zeta(u_2,v_2)=x,$$

$$x\zeta(u_1,v_1)\zeta(u_2,v_2)\zeta(u_1,v_1)={}_{(u_2,v_2)}x$$

而且，由(10.4.7)，(10.4.6)和(10.4.5)得

$$\begin{aligned}&\varphi(x\zeta(u_1,v_1)\zeta(u_2,v_2)\zeta(u_1,v_1)\zeta(u_2,v_2))\\&=\varphi(x\zeta(u_1,v_1)\zeta(u_2,v_2)\zeta(u_1,v_1)\zeta(u_2,v_2)\zeta(u_1,v_2)\zeta(u_1,v_2))\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \varphi(x\zeta(u_1,v_1)\zeta(u_2,v_2)\zeta(u_1,v_1)) \\
&\quad + \varphi((_{(u_2,v_2)}x)\zeta(u_2,v_2)\zeta(u_1,v_2)) \\
&\quad + \varphi((_{(u_1,v_2)}x)\zeta(u_1,v_2)) \\
&= \varphi(x\zeta(u_1,v_1)\zeta(u_2,v_2)\zeta(u_1,v_1)) \\
&\quad + \varphi((_{(u_2,v_2)}x)\zeta(u_2,u_1)) \\
&\quad + \varphi((_{(u_2,v_2)}x)\zeta(u_1,v_2)) \\
&= \varphi(x\zeta(u_1,v_1)\zeta(u_2,v_2)\zeta(u_1,v_1)\zeta(u_2,v_1)) \\
&\quad + \varphi((_{(u_1,v_2)}x)\zeta(u_1,v_2)).
\end{aligned}
$$

实际上，最后三步只是使用（10.4.5）将$\zeta(u_2,v_2)\zeta(u_1,v_2)$化为$\zeta(u_2,v_1)$. 反复使用这一技巧，上式右方

$$
\begin{aligned}
&= \varphi(x\zeta(u_1,v_1)\zeta(u_2,v_2)\zeta(v_1,u_2)) + \varphi((_{(u_1,v_2)}x)\zeta(u_1,v_2)) \\
&= \varphi(x\zeta(u_1,v_1)\zeta(u_2,v_1)) + \varphi((_{(u_1,v_2)}x)\zeta(u_1,v_2)) \\
&= \varphi(x\zeta(u_1,v_2)) + \varphi((_{(u_1,v_2)}x)\zeta(u_1,v_2)) \\
&= \varphi(x\zeta(u_1,v_2)\zeta(u_1,v_2)) = 0.
\end{aligned}
$$

故（10.4.8）成立。

三角形条件（10.4.5）显然是必要的。往证这个条件也是充分的。为此，我们只需证：对于每一条闭路

$$
\begin{aligned}
L &= (x^{(0)},\ \cdots,\ x^{(n)}) \\
&= x\zeta(u_1,v_1)\cdots\zeta(u_n,v_n).
\end{aligned}
$$

我们有

$$
(10.4.9)\qquad \varphi(x\zeta(u_1,v_1)\cdots\zeta(u_n,v_n)) = 0.
$$

我们对n使用归纳法。当$n=2$时，(10.4.9)化为(10.4.6)。当$n=3$时，由（10.4.7），（10.4.9）也化为（10.4.6）。假定上式对一切$n<m$成立。往证它对$n=m$也成立。

由于L是闭路，每一个u_k和v_k（$1\leqslant k\leqslant m$）必定出现偶数次。这样，必定存在k，$2\leqslant k\leqslant m$使得

$$
\begin{aligned}
(10.4.10)\qquad &\{u_1,v_1\}\cap\{u_k,v_k\}\neq\phi, \\
&\{u_1,v_1\}\cap\{u_l,v_l\}=\phi, \qquad 2\leqslant l\leqslant k-1.
\end{aligned}
$$

由于$\zeta(u,v)=\zeta(v,u)$，不失一般性，我们可假定

$$(10.4.11)\qquad u_1=u_k.$$

简记$\widetilde{x}=x\zeta(u_1,v_1)\zeta(u_2,v_2)$，则由（10.4.7）和（10.4.8）得

$$\begin{aligned}&\varphi(x\zeta(u_1,v_1)\cdots\zeta(u_m,v_m))\\&=\varphi(x\zeta(u_1,v_1)\zeta(u_2,v_2))+\varphi(\widetilde{x}\zeta(u_3,v_3)\cdots\zeta(u_m,v_m))\\&=\varphi(x\zeta(u_2,v_2)\zeta(u_1,v_1))+\varphi(\widetilde{x}\zeta(u_3,v_3)\cdots\zeta(u_m,v_m))\\&=\varphi(x\zeta(u_2,v_2)\zeta(u_1,v_1)\zeta(u_3,v_3)\cdots\zeta(u_m,v_m))\end{aligned}$$

反复使用（10.4.7）和（10.4.8），得

$$\begin{aligned}(10.4.12)\quad&\varphi(x\zeta(u_1,v_1)\cdots\zeta(u_m,v_m))\\&=\varphi(x\zeta(u_2,v_2)\cdots\zeta(u_{k-1},v_{k-1})\zeta(u_1,v_1)\zeta(u_k,v_k)\\&\quad\cdots\zeta(u_m,v_m)).\end{aligned}$$

下面分两种情况. 先考虑$v_1=v_k$. 此时由（10.4.11）和（10.4.6），上式的右方（简记$\hat{x}=x\zeta(u_2,v_2)\cdots\zeta(u_{k-1},\ v_{k-1})$）

$$\begin{aligned}&=\varphi(x\zeta(u_2,v_2)\cdots\zeta(u_{k-1},v_{k-1}))\\&\quad+\varphi(\hat{x}\zeta(u_1,v_1)\zeta(u_k,v_k))\\&\quad+\varphi(x^{(k)}\zeta(u_{k+1},v_{k+1})\cdots\zeta(u_m,v_m))\\&=\varphi(x\zeta(u_2,v_2)\cdots\zeta(u_{k-1},v_{k-1}))\\&\quad+\varphi(x^{(k)}\zeta(u_{k+1},v_{k+1})\cdots\zeta(u_m,v_m))\\&=\varphi(x\zeta(u_2,v_2)\cdots\zeta(u_{k-1},v_{k-1}))\zeta(u_{k+1},v_{k+1})\cdots\zeta(u_m,v_m)).\end{aligned}$$

因此，由假设（10.4.9）对$n=m-2$成立知它对$n=m$也成立。

其次，设$v_1\neq v_k$. 然后由（10.4.11）和（10.4.6），我们看到，（10.4.12）的右方

$$\begin{aligned}&=\varphi(x\zeta(u_2,v_2)\cdots\xi(u_{k-1},v_{k-1}))\\&\quad+\varphi(\hat{x}\xi(u_1,v_1)\zeta(u_k,v_k))\\&\quad+\varphi(x^{(k)}\zeta(u_{k+1},v_{k+1})\cdots\zeta(u_m,v_m))\\&=\varphi(x\zeta(u,v_2)\cdots\zeta(u_{k-1},v_{k-1}))+\varphi(\hat{x}\zeta(v_1,v_k))\\&\quad+\varphi(x^{(k)}\zeta(u_{k+1},v_{k+1})\cdots\zeta(u_m,v_m))\end{aligned}$$

$$= \varphi(x\zeta(u_2,v_2)\cdots\zeta(u_{k-1},v_{k-1})\zeta(v_1,v_k)\zeta(u_{k+1},v_{k+1})$$
$$\cdots\zeta(u_m,v_m)).$$

因此，由假设（10.4.9）对 $n=m-1$ 成立知它对 $n=m$ 也成立。 ▌

§10.5 自旋变相过程和排它过程的可逆性

考虑由（10.4.1）所定义的函数。补充假定

$$(10.5.1) \qquad c(u,\cdot), c(u,v,\cdot) \in \mathscr{C}(E), u,v \in S.$$

此处 $\mathscr{C}(E)$ 为 E 上的连续函数的全体，我们赋 $E=\{0,1\}^S$ 予乘积拓扑，它是紧空间。因而连续函数必定有界。我们将分别称 $c(u,\cdot)$ 和 $c(u,v,\cdot)$ 为自旋变相过程和排它过程的速度函数。它们分别决定算子

$$\Omega_s f(x) = \sum_{u\in S}[f({}_u x) - f(x)],$$

$$\Omega_e f(x) = \sum_{u,v\in S} c(u,v,x)[f({}_{(u,v)}x) - f(x)],$$

$$x \in E,\ f \in \mathscr{D}(E) \subset \mathscr{C}(E).$$

在某些条件下，Ω_s（相应地，Ω_e）是自旋变相过程（相应地，排它过程）的毋元（参见 Griffeath[1]，Liggett[3]，Stroock[1] 或严士健[1]。

本节的目的是研究这两个算子可逆的条件以及可逆测度的构造。由第七章的讨论可以看出，过程的可逆性等价于半群的可逆性，后者又等价于其毋元的可逆性。于此，可逆性当然意味着

$$\int f(x)\Omega g(x)\mu(dx) = \int g(x)\Omega f(x)\mu(dx)$$

对一切 $f,g\in\mathscr{C}(E)$ 成立。其中 μ 为概率测度。

我们的基本路子是先研究 Gibbs 态的构造，它有重要的物理背景。然后证明 Gibbs 态集重合于可逆测度集。这样，我们也给出

了可逆测度集的构造.我们将会看到,在这里,场论起着重要作用.

(10.5.2) **引理**

(i) 设$\{c(u,x)\}$满足正性(见(10.4.1))、连续性(见(10.5.1))和四边形条件,V为Q_s的任一势.对于每$\Lambda\in\mathscr{S}_f$和$x\in E$,定义

$$(10.5.3)\qquad f^{\Lambda}(x)=\exp V(x)/\sum_{y\in E(\Lambda)}\exp V(y\times x_{S-\Lambda})$$

此处$E(\Lambda)=\{0,1\}^{\Lambda}$, x_{Λ}表x在$\{0,1\}^{\Lambda}$上的限制. 那么, $\{f^{\Lambda}:\Lambda\in\mathscr{S}_f\}$与$V$的选择无关, 而且

$$(10.5.4)\qquad 0<f^{\Lambda}\in\mathscr{C}(E);$$

$$(10.5.5)\qquad \sum_{w\in E(\Lambda)}f^{\Lambda}(w\times x_{S-\Lambda})=1,\ x\in E;$$

(10.5.6) 对每$\Lambda\subset\tilde{\Lambda}\in\mathscr{S}_f$和$x\in E$,

$$f^{\Lambda}(x)=f^{\tilde{\Lambda}}(x)\sum_{w\in E(\Lambda)}f^{\tilde{\Lambda}}(w\times x_{S-\Lambda})$$

后一条件称为相容性.

(ii) 设$\{c(u,v,x)\}$满足正性、连续性和三角形条件. V为Q_s的任一势. 对每$\Lambda\in\mathscr{S}_f$, $k\in\boldsymbol{Z}_+\equiv\{0,1,2,\cdots\}$, $k\leqslant|\Lambda|$($|\Lambda|$表集合Λ的势)和$y\in E(\Lambda)$, 定义

$$(10.5.7)\qquad f_k^{\Lambda}(y\times z)=I_{E_k(\Lambda)}(y)\exp V(y\times z)\Big/\sum_{w\in E_k(\Lambda)}\exp V(w\times z),$$

其中

$$E_k(\Lambda)=\Big\{y\in\{0,1\}^{\Lambda}:\ |y|\equiv\sum_{u\in\Lambda}y(u)=k\Big\}.$$

那么, f_k^{Λ}与V的选法无关, 而且

(10.5.8) $0\leqslant f_k^{\Lambda}\in\mathscr{C}(E)$. 若$x_{\Lambda}\in E_k(\Lambda)$, 则 $f_k^{\Lambda}(x)>0$;

(10.5.9) 对每$z\in E(S-\Lambda)$,

$$\sum_{w\in E_{\tilde{k}}(\Lambda)} f_{\tilde{k}}^{\Lambda}(w\times z)=1;$$

(10.5.10)　对每 $\Lambda\subset\tilde{\Lambda}\in\mathscr{S}_f$，$0\leqslant\tilde{k}\leqslant|\Lambda|$，$y_1\in E(\Lambda)$，$y_2\in E(\tilde{\Lambda}-\Lambda)$ 和 $\tilde{z}\in E(S-\tilde{\Lambda})$，我们也有相容性：

$$f_{\tilde{k}}^{\tilde{\Lambda}}(y_1\times y_2\times\tilde{z})=f_{|y_1|}^{\Lambda}(y_1\times y_2\times\tilde{z})\sum_{y\in E_{|y_1|}(\Lambda)} f_{\tilde{k}}^{\tilde{\Lambda}}(y\times y_2\times\tilde{z})$$

证　(a) 参考点 Δ_l ($l\in D$)，参考路经 $L(x)$ 和相应的 $\hat{q}_s$，$\hat{q}_s$，λ 等的定义见§10.1. (i) 和 (ii) 的第一项断言是因为如下事实：设 V 和 V' 是任意的两个势，则由 (10.1.12) 知

$$V(x)=V'(x)+c_l,\ x\in E_l,\ l\in D.$$

(b) 往证 (10.5.4). 在 $E(\Lambda)$ 中任取 $y^{(0)}$，对每 $w\in E(\Lambda)$，任取 $\{y^{(1)},y^{(2)},\cdots,y^{(k)}\}\subset E(\Lambda)$，使

$$\left||y^{(s)}|-|y^{(s+1)}|\right|=1,\ s=0,\ 1,\ \cdots,\ k,\ y^{(k+1)}=w$$

并定义

$$\begin{aligned}(10.5.11)\quad &\overline{q}_s(y^{(0)}\times x_{S-\Lambda},\ w\times x_{S-\Lambda})\\ &=q_s(y^{(0)}\times x_{S-\Lambda},y^{(1)}\times x_{S-\Lambda})\cdots q_s(y^{(k)}\times x_{S-\Lambda},\\ &\quad y^{(k+1)}\times x_{S-\Lambda}),\quad \overline{q}_s(w\times x_{S-\Lambda},y^{(0)}\times x_{S-\Lambda})\\ &=q_s(y^{(k+1)}\times x_{S-\Lambda},y^{(k)}\times x_{S-\Lambda})\cdots q_s(y^{(1)}\times x_{S-\Lambda},\\ &\quad y^{(0)}\times x_{S-\Lambda}),\end{aligned}$$

$$x\in E.$$

这样，对于每 $x\in E$，$(y^{(0)}\times x_{S-\Lambda},y^{(1)}\times x_{S-\Lambda},\cdots,y^{(k+1)}\times x_{S-\Lambda})$（此处 $y^{(k+1)}=w$）是一条从 $y^{(0)}\times x_{S-\Lambda}$ 到 $y^{(k+1)}\times x_{S-\Lambda}$ 的路. 由基本定理 (10.1.12)，我们得到

$$\lambda(x)=\lambda(y^{(0)}\times x_{S-\Lambda})\ \frac{\overline{q}_s(y^{(0)}\times x_{S-\Lambda},x)}{\overline{q}_s(x,y^{(0)}\times x_{S-\Lambda})},\ x\in E.$$

由此及 (a) 得

$$f^{\Lambda}(x)=\frac{\overline{q}_s(y^{(0)}\times x_{S-\Lambda},x)}{\overline{q}_s(x,y^{(0)}\times x_{S-\Lambda})}\Big/$$

$$\sum_{w\in E(\Lambda)}\frac{\overline{q}_s(y^{(0)}\times x_{S-\Lambda},w\times x_{S-\Lambda})}{\overline{q}_s(w\times x_{S-\Lambda},y^{(0)}\times x_{S-\Lambda})},$$

$$x\in E.$$

由于 $c(u,\cdot)\in\mathscr{C}(E)$，可见

$$\overline{q}_s(y^{(0)}\times(\cdot)_{S-\Lambda},w\times(\cdot)_{S-\Lambda})\in\mathscr{C}(E(S-\Lambda)),$$
$$\overline{q}_s(w\times(\cdot)_{S-\Lambda},y^{(0)}\times(\cdot)_{S-\Lambda})\in\mathscr{C}(E(S-\Lambda)),$$

从而

$$(10.5.12)\qquad f^{\Lambda}(w\times\cdot)\in\mathscr{C}(E(S-\Lambda)),\ w\in E(\Lambda).$$

若

$$E\ni x^{(m)}\to x,\ m\to\infty,$$

则存在 M，使当 $m\geqslant M$ 时，$(x^{(m)})_{\Lambda}=x_{\Lambda}$，因而

$$f^{\Lambda}(x^{(m)})-f^{\Lambda}(x)=f^{\Lambda}(x_{\Lambda}\times(x^{(m)})_{S-\Lambda})-f^{\Lambda}(x),$$

故由 (10.5.12) 知

$$f^{\Lambda}(x^{(m)})\to f^{\Lambda}(x),\ 当\ x^{(m)}\to x.\qquad \rfloor$$

(c) (10.5.5) 是平凡的. 往证 (10.5.6). 注意当 $\Lambda\subset\widetilde{\Lambda}\in\mathscr{S}_f$ 时,

$$(w\times x_{S-\widetilde{\Lambda}})_{S-\widetilde{\Lambda}}=x_{S-\widetilde{\Lambda}},\ w\in E(\Lambda).$$

于是由 (a) 及 f^{Λ}的定义得

$$f^{\Lambda}(x)\sum_{w\in E(\Lambda)}f^{\widetilde{\Lambda}}(w\times x_{S-\Lambda})$$

$$=\frac{\exp V(x)}{\sum\limits_{y\in E(\Lambda)}\exp V(y\times x_{S-\Lambda})}\sum_{w\in E(\Lambda)}\frac{\exp V(w\times x_{S-\Lambda})}{\sum\limits_{w'\in E(\widetilde{\Lambda})}\exp V(w'\times x_{S-\widetilde{\Lambda}})}$$

$$=\frac{\exp V(x)}{\sum\limits_{w'\in E(\widetilde{\Lambda})}\exp V(w'\times x_{S-\widetilde{\Lambda}})}$$

$$=f^{\widetilde{\Lambda}}(x).$$

(d) 其次，证明 (10.5.8) 在 $E_k(\Lambda)$中任取参考点 y_k，对于每 $w\in E_k(\Lambda)$，任选 $\{y^{(1)},y^{(2)},\cdots,y^{(n)}\}\subset E_k(\Lambda)$使得

$$|y^{(s)}|=k,\ 1\leqslant s\leqslant n,$$
$$|\{u:\ y^{(s)}(u)\neq y^{(s+1)}(u)\}|=2,0\leqslant s\leqslant n+1,$$
$$y^{(0)}=y_k,\ y^{(n+1)}=w.$$

并定义

$$\overline{q}_e(y_k\times z,w\times z)=q_e(y_k\times z,y^{(1)}\times z)\cdots q_e(y^{(n)}\times z,w\times z),$$
$$\overline{q}_e(w\times z,\ y_k\times z)=q_e(w\times z,\ y^{(n)}\times z)\cdots q_e(y^{(n)}\times z,$$
$$y_k\times z),$$
$$z\in E(S-\Lambda).$$

显然，对每 $z\in E(S-\Lambda)$，$(y_k\times z,y^{(1)}\times z,\cdots,y^{(n)}\times z,w\times z)$ 是从 $y_k\times z$ 到 $w\times z$ 的一条路．再定义

$$K(\Lambda,z,k)=\sum_{y'\in E_k(\Lambda)}\frac{\overline{q}_e(y_k\times z,y\times z)}{\overline{q}_e(y\times z,y_k\times z)}.$$

于是，对于每 $\Lambda\in\mathscr{S}_f$，$k(0\leqslant k\leqslant|\Lambda|)$，$y\in E(\Lambda)$ 和 $z\in E(S-\Lambda)$，我们有

$$f_z^A(y)=I_{E_k(\Lambda)}(y)\frac{\overline{q}_e(y_k\times z,y\times z)}{\overline{q}_e(y\times z,y_k\times z)}\Big/K(\Lambda,z,k).$$

现在，使用 (b) 的证法易得 (10.5.8)．

(e) 由 f_z^A 的定义并仿 (c) 的证法易得 (10.5.10)． ∎

对每 $\Lambda\subset S$，用 $\mathscr{F}_0(\Lambda)$ 表 $E(\Lambda)$ 上的 Borel σ 代数，并记 $\mathscr{F}(\Lambda)=\mathscr{F}_0(\Lambda)\times E(S-\Lambda)$.

(10.5.13) **定义** E 上的概率测度的全体记作 $\mathscr{P}(E)$.

(i) 称 $\mu\in\mathscr{P}$ 为关于 $\{c(u,x)\}$ 的 Gibbs 态，如果对于每 $\Lambda\in\mathscr{S}_f$，$y\in E(\Lambda)$，

$$\mu(\{y\}\times E(S-\Lambda)|\mathscr{F}(S-\Lambda))=f^{\Lambda}(y\times(\cdot)_{S-\Lambda}),\mu\text{—}a.e.$$

全体 Gibbs 态之集记作 $\mathscr{G}_s$;

(ii) 称 $\mu\in\mathscr{P}$ 为关于 $\{c(u,v,x)\}$ 的典型 Gibbs 态，如果对每 $\Lambda\in\mathscr{S}_f$和 $y\in E(\Lambda)$，

$$\mu(\{y\}\times E(S-\Lambda)|\mathscr{A}(S-\Lambda))=f^{\Lambda}_{|(\cdot)_\Lambda|}(y\times(\cdot)_{S-\Lambda}),$$

$$\mu\text{—}a.e.$$

此处

$$\mathscr{A}(S-\Lambda)=\sigma\{E_k(\Lambda)\times E(S-\Lambda);\ 0\leqslant k\leqslant|\Lambda|;\mathscr{F}(S-\Lambda)\}$$

全体典型 Gibbs 态之集记作 $\mathscr{G}_e$。

(10.5.14) 记号

(i) 以 $\widetilde{\mathscr{G}}_{s,\Lambda}$ 表示下述测度在弱拓扑之下的闭凸包

$$\mu_{\Lambda,z}(F)=\sum_{y\in F(z)} f^{\Lambda}(y\times z),\quad F\in\mathscr{F}=\mathscr{F}(E),z\in E(S-\Lambda),$$

$$\Lambda\in\mathscr{S}_f.$$

此处

$$F(z)=\{y\in E(\Lambda):\ y\times z\in F\}$$

并记

$$\widetilde{\mathscr{G}}_s=\{\mu\in\mathscr{P}(E):\ \exists\Lambda_m\in\mathscr{S}_f,\quad \Lambda_m\uparrow S,\quad \exists\mu_m\in\widetilde{\mathscr{G}}_{s,\Lambda_m}$$

$$\text{使得}\quad \mu_m\xrightarrow{\omega}\mu\}$$

此处“$\xrightarrow{\omega}$”表示弱收敛。

(ii) 以 $\widetilde{\mathscr{G}}_{e,\Lambda}$ 表示下述测度在弱拓扑之下的闭凸包

$$\mu_{\Lambda,z,k}(F)=\sum_{y\in F(z)} f_k^{\Lambda}(y\times z),$$

$$\Lambda\in\mathscr{S}_f,\quad 0\leqslant k\leqslant|\Lambda|,\quad z\in E(S-\Lambda)$$

并置

$$\widetilde{\mathscr{G}}_e=\{\mu\in\mathscr{P}(E):\ \exists\Lambda_m\in\mathscr{S}_f,\quad \Lambda_m\uparrow S,\quad \exists\mu_m\in\widetilde{\mathscr{G}}_{e,\Lambda_m}$$

$$\text{使得}\quad \mu_m\xrightarrow{\omega}\mu\}$$

(10.5.15) **定理**

(i) 如果$\{c(u,x)\}$满足正性、连续性和四边形条件，则 $\mathscr{G}_s=\widetilde{\mathscr{G}}_s\neq\phi$；

(ii) 如果$\{c(u,v,x)\}$满足正性、连续性和三角形条件，则 $\mathscr{G}_s=\widetilde{\mathscr{G}}_s\neq\phi$

证 (a) 设 $\mu\in\mathscr{G}_s$，则

$$(10.5.16)\qquad \mu(\{y\}\times E(S-\Lambda))=\int_{E(S-\Lambda)} f^{\Lambda}(y\times z)\,\mu_{S-\Lambda}(dz)$$

此处 $\mu_{S-\Lambda}$ 表示 μ 在 $E(S-\Lambda)$ 上的投影．记

$$E(\Lambda)=\{y_1,y_2,\cdots,y_k\},$$

$$I_n=\{i:\ i=(i_1,\cdots,i_k),\ i_k=1,2,\cdots,n,\ 1\leqslant k\leqslant K\}$$

及

(10.5.17)

$$\begin{cases} A_{nik}^{y_k}=\left\{z\in E(S-\Lambda):\dfrac{i_k-1}{n}\leqslant f^{\Lambda}(y_k\times z)<\dfrac{i_k}{n}\right\} \\ A_{nn}^{y_k}=\left\{z\in E(S-\Lambda):\dfrac{n-1}{n}\leqslant f^{\Lambda}(y_k\times z)\leqslant 1\right\} \\ A_{ni}=\bigcap\limits_{k=1}^{k} A_{ni_k}^{y_k},\ i\in I_n,\ y_k\in E(\Lambda). \end{cases}$$

对每 n 和 $i\in I_n$，任取一点 $z_{ni}\in A_{ni}$，则由（10.5.16），（10.5.17）和（10.5.2）．(i) 得

$$(10.5.18)\qquad \mu(\{y\}\times E(S-\Lambda))=\lim_{n\to\infty}\sum_{i\in I_n}\mu_{S-\Lambda}(A_n)\,\mu_{\Lambda,z_{ni}}(\{y\}\times E(S-\Lambda))$$

且

$$\mu_{\Lambda,n}=\sum_{i\in I_n}\mu_{S-\Lambda}(A_{ni})\,\mu_{\Lambda,z_{ni}}\in\widetilde{\mathscr{G}}_{\epsilon,\gamma}\ .$$

于是，存在 $\mu^{\Lambda}\in\widetilde{\mathscr{G}}_{\epsilon,\Lambda}$ 和子列 $\{n_k\}$，使

$$\mu_{\Lambda,n_k}\xrightarrow{\ \omega\ }\mu^{\Lambda},\ k\to\infty$$

再利用（10.5.18），得

$$\mu(\{y\}\times E(S-\Lambda))=\mu^{\Lambda}(\{y\}\times E(S-\Lambda)),\ y\in E(\Lambda),$$

因此

$$(10.5.19)\qquad \mu(A\times E(S-\Lambda))=\mu^{\Lambda}(A\times E(S-\Lambda))$$

$$\Lambda\in\mathscr{S}_f,\ A\subset E(\Lambda).$$

我们由此断定：对任何的 $\{\Lambda_n\}\subset\mathscr{S}_f$，$\Lambda_n\uparrow S$，我们有 $\mu^{\Lambda_n}\in\widetilde{\mathscr{G}}_{\epsilon,\Lambda_n}$

且

$$(10.5.20)\quad \lim_{n\to\infty} \mu^{\Lambda_n}(\{y\}\times E(S-\Lambda)) = \mu(\{y\}\times E(S-\Lambda)),\quad \Lambda\in\mathscr{S}_f,\ y\in E(\Lambda)$$

事实上，当 n 充分大，$\Lambda_n\supset\Lambda$ 且

$$\mu^{\Lambda_n}(\{y\}\times E(S-\Lambda)) = \mu(\{y\}\times E(S-\Lambda))$$

由此易证

$$\mu^{\Lambda_n}\xrightarrow{\omega}\mu\in\widetilde{\mathscr{G}}_s.$$

反之，设 $\mu\in\widetilde{\mathscr{G}}_s$，为证 $\mu\in\mathscr{G}_s$，只需证

$$(10.5.21)\quad \mu(\{y\}\times F) = \int_F f^{\Lambda}(y\times z)\,\mu_{S-\Lambda}(dz)\qquad \Lambda\in\mathscr{S}_f,\ y\in E(\Lambda),\ F\in C_0(S-\Lambda)$$

其中

$$C_0(S-\Lambda) = \left\{\{\tilde{y}\}\times E(S-\tilde{\Lambda}):\ \Lambda\subset\tilde{\Lambda}\in\mathscr{S}_f,\ \tilde{y}\in E(\tilde{\Lambda}-\Lambda)\right\}$$

我们先证（10.5.21）对于 $F_0\in C_0(S-\Lambda)$：$F_0=\{\tilde{y}\}\times E(S-\tilde{\Lambda})$ 和

$$(10.5.22)\quad \mu=\mu_{\Lambda_m,z_m},\quad \Lambda_m\supset\tilde{\Lambda},\ z_m\in E(S-\Lambda_m)$$

成立．事实上，（10.5.21）的右方

$$= \int_{\{\tilde{y}\}\times E(S-\tilde{\Lambda})} f^{\Lambda}(y\times z)\,(\mu_{\Lambda_m,z_m})_{S-\Lambda}(dz)$$

$$= \int_{\{\tilde{y}\}\times E(\Lambda_m-\tilde{\Lambda})\times\{z_m\}} f^{\Lambda}(y\times z)\,(\mu_{\Lambda_m,z_m})_{S-\Lambda}(dz)$$

$$= \sum_{y'\in E(\Lambda_m-\tilde{\Lambda})} f^{\Lambda}(y\times\tilde{y}\times y'\times z_m)\,\mu_{\Lambda_m z_m}$$

$$(E(\Lambda)\times\{\tilde{y}\times y'\times z_m\})$$

$$=\sum_{y'\in E(\Lambda_m-\tilde{\Lambda})} f^{\Lambda}(y\times\tilde{y}\times y'\times z_m)\times$$

$$\sum_{w\in E(\Lambda)} f^{\Lambda_m}(w\times\tilde{y}\times y'\times z_m)$$

$$=\sum_{y'\in E(\Lambda_m-\tilde{\Lambda})} f^{\Lambda_m}(y\times\tilde{y}\times y'\times z_m)$$

$$=\mu_{\Lambda_m,z_m}(\{y\times\tilde{y}\}\times E(\Lambda_m-\tilde{\Lambda})\times\{z_m\})$$

$$=\mu_{\Lambda_m,z_m}(\{y\}\times\{\tilde{y}\}\times E(S-\tilde{\Lambda}))。$$

进而，(10.5.21) 对于 F_0 和 μ_{Λ_m,z_m} 的凸组合也成立。对于每一个 n，取 $\nu_m^{(n)}$ 为一个凸组合使

$$\nu_m^{(n)}\xrightarrow{\omega}\nu_m\in\tilde{\mathscr{G}}_{s,\Lambda_m},\quad n\to\infty,$$

那么，由 $f^{\Lambda}(y\times\cdot)\in\mathscr{C}(E-\Lambda)$ 立知 (10.5.21) 对于 F_0 和 $\mu\in\tilde{\mathscr{G}}_{s,\Lambda_m}$ 也成立。最后，取 $\Lambda_m\uparrow S$，$\Lambda_m\in\mathscr{S}_f$，$\mu_m\in\tilde{\mathscr{G}}_{s,\Lambda_m}$ 使

$$\mu_m\xrightarrow{\omega}\mu\in\tilde{\mathscr{G}}_s,\quad m\to\infty。$$

我们看到，(10.5.21) 对于 F_0 和 μ 也成立。

(b) 设 $\mu\in\mathscr{G}_e$，则

(10.5.23) $$\mu(\{y\}\times E(S-\Lambda))=\int_E f^{\Lambda}_{|x_\Lambda|}(y\times x_{S-\Lambda})\mu(dx)$$

$$\Lambda\in\mathscr{S},\quad y\in E(\Lambda)$$

即

$$\mu(\{y\}\times E(S-\Lambda))=\sum_{k=0}^{|\Lambda|}\int_{E_k(\Lambda)\times E(S-\Lambda)} f^{\Lambda}_k(y\times x_{S-\Lambda})\mu(dx)$$

记 $I_n = \{1, 2, \cdots, n\}^{E(\Lambda)}$,

(10.5.24)

$$\begin{cases} A^w_{nki(w)} = \left\{ x \in E_k(\Lambda) \times E(S-\Lambda): \dfrac{i(w)-1}{n} \leqslant \right. \\ \qquad \left. \leqslant f^\Lambda_k(w \times x_{S-\Lambda}) < \dfrac{i(w)}{n} \right\}, \ i(w) = 1, \cdots, n-1; \\ A^w_{nkn} = \left\{ x \in E_k(\Lambda) \times E(S-\Lambda): \dfrac{n-1}{n} f_k(w \times x_{S-\Lambda}) \leqslant 1 \right\}; \\ A_{nki} = \bigcap\limits_{w \in E(\Lambda)} A^w_{nki(w)}, \ i = \{i(w): \ w \in E(\Lambda)\} \in I_n. \end{cases}$$

对于每 $n \geqslant 1, 0 \leqslant k \leqslant |\Lambda|$和 $i \in I_n$, 取$z_{nki} \in E(S-\Lambda)$和$y_{nki} \in E_k(\Lambda)$，使

$$y_{nki} \times z_{nki} \in A_{nki},$$

则由 (10.5.23)，(10.5.24) 和 (10.5.2)．(ii) 得

(10.5.25) $$\mu(\{y\} \times E(S-\Lambda)) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{|\Lambda|} \sum_{i \in I_n} \mu(A_{nki}) \cdot \mu_{\Lambda, z_{nki}, k}(\{y\} \times E(S-\Lambda))$$

由于

$$\mu_{\Lambda,n} \equiv \sum_{k=0}^{|\Lambda|} \sum_{i \in I_n} \mu(A_{nki}) \mu_{\Lambda, z_{nki}, k} \in \widetilde{\mathscr{G}}_{e,\Lambda}$$

因而存在 $\mu^\Lambda \in \widetilde{\mathscr{G}}_{e,\Lambda}$ 和 $\{n_k\}$，使

$$\mu_{\Lambda, n_k} \xrightarrow{\omega} \mu^\Lambda; \ k \to \infty$$

由 (10.5.25) 得

$$\mu(A \times E(S-\Lambda)) = \mu^\Lambda(A \times E(S-\Lambda))$$
$$\Lambda \in \mathscr{S}_f, \ A \subset E(\Lambda)$$

现在，仿 (a) 的证法可证 $\mu \in \widetilde{\mathscr{G}}_e$.

反之，设 $\mu \in \widetilde{\mathscr{G}}_e$. 为证 $\mu \in \mathscr{G}_e$，由单调类定理，只需证

$$(10.5.26)\qquad \mu(\{y\}\times F)=\int_{E_k(\Lambda)\times F} f_k^{\Lambda}(y\times x_{S-\Lambda})\mu(dx)$$

对于每 $\Lambda\in\mathscr{S}_f$，$0\leqslant k\leqslant|\Lambda|$，$y\in E_k(\Lambda)$ 和

$$(10.5.27)\qquad F_0=\{\tilde{y}\}\times E(S-\tilde{\Lambda}),\ \Lambda\subset\tilde{\Lambda}\in\mathscr{S}_f,\ \tilde{y}\in E(\tilde{\Lambda}-\Lambda)$$

成立. 类似于 (a) 的证法，从 $\mu_{\Lambda_m,z_m,k'}$ $(\Lambda_m\supset\tilde{\Lambda},z_m\in E(S-\Lambda_m)$，$0\leqslant k'\leqslant|\Lambda_m|)$ 出发，可证 $\mu\in\mathscr{G}_e$. 】

(10.5.28) **引理** 以 $\mathscr{R}(\Omega_s)$ 和 $\mathscr{R}(\Omega_e)$ 分别表示关于 Ω_s 和 Ω_e 的可逆测度的全体. 那么，我们有

(i) $\mu\in\mathscr{R}(\Omega_s)$ 当且仅当对每 $u\in S$ 和 $f\in\mathscr{C}(E)$，

$$\int c(u,x)f(x)\mu(dx)=\int c(u,x)f({}_ux)\mu(dx);$$

(ii) $\mu\in\mathscr{R}(\Omega_e)$ 当且仅当对每 $u,v\in S$ 和 $f\in\mathscr{C}(E)$，

$$\int c(u,v,x)f(x)\mu(dx)=\int c(u,v,x)f({}_{(u,v)}x)\mu(dx).$$

证 (a) 先证 (i). 为证条件是必要的，由单调类定理，我们只需考虑形如 $\prod_{u\in\Lambda}x(u)$ $(\Lambda\in\mathscr{S}_f)$ 的函数 f. 取 $g=f({}_ux)$，$u\in\Lambda$，直接验算

$$(f\Omega g)(x)=c(u,x)f(x)$$

$$(g\Omega f)(x)=c(u,x)f({}_ux),\quad u\in\Lambda,\ x\in E,$$

从而有

$$\int c(u,x)[f({}_ux)-f({}_ux)]\mu(dx)$$

$$=\int(g\Omega f-f\Omega g)\mu(dx)=0$$

当 $u\notin\Lambda$ 时，此式更应成立.

为证充分性，设

$$f,g\in\{h\in\mathscr{C}(E):\ \sum_{u\in S}\sup_x|h(x)-h({}_ux)|<\infty\}\equiv\mathscr{C}(\Omega_s)$$

则由所设条件得

$$0=\sum_u \int c(u,x)[f({}_ux)g({}_ux)-f(x)g(x)]\mu(dx)$$

$$=\sum_u \int c(u,x)f({}_ux)[g({}_ux)-g(x)]\mu(dx)$$

$$+\sum_u \int c(u,x)g(x)[f({}_ux)-f(x)]\mu(dx)$$

$$=\sum_u \int c(u,x)f(x)[g({}_ux)-g({}_ux)]\mu(dx)$$

$$+\sum_u \int c(u,x)g(x)[f({}_ux)-f(x)]\mu(dx)$$

$$=-\int f\Omega g\, d\mu+\int g\Omega f\, d\mu.$$

由于$\mathscr{C}(\Omega_s)$ 为$\mathscr{D}(\Omega_s)$ 的核，从而 $\mu\in\mathscr{R}(\Omega_s)$.

(b) 试证 (ii) . 充分性的证明与 (a)类似. 只是$\mathscr{C}(\Omega_s)$取为

$$\{f\in\mathscr{C}(\mathrm{E}):\ \sum_{u,v}\sup_x [c(u,v,x)|f({}_{(u,v)}x)-f(x)|]<\infty\}.$$

为证必要性，只需考虑形如

$$I_{\{y\}\times E(S-\Lambda)},\ y\in\mathrm{E}(\Lambda),\ \Lambda\in\mathscr{S}_f$$

的函数 f. 】

(10.5.29) **引理**

(i) $\mu\in\mathscr{R}(\Omega_s)$ 当且仅当

$$c(u,y\times z)\mu(y\mid z)=c(u,{}_uy\times z)\mu({}_uy\mid z)\quad \mu_{S-\Lambda}\text{—a、e.}$$

此处

$$\mu(A\mid x_{S-\Lambda})=\mu(A\times\mathrm{E}(S-\Lambda)|\mathscr{F}(S-\Lambda))(x),\quad \Lambda\in\mathscr{S}_f,\ A\subset\mathrm{E}(\Lambda).$$

(ii) $\mu\in\mathscr{R}(\Omega_e)$当且仅当

$$c(u,v,y\times(\cdot)_{S-\Lambda})\mu(\{y\}\times E(S-\Lambda)|\mathscr{A}(S-\Lambda))$$
$$=c(u,v,{}_{(u,v)}y\times(\cdot)_{S-\Lambda})\mu(\{{}_{(u,v)}y\}\times E(S-\Lambda)|\mathscr{A}(S-\Lambda))$$
$$\mu—a.\ e.$$

证 由于 (ii) 的证法与 (i) 平行．此处只证 (i)．先设 $\mu\in\mathscr{R}(\Omega_s)$。设 F 为$\mathscr{F}_0(S-\Lambda)$ 中的任一柱集（即只依赖于有限多个坐标的集），并取

$$f=I_{\{y\}\times F},\quad y\in E(\Lambda),\quad \Lambda\in\mathscr{S}_f$$

则当 $u\in\Lambda$ 时，利用前一引理得

$$\int_{E(\Lambda)\times F} c(u,y\times x_{S-\Lambda})I_{\{uy\}\times E(S-\Lambda)}(x)\mu(dx)$$
$$=\int_{E(\Lambda)\times F} c(u,x)I_{\{uy\}\times E(S-\Lambda)}({}_ux)\mu(dx)$$
$$=\int_{E(\Lambda)\times F} c(u,x)I_{\{uy\}\times E(S-\Lambda)}(x)\mu(dx)$$
$$=\int_{E(\Lambda)\times F} c(u,{}_uy\times x_{S-\Lambda})I_{\{uy\}\times E(S-\Lambda)}(x)\mu(dx)$$

然后，由单调收敛定理知上式对一切 $F\in\mathscr{F}_0(S-\Lambda)$ 成立．注意 $c(u,y\times(\cdot)_{S-\Lambda})\in\mathscr{F}(S-\Lambda)$ ，便知

$$\int_{E(\Lambda)\times F} c(u,y\times x_{S-\Lambda})\boldsymbol{E}(I_{\{y\}\times E(S-\Lambda)}|\mathscr{F}(S-\Lambda))(x)\mu(dx)$$
$$=\int_{E(\Lambda)\times F} c(u,\ y\times x_{S-\Lambda})\boldsymbol{E}(I_{\{uy\}\times E(S/\Lambda)}/\mathscr{F}(S-\Lambda))(x)\mu(dx)$$

对于一切 $F\in\mathscr{F}_0(S-\Lambda)$ 成立．因此

$$c(u,y\times(\cdot)_{S-\Lambda})\mu(\{y\}\times E(S-\Lambda)|\mathscr{F}(S-\Lambda))$$
$$=c(u,{}_uy\times(\cdot)_{S-\Lambda})\mu(\{{}_uy\}\times E(S-\Lambda)/\mathscr{F}(S-\Lambda))$$
$$\mu—a、e.$$

留意 $\mu(\{y\}\times E(S-\Lambda)|\mathscr{F}(S-\Lambda))$是 $\mathscr{F}(S-\Lambda)$可测函数，其值

于 $x_{S-\Lambda}$ 无关。便证得条件的必要性。为证充分性，只需把上述证明倒回去。 】

(10.5.30) **定理**

(i) 假定$\{c(u,x)\}$满足正性、连续性和四边形条件，则 $\mathscr{R}(\Omega_s)=\mathscr{G}_s$；

(ii) 假定$\{c(u,v,x)\}$满足正性、连续性和三角形条件，则 $\mathscr{R}(\Omega_e)=\mathscr{G}_e$。

证 (*a*) 设 $\mu\in\mathscr{R}(\Omega_s)$，则由 (10.5.29) (i) 知

$$c(u,y\times z)\mu(y\mid z)=c(u,{}_uy\times z)\mu({}_uy\mid z)$$

$$\mu_{S-\Lambda}\text{—}a.\ e.$$

另一方面，由路径无关性及 (10.5.2) 的证明 (*b*) 得

$$(10.5.31)\quad c(u,y\times z)f^{\Lambda}(y\times z)$$

$$=c(u,y\times z)\frac{\overline{q_s}(\theta_\Lambda\times z,\ y\times z)}{q_s(y\times z,\ \theta_\Lambda\times z)}K^{-1}(\Lambda,z)$$

$$=c(u,{}_uy\times z)\frac{\overline{q_s}(\theta_\Lambda\times z,{}_uy\times z)}{\overline{q_s}({}_uy\times z,\theta_\Lambda\times z)}K^{-1}(\Lambda,z)$$

$$=c(u,{}_uy\times z)f^{\Lambda}({}_uy\times z),$$

$$u\in\Lambda\in\mathscr{S}_f,\ y\in E(\Lambda),\ z\in E(S-\Lambda).$$

此处

$$K(\Lambda,z)=\sum_{w\in E(\Lambda)}\frac{\overline{q_s}(\theta_\Lambda\times z,\ w\times z)}{q_s(w\times z,\ \theta_\Lambda\times z)}.$$

由这些注解得到

$$\frac{f^{\Lambda}(y\times z)}{f^{\Lambda}({}_uy\times z)}=\frac{c(u,{}_uy\times z)}{c(u,y\times z)}=\frac{\mu_\Lambda(y\mid z)}{\mu_\Lambda({}_uy\mid z)},$$

$$y\in E(\Lambda),\ \mu_{S-\Lambda}\text{—}a.\ e.$$

因而对于每 $y,\ \tilde{y}\in E(\Lambda)$，我们有

$$\frac{\mu_\Lambda(y\mid z)}{f^{\Lambda}(y\times z)}=\frac{\mu_\Lambda(\tilde{y}\mid z)}{f^{\Lambda}(\tilde{y}\times z)}\equiv a_z,\ \mu_{S-\Lambda}\text{—}a.\ e.$$

由（10.5）得 $a_z=1$，即

$$f^{\Lambda}(\cdot\times z)=\mu_{\Lambda}(\cdot|z)\ ,\ \mu_{S-\Lambda}—a\cdot e.$$

这说明 $\mu\in\mathscr{G}_s$.

反之，若 $\mu\in\mathscr{G}$，则

$$\begin{aligned}\mu_{\Lambda}(\{y\}\mid z)&=\mu(y\}\times E(S-\Lambda)|\mathscr{F}(S-\Lambda)(w\times z)\\&=f^{\Lambda}(y\times z).\end{aligned}$$

于是由（10.5.31）和（10.5.29），（i）知 $\mu\in\mathscr{R}(\Omega_s)$.

(*b*) 关于（ii）的证明是类似的．先设 $\mu\in\mathscr{R}(\Omega_e)$．则由路径无关性和（10.5.2）证明中的最后一式得

$$\begin{aligned}(10.5.32)\quad & c(u,v,y\times z)f_k^{\Lambda}(y\times z)\\&=c(u,v,y\times z)\frac{\overline{q_e}(y_k\times z,y\times z)}{q_e(y\times z,y_k\times z\}}K^{-1}(\Lambda,z,k)\\&=c(u,v,{}_{(u,v)}y\times z)\frac{\overline{q_e}(y_k\times z,{}_{(u,v)}y\times z)}{q_e({}_{(u,v)}y\times z,y_k\times z)}\\&\quad\cdot K^{-1}(\Lambda,z,k)\\&=c(u,v,{}_{(u,v)}\ y\times z)f_k^{\Lambda}({}_{(u,v)}y\times z),\\&\qquad u,v\in\Lambda\in\mathscr{S}_f,\ 0\leqslant k\leqslant|\Lambda|,\ y\in k_k(\Lambda)\\&\qquad z\in E(S-\Lambda).\end{aligned}$$

由此及引理（10.5.29）（ii）得

$$\begin{aligned}&\frac{\mu(\{y\}\times E(S-\Lambda)\ |\mathscr{A}(S-\Lambda))}{f_k^{\Lambda}(y\times(\cdot)_{S-\Lambda})}\\&=\frac{\mu(\{{}_{u,v)}\ y\}\times E(S-\Lambda)|\ \mathscr{A}(S-\Lambda))}{f_k^{\Lambda}({}_{(u,v)}y\times(\cdot)_{S-\Lambda})},\ \mu—a.\ e.\\&\qquad u,v\in\Lambda\in\mathscr{S}_f,\ 0\leqslant k\leqslant|\Lambda|,\ y\in E_k(\Lambda).\end{aligned}$$

由于对每 $\tilde{y}\in E_k(\Lambda)$ 和 $z\in E(S-\Lambda)$，$y\times z\rightsquigarrow\tilde{y}\times z$，由（10.5.9）得

$$\frac{\mu(\{y\}\times E(S-\Lambda)\mid\mathscr{A}(S-\Lambda))}{f_k^{\Lambda}(y\times(\cdot)_{S-\Lambda})}$$

$$=\frac{\mu(\{\tilde{y}\}\times E(S-\Lambda)\mid\mathscr{A}(S-\Lambda))}{f_k^\Lambda(\tilde{y}\times(\cdot)_{S-\Lambda})}$$

$$=\frac{\mu(E_k(\Lambda)\times E(S-\Lambda)\mid\mathscr{A}(S-\Lambda))}{\sum\limits_{\tilde{y}\in E_k(\Lambda)} f_k^\Lambda(\tilde{y}\times(\cdot)_{S-\Lambda})}$$

$$=I_{E_k(\Lambda)}((\cdot)_\Lambda),\qquad \mu\text{—}a.\ e.\quad \tilde{y}\in E_k(\Lambda).$$

从而对每 $\Lambda\in\mathscr{S}_f$ 和 $y\in E(\Lambda)$，

$$\mu(\{y\}\times E(S-\Lambda)\mid\mathscr{A}(S-\Lambda))$$
$$=f_{|y|}^\Lambda(y\times(\cdot)_{S-\Lambda})I_{E_{|y|}(\Lambda)}((\cdot)_\Lambda)$$
$$=f_{|(\cdot)_\Lambda|}^\Lambda(y\times(\cdot)_{S-\Lambda}),\qquad \mu\text{—}a.\ e.$$

这表明 $\mu\in\widetilde{\mathscr{G}}_e$.

反之，如 $\mu\in\widetilde{\mathscr{G}}_e$，则由 (10.5.32) 和 (10.5.14) .

(ii) 得

$$c(u,v,y\times(\cdot)_{S-\Lambda})\mu(\{y\}\times E(S-\Lambda)\mid\mathscr{A}(S-\Lambda))$$
$$=c(u,v,y\times(\cdot)_{S-\Lambda})f_{|(\cdot)_\Lambda|}^\Lambda(y\times(\cdot)_{S-\Lambda})$$
$$=c(u,v,{}_{(u,v)}y\times(\cdot)_{S-\Lambda})f_{|(\cdot)_\Lambda|}^\Lambda({}_{(u,v)}y\times(\cdot)_{S-\Lambda})$$
$$=c(u,v,{}_{(u,v)}y\times(\cdot)_{S-\Lambda})\mu(\{{}_{(u,v)}y\}\times E(S-\Lambda)\mid\mathscr{A}(S-\Lambda)),$$
$$u,v\in\Lambda\in\mathscr{S}_f,\ y\in E(\Lambda)$$

现在，由 (10.5.29) . (ii) 立知 $\mu\in\mathscr{R}(\Omega_s)$. ∎

下面是自旋变相过程的可逆性判准.

(10.5.33) **定理** 设$\{c(u,x)\}$满足正性和连续性条件，则 $\mathscr{R}(\Omega_s)\neq\phi$ 当且仅当 Q_s 是一个势场. 等价地，四边形条件成立.

证 由定理 (10.5.30) (i) 和 (10.5.15) (i) 可见条件是充分的. 往证必要性. 设 $\mu\in\mathscr{R}(\Omega_s)$ ，则对每 $\Lambda\in\mathscr{S}_f$，存在 $y_0\in E(\Lambda)$，使

$$0<\mu(\{y_0\}\times E(S-\Lambda))=\int_{E(S-\Lambda)}\mu(y_0\mid z)\mu_{S-\Lambda}(dz)$$

因而

$$\mu_{S-\Lambda}(z:\ \mu(y_0\mid z)<0)>0.$$

由 (10.5.29) (i)，存在 $z^\Lambda\in E(S-\Lambda)$，使 $\mu(y_0\mid z^\Lambda)>0$ 且

$$\mu({}_uy\mid z^\Lambda)c(u,{}_uy\times z^\Lambda)$$
$$=\mu(y\mid z^\Lambda)c(u,y\times z^\Lambda)\ ,$$
$$u\in\Lambda,\ y\in E(\Lambda).$$

由此及正性条件，得

$$\mu(y\mid z^\Lambda)>0,\ y\in E(\Lambda).$$

利用以上注解可得

(10.5.34)
$$c(u,y\times z^\Lambda)c(v,{}_uy\times z^\Lambda)c(u,{}_{uv}y\times z^\Lambda)$$
$$\cdot c(v,{}_vy\times z^\Lambda)$$
$$=c(v,y\times z^\Lambda)c(u,{}_vy\times z^\Lambda)c(v,{}_{vu}y\times z^\Lambda)$$
$$\cdot c(u,{}_uy\times z^\Lambda)\ ,$$
$$u,v\in\Lambda,\ y\in E(\Lambda).$$

然而，$\{y\times z^\Lambda:\ y\in E(\Lambda),\ \Lambda\in\mathscr{S}_f\}$是E中的稠集．这是因为对于 $\{\Lambda_m\}\subset\mathscr{S}_f$，$\Lambda_m\uparrow S$ 和 $x\in E$，我们有

$$x_{\Lambda_m}\times z^{\Lambda_m}\longrightarrow x.$$

另一方面，对于每 $u,v\in S$，存在 m_0，使当 $m\geqslant m_0$ 时，$\Lambda_m\supset\{u,v\}$．现在，在 (10.5.34) 中取 $\Lambda=\Lambda_m$ 和 $y=x_{\Lambda_m}$，利用连续性条件立知四边形条件成立． ▌

对于排它过程，情况是不同的．首先，我们有

(10.5.35) **定理** 假定$\{c(u,v,x)\}$满足连续性条件．那么，我们总有

$$\mathscr{R}(\Omega_e)\neq\phi.$$

事实上，

$$\nu_0=\delta(\theta,\cdot)\ ,\ \nu_1=\delta(①,\cdot)$$

都属于 $\mathscr{R}(\Omega_e)$. 此处

$$①(u)=1,\ u\in S.$$

证 由引理 (10.5.28). (ii) 立得. ▌

(10.5.36) **注** 上述结果表明：排它过程的可逆性并不能推出相应的场 Q_e 是势场（甚至于零同性条件可以不满足）. 这与自旋变相过程不同. 其原因在于：在于后者，我们总有

(10.5.37) $$\mu_\Lambda(y)\equiv\mu(\{y\}\times E(S-\Lambda))>0,$$
$$\Lambda\in\mathscr{S}_f,\ y\in E(\Lambda).$$

但前述的 ν_0 并不具有这种性质.

(10.5.38) **定义** 如果 $\mu\in\mathscr{P}(E)$ 满足 (10.5.37)，则称之为正的. 全体正的概率测度记为 $\mathscr{P}_+(E)$. 类似地有记号 $\mathscr{R}_+(\Omega_e)$.

(10.5.39) **定理** 设 $\{c(u,v,x)\}$ 满足正性和连续性条件. 若 $\mathscr{R}_+(\Omega_e)\neq\phi$, 则 Q_e 是势场，等价地，三角形条件成立，而且

$$\mathscr{R}_+(\Omega_e)=\mathscr{P}_+(E)\cap\mathscr{G}_e.$$

证 设 $\mu\in\mathscr{R}_+(\Omega_e)$. 由 (10.5.37) 得

$$\mu[x\in E_k(\Lambda)\times E(S-\Lambda):$$
$$\mu(\{y\}\times E(S-\Lambda)|\mathscr{A}(S-\Lambda))(x)>0]>0.$$

于是，由引理 (10.5.29) (ii) 知，存在 $x^{\Lambda,k}\in E$ 和 $y_0\in E_k(\Lambda)$，使得

$$\mu(\{y_0\}\times E(S-\Lambda)|\mathscr{A}(S-\Lambda))(x^{\Lambda,k})>0.$$

而且，对于每 $y\in E_k(\Lambda)$ 和 $u,v\in\Lambda$, 有

$$c(u,v,y\times z^{\Lambda,k})\mu(\{y\}\times E(S-\Lambda)|\mathscr{A}(S-\Lambda))(x^{\Lambda,k})$$
$$=c(u,v,{}_{(u,v)}y\times z^{\Lambda,k})\mu(\{{}_{(u,v)}y\}\times E(S-\Lambda)|\mathscr{A}(S-\Lambda))(x^{\Lambda,k})$$

此处

$$z^{\Lambda,k}=(x^{\Lambda,k})_{S\setminus\Lambda}.$$

因而由正性条件，得

$$\mu(\{y\}\times E(S-\Lambda)\mid \mathscr{A}(S-\Lambda))(x^{\Lambda,k})>0,\ y\in E_k(\Lambda).$$

因此，Q_e 在 $E_k(\Lambda)\times z^{\Lambda,k}$ 上的限制是一个势场。使用 (10.1.12) 和 (10.4.4)．(ii)，我们有

$$\begin{aligned} & c(u,v,y\times z^{\Lambda,k})c(v,w,{}_{(u,v)}y\times z^{\Lambda,k})c(w,u,{}_{(w,u)}y\times z^{\Lambda,k}) \\ = & c(u,w,y\times z^{\Lambda,k})c(w,v,{}_{(u,w)}y\times z^{\Lambda,k})c(v,u,{}_{(v,u)}y\times z^{\Lambda,k}) \\ & \qquad y\in E_k(\Lambda),\ u,v,w\in\Lambda \end{aligned}$$

现在，三角形条件可由连续性条件和

$$\bigcup_{\Lambda\in S_f}\bigcup_{k=0}^{|\Lambda|}E_k(\Lambda)\times\{z^{\Lambda,k}\}\qquad (\text{此处}S_f=\mathscr{S}_f)$$

在 $\mathbf{E}$ 中稠的事实导出。 ▌

下面，我们转入讨论 Gibbs 态（即可逆测度）的唯一性问题。但我们将限于一种特殊情况：

(10.5.40) **定义** 称 $\{c(u,x)\}$ 是紧邻速度函数，如果对于每 $u\in S$，存在 $\partial u\in\mathscr{S}_f$，使得

$$c(u,\cdot)\in\mathscr{F}(u\cup\partial u)\equiv\mathscr{F}_0(u\cup\partial u)\times E(S-\{u\cup\partial u\}).$$

从现在开始，我们总假定 $\{c(u,x)\}$ 是紧邻的．并取 $\{\Lambda_n\}_1^\infty\subset\mathscr{S}_f$，使

$$\Lambda_n=\Lambda_{n-1}\cup\partial\Lambda_{n-1},\ \Lambda_n\uparrow S.$$

而且

(10.5.41) $\quad c(u,\cdot)\in\mathscr{F}(\Lambda_n),\ u\in\Lambda_{n-1}.$

对每 $n\geqslant1$，在 $E(\Lambda_n)$ 中取参考点 θ_{Λ_n}；对每 $w\in E(\Lambda_n)$，取参考路径

$$\{y^{(1)},\ \cdots,y^{(k)}\}\subset E(\Lambda_n)$$

使得

$$\theta_{\Lambda_n}\equiv y^{(0)}\to y^{(1)}\to\cdots\to y^{(k)}\to y^{(k+1)}\equiv w$$

并依 (10.5.11) 的方式定义 $\overline{q_s}(\theta_{\Lambda_n}\times x_{S\setminus\Lambda_n},w\times x_{S\setminus\Lambda_n})$ 和 $\overline{q_s}(w\times x_{S\setminus\Lambda_n},\theta_\Lambda\times x_{S\setminus\Lambda_n})$．考虑到 (10.5.41)，我们可将上述

的$\overline{q_s}$ 改写成 $\overline{q_s}(\theta_{\Lambda_n}\times x_{\partial\Lambda_n},\ w\times x_{\partial\Lambda_n})$ 和 $\overline{q_s}(w\times x_{\Lambda_n},\ \theta_{\Lambda_n}\times x_{\partial\Lambda_n})$。

(10.5.42) **定理** 假定 $\{c(u,x)\}$ 是正的、紧邻的并满足四边形条件。那么，关于 $\{c(u,x)\}$ 的 Gibbs 态集与下述方程的线性无关正解之间是一一对应的：

$$(10.5.43)\qquad x_{n,z}=\sum_{w\in E(\partial\Lambda_n)}\frac{\overline{q_s}(\theta_{\Lambda_n}\times w,\theta_{\Lambda_{n-1}}\times z\times w)}{\overline{q_s}(\theta_{\Lambda_{n-1}}\times z\times w,\theta_{\Lambda_n}\times w)}\times x_{n+1,w}$$

$$z\in E(\partial\Lambda_{n-1}),\ n\geqslant 1,$$

此处$\partial\Lambda_0\equiv\Lambda_1$。当 $y=\tilde{y}$ 时，约定

$$\overline{q_s}(y,\tilde{y})\ /\overline{q_s}(\tilde{y},y)=1.$$

特别地，如果 (10.5.43) 只有一个正解（不计常数因子），则 Gibbs 态是唯一的。

证 首先留意，由于路径无关性，我们可用 $\exp[-\varphi(\theta_{\Lambda_{n-1}}\times z,y\times z)]$ 表示

$$\overline{q_s}(\theta_{\Lambda_{n-1}}\times z,y\times z)\ /\overline{q_s}(y\times z,\theta_{\Lambda_{n-1}}\times z)$$

而不致于发生任何混淆，此处$\varphi(y,z)$ 是场 Q_s 从 y 到 z 所做的功。

(*a*) 设 $\{\overline{x_{n,z}}\}$ 是方程 (10.5.42) 的一个正解。定义

$$(10.5.43)\qquad \mu_n(y\times z)=Z_n^{-1}\exp[-\varphi(\theta_{\Lambda_{n-1}}\times z,y\times z)]\,\overline{x_{n,z}}$$

$$y\in E(\Lambda_{n-1}),\ z\in E(\partial\Lambda_{n-1})\ ,\ n\geqslant 1$$

此处

$$(10.5.44)\qquad Z_n=\sum_{y\in E(\Lambda_{n-1}),z\in E(\partial\Lambda_{n-1})}\exp[-\varphi(\theta_{\Lambda_{n-1}}\times z,y\times z)]\,\overline{x_{n,z}}$$

显然 μ_n 是 $E(\Lambda_n)$ 上的一个概率测度。往证

(b) $\{\mu_n\}_{n\geq 1}$ 是相容的。

由路径无关性，我们有

$$(10.5.45)\quad \varphi(\theta_{\Lambda_n}\times w,\ y\times z\times w)$$
$$=\varphi(\theta_{\Lambda_n}\times w,\theta_{\Lambda_{n-1}}\times z\times w)+\varphi(\theta_{\Lambda_{n-1}}\times z\times w,\ y\times z\times w)$$
$$=\varphi(\theta_{\Lambda_n}\times w,\theta_{\Lambda_{n-1}}\times z\times w)+\varphi(\theta_{\Lambda_{n-1}}\times z,\ y\times z)$$
$$y\in E(\Lambda_{n-1}),\quad z\in E(\partial\Lambda_{n-1}),w\in E(\partial\Lambda_n).$$

$$Z_{n+1}=\sum_{\substack{y\in E(\Lambda_{n-1})\\ z\in E(\partial\Lambda_{n-1})\\ w\in E(\partial\Lambda_n)}}\exp[-\varphi(\theta_{\Lambda_n}\times w,y\times z\times w)]\overline{x}_{n+1,w}$$
$$=\sum_{\substack{y\in E(\Lambda_{n-1})\\ z\in E(\partial\Lambda_{n-1})}}\exp\left[-\varphi(\theta_{\Lambda_{n-1}}\times z,y\times z)\right]\cdot$$
$$\times\sum_{w\in E(\partial\Lambda_n)}\exp\left[-\varphi(\theta_{\Lambda_n}\times w,\theta_{\Lambda_{n-1}}\times z\times w)\right]\overline{x}_{n+1,w}$$
$$=\sum_{\substack{y\in E(\Lambda_{n-1})\\ z\in E(\partial\Lambda_{n-1})}}\exp\left[-\varphi(\theta_{\Lambda_{n-1}}\times z,y\times z)\right]\overline{x}_{n,z}$$
$$=Z_n,\qquad n\geqslant 1.$$

从而由（10.5.45）得

$$\sum_{w\in E(\partial\Lambda_n)}\mu_{n+1}(y\times z\times w)$$
$$=Z_n^{-1}\sum_{w\in E(\partial\Lambda_n)}\exp\left[-\varphi(\theta_{\Lambda_n}\times w,y\times z\times w)\right]\overline{x}_{n+1,w}$$
$$=Z_n^{-1}\sum_{w\in E(\partial\Lambda_n)}\exp[-\varphi(\theta_{\Lambda_n}\times w,\theta_{\Lambda_{n-1}}\times z\times w)]\overline{x}_{n+1,w}$$
$$\times\exp[-\varphi(\theta_{\Lambda_{n-1}}\times z,y\times z)]$$

$$= Z_n^{-1}\exp[-\varphi(\theta_{\Lambda_{n-1}}\times z, y\times z)]\,\overline{x}_{n,z}$$

$$= \mu_n(y\times z),$$

$$y\in E(\Lambda_{n-1}), z\in E(\partial\Lambda_{n-1}),\quad n\geqslant 1.$$

现在，由 Колмогоров 扩张定理知，存在唯一的 $(E,\mathscr{E})$ 上的概率测度 μ，使得 μ 在 $E(\Lambda_n)$ 上的投影是 μ_n。往证

(c) μ 是 Gibbs 态。

我们只需证 μ 是一个可逆测度，然而，这容易由(10.5.43)，路径无关性及下述结果导出：

(10.5.46) **引理** 设 $\mu\in\mathscr{P}(E)$，则 μ 关于 $\{c(u,x)\}$ 可逆的充要条件是

$$(10.5.47)\qquad c(u,y)\mu_n(y) = c(u,{}_uy)\mu_n({}_uy)$$

$$y\in E(\Lambda_n),\ u\in\Lambda_{n-1},$$

此处 μ_n 是 μ 在 $E(\Lambda_n)$ 上的投影。

证 如 μ 是可逆测度，则应用 (10.5.28) (i) 于函数 $f=I_{\{y\}\times E(S\setminus\Lambda_n)}$ $(y\in E(\Lambda_n))$，并注意紧邻性，便得 (10.5.47)。

反之，对于这个 f 和 $u\notin\Lambda_n$ 或 $u\in\Lambda_{n-1}$，容易由 (10.5.47) 导出

$$(10.5.48)\qquad \int\mu(dx)c(u,x)f(x) = \int\mu(dx)c(u,x)f({}_ux)\ .$$

如果 $u\in\Lambda_n-\Lambda_{n-1}=\partial\Lambda_{n-1}$，由 (10.5.47) 可见

$$c(u,y\times z)\mu_{n+1}(y\times z) = c(u,{}_uy\times z)\mu_{n+1}({}_uy\times z)$$

$$z\in E(\Lambda_{n+1}-\Lambda_n),$$

此即

$$\int_{\{y\times z\}\times E(S\setminus\Lambda_{n+1})} c(u,x)\mu(dx)$$

$$= \int_{\{{}_uy\times z\}\times E(S\setminus\Lambda_{n+1})} c(u,x)\mu(dx)\ .$$

对 z 在 $E(\Lambda_{n+1}-\Lambda_n)$ 上求和，便得（10.5.48）．因而由引理（10.5.28）(i) 知 μ 是可逆测度，引理得证。

让我们回到我们的主要证明．

(d) 设 $\mu\in\mathscr{R}(\Omega_s)$，并设 $\tilde{\mu}_n$ 为 μ 在 $E(\Lambda_n)$ 上的投影．则由（10.5.47）得

$$\frac{\tilde{\mu}_{n+1}(\theta_{\Lambda_{n-1}}\times z\times w)}{\tilde{\mu}_{n+1}(\theta_{\Lambda_n}\times w)}=\exp[-\varphi(\theta_{\Lambda_n}\times w,\theta_{\Lambda_{n-1}}\times z\times w)]$$

对 w 在 $E(\partial\Lambda_n)$ 上求和，得

$$\tilde{\mu}_n(\theta_{\Lambda_{n-1}}\times z)$$
$$=\sum_{w\in E(\partial\Lambda_n)}\exp[-\varphi(\theta_{\Lambda_n}\times w,\theta_{\Lambda_{n-1}}\times z\times w)]$$
$$\times\tilde{\mu}_{n+1}(\theta_{\Lambda_n}\times w),$$

从而

$$\tilde{x}_{n,z}\equiv\tilde{\mu}_n(\theta_{\Lambda_{n-1}}\times z),\ z\in E(\partial\Lambda_{n-1}),\ n\geqslant 1$$

是方程（10.5.43）的一个正解．

其次，由（10.5.47）和定理（10.1.12）得

$$\tilde{\mu}_n(y\times z)=\tilde{\mu}_n(\theta_{\Lambda_n}\times z)\exp[-\varphi(\theta_{\Lambda_{n-1}}\times z,y\times z)]$$

$$y\in E(\Lambda_{n-1}),\ z\in E(\partial\Lambda_{n-1})$$

在（10.5.43）和（10.5.44）中以 $\tilde{x}_{n,z}$ 代替 $\bar{x}_{n,z}$，我们得到 $Z_n=1$，$\mu_n=\tilde{\mu}_n$ 对每 $n\geqslant 1$ 成立．于是 μ 与 (b) 中所定义的测度是一样的．

最后，我们只需再证定理所述的对应是一一的．

(e) 设 $\{x_{n,z}^{(i)}: z\in E(\partial\Lambda_{n-1}), n\geqslant 1\}$，$i=1,2$ 是两个正解．如果存在常数 $\alpha>0$，使

（10.5.49）　$x_{n,z}^{(1)}=\alpha x_{n,z}^{(2)}$，$z\in E(\partial\Lambda_{n-1})$，$n\geqslant 1$ 则由（10.5.44）得

$$Z_n^{(1)}=Z_n^{(2)},\ n\geqslant 1,$$

从而由（10.5.43）得

$$\mu_n^{(1)}=\mu_n^{(2)},\ n\geqslant 1,$$

这样，由（*b*）知，$\{x_{n,z}^{(1)}\}$ 和 $\{x_{n,z}^{(2)}\}$ 决定同一Gibbs态。反之，若 $\{x_{n,z}^{(1)}\}$ 和 $\{x_{n,z}^{(2)}\}$ 决定同样的 $\mu\in\mathscr{R}(\Omega_s)$，则作为 μ 在 $E(\Lambda_n)$ 上的投影，$\mu_n^{(1)}$ 和 $\mu_n^{(2)}$ 必定重合。特别地，由（10.5.43），我们有

$$(Z_n^{(1)})^{-1}x_{n,z}^{(1)}=\mu_n^{(1)}(\theta_{\Lambda_{n-1}}\times z)=\mu_n^{(2)}(\theta_{\Lambda_{n-1}}\times z)$$

$$=(Z_n^{(2)})^{-1}x_{n,z}^{(2)},$$

$$z\in E(\partial\Lambda_{n-1}),\ n\geqslant 1,$$

但 $Z_n^{(i)}$ 与 $n\geqslant 1$ 无关，故（10.5.49）必定成立。 ▮

（10.5.50）**例** 设 Φ：$\mathscr{S}_f\to\boldsymbol{R}$ 满足

$$\sum_{u\in B\in S_f}|\Phi(B)|\cdot|B|<\infty.$$ （此式至P389 $S_f=\mathscr{S}_f$）

$$c(u,x)\equiv\exp\Big[\sum_{u\in B\in S_f}\Phi(B)\xi_B(x)\Big]$$

$$\xi_B(x)\equiv\prod_{u\in B}(2x(u)-1),$$

则 Q_s 是有势的，从而 $\mathscr{R}(\Omega_s)=\mathscr{G}_s\neq\phi$。特别地，$V_0(x)\equiv$ $\equiv-\sum_{B\in S_f}\Phi(B)\xi_B(x)$ 是限于

$$E_0\equiv\{x\in E:\{x(u)=1\}\in\mathscr{S}_f\}$$

的势函数。

为证明有势性，我们只需验证四边形条件。由于

$$\frac{c(u,{}_ux)}{c(u,x)}=\exp\Big[\sum_{u\in B\in S_f}\Phi(B)(\xi_B({}_ux)-\xi_B(x))\Big]$$

$$=\exp\Big[-2\sum_{u\in B\in S_f}\Phi(B)\xi_B(x)\Big]$$

我们有

$$\frac{c(v,{}_{uv}x)}{c(v,{}_{u}x)}=\exp\left[-2\sum_{v\in B\in S_f}\Phi(B)\xi_B({}_ux)\right];$$

$$\frac{c(u,{}_{v}x)}{c(u,{}_{uv}x)}=\exp\left[2\sum_{u\in B\in S_f}\Phi(B)\xi_B({}_vx)\right];$$

$$\frac{c(v,x)}{c(v,{}_{v}x)}=\exp\left[2\sum_{v\in B\in S_f}\Phi(B)\xi_B(x)\right].$$

另一方面，

$$\sum_{u\in B\in S_f}\Phi_B(x)(\xi_B({}_vx)-\xi_B(x))$$

$$=\sum_{u,v\in B\in S_f}\Phi_B(x)(\xi_B({}_vx)-\xi_B(x))$$

$$=-2\sum_{u,v\in B\in S_f}\Phi(B)\xi_B(x)$$

关于 u 和 v 对称，因而四边形条件成立。

为证 V_0 是 E_0 上的势。由定理（10.1.12），只需验证

$$c(u,x)\exp[V_0(x)]=c(u,{}_ux)\exp[V_0({}_ux)]\qquad x\in E_0,u\in S,$$

但这可由

$$V_0(x)-V_0({}_ux)=\sum_{B\in S_f}\Phi(B)(\xi_B({}_ux)-\xi_B(x))$$

$$=\sum_{u\in B\in S_f}\Phi(B)(\xi_B({}_ux)-\xi_B(x))$$

$$=\log(c(u,{}_ux)/c(u,x))$$

导出。

（10.5.51）**例** 在上例中，取 $S=\boldsymbol{Z}=\{0,\pm1,\cdots\}$ 和

$$\Phi(B)=\begin{cases}\lambda>0, & B=\{n,n+1\},\ n\in\boldsymbol{Z},\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

即

$$c(n,x)=\exp\left[\sum_{|m-n|=1}(2x(m)-1)(2x(n)-1)\right],$$

则 $|\mathscr{R}(\Omega_s)|=|\mathscr{G}_s|=1$，即 Gibbs 态唯一。

证 我们使用定理(10.5.42) 和 (10.5.50)．取 $\Lambda_1=\partial\Lambda_0=\{0\}$, $\partial\Lambda_n=\{-n,n\}$, $\Lambda_{n+1}=\Lambda_n\cup\partial\Lambda_n$, $n\geqslant1$. 由于

$$V_0(\theta_{\Lambda_n}\times w)-V_0(\theta_{\Lambda_{n-1}}\times z\times w)$$

$$=\sum_{BS_f}\Phi(B)[\xi_B(\theta_{\Lambda_{n-1}}\times z\times w)-\xi_B(\theta_{\Lambda_n}\times w)]$$

$$=\sum_{\substack{B\cap\partial\Lambda_{n-1}\neq\phi\\ BS_f}}\Phi(B)[\xi_B(\theta_{\Lambda_{n-1}}\times z\times w)-\xi_B(\theta_{\Lambda_n}\times w)]$$

$$=4\lambda[z(-n)w(-n-1)+z(n)w(n+1)-z(-n)-z(n)]$$

$$z\in\partial\Lambda_{n-1},\quad w\in\partial\Lambda_n,$$

从而

$$\exp[-\varphi(\theta_{\Lambda_n}\times w,\ \theta_{\Lambda_{n-1}}\times z\times w)]$$

$$=\exp[V_0(\theta_{\Lambda_n}\times w)-V_0(\theta_{\Lambda_{n-1}}\times z\times w)]$$

$$=\exp[4\lambda(z(-n)w(-n-1)+z(n)w(n+1)-z(-n)-z(n)].$$

方程 (10.5.43) 化为

$$(10.5.52)\qquad X_n=AX_{n+1},\quad n\geqslant1,$$

此处

$$X_n=\begin{pmatrix}x_{n,1}\\x_{n,2}\\x_{n,3}\\x_{n,4}\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\e^{-4\lambda}&1&e^{-4\lambda}&1\\e^{-4\lambda}&e^{-4\lambda}&1&1\\e^{-8\lambda}&e^{-8\lambda}&e^{-4\lambda}&1\end{pmatrix}$$

而且我们使用了 1，2，3，4 表示 $E(\partial\Lambda_n)$ 中的元素 (0,0)，(0,1)，(1,0) 和 (1, 1)．注意 A^{-1} 的特征根是：

$$\alpha_1=(1-e^{-2\lambda})^{-1},\qquad \alpha_2=(1-e^{-2\lambda})^{-1},$$

$$\alpha_3 = \alpha_4 = (1 - e^{-4\lambda})^{-1}.$$

我们得到

$$x_{n+1,i} = a_i\alpha_1^n + b_i\alpha_2^n + (c_i + d_i n)\,\alpha_3^n,$$

$$i = 1,2,3,4;\ n \geqslant 1,$$

此处 a_i, b_i, c_i 和 d_i 是依赖于 X_1 的常数。另一方面，容易由（10.5.52）得到

$$x_{n,i} \leqslant x_{n,1} \leqslant x_{n-1,1} \leqslant \cdots \leqslant x_{1,1},$$

$$i = 1,2,3;\ n \geqslant 1.$$

这导致

$$b_i = c_i = d_i = 0,\ i = 1,2,3,4,$$

从而

$$x_{n+1,i} = a_i\alpha_1^n,\ i = 1,2,3,4;\ n \geqslant 0.$$

代入（10.5.52），我们得到

$$a_2 = e^{-2\lambda}a_1,\ a_3 = e^{-2\lambda}a_1,\ a_4 = e^{-4\lambda}a_1,$$

因而

$$x_{n+1,1} = (1 + e^{-2\lambda})^{-2^n};$$

$$x_{n+1,2} = x_{n+1,3} = e^{-2\lambda}(1 + e^{-2\lambda})^{-2^n};$$

$$x_{n+1,4} = e^{-4\lambda}(1 + e^{-2\lambda})^{-2^n},\ n \geqslant 0.$$

因此

$$|\mathscr{R}(\Omega_s)| = |\mathscr{G}_s| = 1.$$

进一步，把这个解代到（10.5.43），我们还可求出这个唯一的 Gibbs 态在 $E(\Lambda_n)$ 上的投影：

$$\mu_n(y \times z) = \frac{e^{-2\ |z|\ \lambda}}{(1 + e^{-2\lambda})^{2(\ -1)}} \cdot Z_n^{-1}$$

$$\cdot \exp\left[\lambda \sum_{k=-n}^{n} \left(\xi_{\{k,k+1\}}(\theta_{\Lambda_{n-1}} \times z) - \xi_{\{k,k+1\}}(y \times z)\right)\right]$$

$$y \in E(\Lambda_{n-1}),\ z \in E(\partial\Lambda_{n-1}),\ n \geqslant 1,$$

其中

$$|z|=|\{m\in\partial\Lambda_{n-1}:\ z(m)=1\}|.$$

而 Z_n 为归一化常数，其定义见（10.5.44）． ▌

§10.6 补充与注记

场论最先由侯振挺、陈木法［1］引进．那里只限于离散状态空间，后来，严士健、陈木法、丁万鼎［1］作了推广．前三节基本上来自侯、陈［1］，后两节取自严、陈、丁［1］．也参考了严士健［1］．

关于自旋变相过程的可逆性，在紧邻的条件下，丁万鼎和陈木法［1］给出了四边形条件作为可逆的充要条件．这里排除"紧邻条件"的工作来自唐守正［1］．严、陈、丁［1］文中，对自旋变相过程和排它过程的可逆性作了统一的处理，那里包含了更多的材料．在此文的基础上，出现了好些工作．例如戴永隆［1］，李世取［1］，任开隆［1］和曾文曲［1］．

关于定理（10.5.39），逆命题："若 Q_e 有势，则 $\mathscr{R}_+(\Omega_e)\neq\phi$" 似乎也应成立．但我们尚未能证明之．

本章所讨论的场论，本质上只适应于局部离散的状态空间．对于连续状态空间，至少存在指数式密度函数的情况，应该也有类似的结果．但尚未认真研究过．Fukushima 和 Stroock［1］中有些一般性结果．注意对于一维扩散过程，可逆测度必定有指数式密度函数．详见龚光鲁、钱敏［1］．

第十一章　环流分解

我们已经详细地研究了可逆过程．可逆性的实质在于细致平衡．当一个系统处于定态（即有平稳分布）但非细致平衡时，自然要问：这个系统以何种方式达到定态？

请看下述例子：设状态空间为 $E=\{1,2,3\}$，Q矩阵为

$$Q=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

相应的 Q 过程是 $P(t)=(P_{ij}(t):\ i,\ j\in E)$：

$$P_{11}(t)=P_{22}(t)=P_{33}(t)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}e^{-3t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}\,t}{2}\right);$$

$$P_{12}(t)=P_{23}(t)=P_{31}(t)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}e^{-3t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{2\pi}{3}\right);$$

$$P_{13}(t)=P_{32}(t)=P_{21}(t)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}e^{-3t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{2\pi}{3}\right);$$

它有平稳分布 $\mu_1=\mu_2=\mu_3=1/3$．由于

$$\mu_1 q_{12}-\mu_2 q_{21}=\mu_2 q_{23}-\mu_3 q_{32}=\mu_3 q_{31}-\mu_1 q_{31}=1/3$$

$Q=(q_{ij})$有如下环流

$$① \xrightarrow{1/3} ② \xrightarrow{1/3} ③ \xrightarrow{1/3} ①$$

另一方面，对于每一个 t，我们有

$$\mu_1 P_{12}(t)-\mu_2 P_{21}(t)=\mu_2 P_{23}(t)-\mu_3 P_{32}(t)$$

$$=\mu_3 P_{31}(t)-\mu_1 P_{13}(t)$$

$$\equiv r(t)=(2\sqrt{3}/9)e^{-3t/2}\sin\left(\sqrt{3}\,t/2\right)$$

当 $r(t)\neq 0$ 时，我们也有如上所示的环流．只是环流方向可

能不同。此例表明：系统是通过环流达到定态的。另一方面，$r(2\pi/\sqrt{3})=0$，因此，在时刻 $t=2\pi/\sqrt{3}$，环流消失。这又说明：对于不同的时刻，环流分解可以不同。甚至可能出现这种情况：对于某时刻 t_1，有无穷多个环流；而对于另一时刻 t_2，则一个环流也没有。然而，这种现象并不是杂乱无章的。我们将证明，在某些条件下，环流分解是几乎稳定的。

我们也将讨论可逆性与熵产生率之间的关系。

§11.1 可逆性与熵产生率

设 $X=(X_t;\ t\geqslant 0)$ 是具有初分布 μ 和转移函数 $P(t,x,A)$ $(t\geqslant 0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E})$ 的马氏过程。记其绝对分布为

(11.1.1) $P(t,A)=\int\mu(dx)P(t,x,A),\quad t\geqslant 0, A\in\mathscr{E}$

则由定理（7.1.6）立得

(11.1.2) **引理** $X=(X_t)$可逆的充要条件是

(11.1.3)
$$\int_A P(s,dx)P(t,x,B)=\int_B P(s,dx)P(t,x,A),\quad s,t\geqslant 0,\ A\in\mathscr{E}.$$

(11.1.4) **定义** 称满足上式的 $P(t,x,A)$ 关于 μ 强可逆。类似地，称满足

(11.1.5)
$$\int_A P(s,dx)q(x,B)=\int_B P(s,dx)q(x,A),\quad A,B\in\mathscr{E},\ s\geqslant 0$$

的 q 对 $q(x)-q(x,\cdot)$关于 μ 强可逆。

(11.1.6) **定理**

(i) 强可逆$\Longrightarrow$可逆；

(ii) 如 $P(t,x,A)$ 强可逆，则相应的 q 对亦然；

(iii) 如 $P(t,x,A)$ μ 几乎不断，则

强可逆$\Longleftrightarrow$可逆。

证 (i) 是显然的。仿定理（7.1.9）的证法可证 (ii)．(iii) 是因

$$\int_A P(s, dx)\, P(t, x, B)$$

$$=\int_A\left(\int\mu(dy)\, P(s, y, dx)\right)P(t, x, B)$$

$$=\int_A \mu(dx)\, P(s, x, E)\, P(t, x, B)$$

$$\doteq\int_A \mu(dx)\, P(t, x, B) \quad \blacksquare$$

令

$$J_{\mu,p}(t, A, B)=\int_A P(t, dx) q(x, B)-\int_B P(t, dx)\, q(x, A)$$

$$K_{\mu,p}(t, A, B)=\log\left[\int_A P(t, dx) q(x, B)\Big/\int_B P(t, dx)\, q(x, A)\right]$$

$$G(\mu, P)=\bigvee_{t>0, B\in E} J_{\mu,p}(t, A, B)\, K_{\mu,p}(t, A, B) \quad B\in\mathscr{E}.$$

（11.1.7）**定义** 称 $G(\mu,P)$ 为 $P(t,x,A)$ 关于 μ 的熵产生率。

（11.1.8）**定理**

(i) $G(\mu,P)\geqslant 0$；

(ii) $G(\mu, P)=0$ 当且仅当 $q(x)-q(x,\cdot)$ 关于 μ 强可逆；

(iii) $G(\mu,P^{\min})=0$ 当且仅当 $P^{\min}(t, x, A)$ 关于 μ 强可逆；等价地，$q(x)-q(x,\cdot)$ 关于 μ 强可逆。

证 断言 (i) 和 (ii) 是明显的. 由此, 仿定理 (7.2.1) 的证法可证 (iii). 】

(11.1.9) **定理** 设 $P(t,x,A)$ 是保守 q 过程, 满足向前方程且 $G(\mu,P)=0$. 那么, q 过程在 μ 等价意义下唯一, 而且 $P(t,x,A)$ 关于 μ 强可逆.

证 以 $P(\lambda,A)$ 表 $P(t,A)$ 的拉氏变换. 则

$$P(\lambda, A)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int P(t, x, A)\mu(dx)dt=$$

$$=\int P(\lambda, x,A)\mu(dx)$$

$$=\int\left[\int P(\lambda, x, dy)\int_A \frac{q(y,dz)}{\lambda+q(z)}+\frac{\delta(x,A)}{\lambda+q(x)}\right]\mu(dx)$$

$$=\int_A \frac{\mu(dx)}{\lambda+q(x)}+\iint\mu(dx)P(\lambda, x, dy)\int_A\frac{q(y,dz)}{\lambda+q(z)}$$

$$=\int_A \frac{\mu(dx)}{\lambda+q(x)}+\int P(\lambda, dy)\int_A\frac{q(y,dz)}{\lambda+q(z)}$$

$$=\int_A \frac{\mu(dx)}{\lambda+q(x)}+\int P(\lambda, dy)\, q\,(I_A/(\lambda+q(\cdot)))(y).$$

此处

$$(qf)(y)=\int f(z)\, q(y, dz).$$

由定理 (11.1.8). (ii) 得

$$\int_A P(\lambda, dx)\, q(x, B)=\int_B P(\lambda, dx)\, q(x, A),$$

$$\lambda>0,\ A,\ B\in\mathscr{E}.$$

由此及单调类定理得

$$\int f(x)\, P(\lambda, dx)\, (qh)(x)=\int h(x)\, P(\lambda, dx)\, (qf)(x),$$

$$\lambda>0,\ f, h\in\mathscr{E}_+.$$

从而

$$P(\lambda, A)=\int_A \frac{\mu(dx)}{\lambda+q(x)}+\int_A \frac{q(x,E)}{\lambda+q(x)} P(\lambda, dx)$$

$$=\int_A \frac{\mu(dx)}{\lambda+q(x)}+P(\lambda, A)-\int_A P(\lambda, dx)\frac{\lambda}{\lambda+q(x)},$$

即

$$\int_A \frac{\mu(dx)}{\lambda+q(x)}=\int_A \frac{\lambda P(\lambda, dx)}{\lambda+g(x)}$$

或

$$\mu(A)=\lambda P(\lambda, A), \quad \lambda>0, \ A\in\mathscr{E}.$$

另一方面，

$$|P(t, A)-P(s, A)|$$

$$\leqslant\int\mu(dx)\,|P(t, x, A)-P(s, x, A)|$$

表明 $P(\cdot, A)$ 连续．故由拉氏变换的唯一性定理得

$$(11.1.10) \qquad \mu(A)=P(t, A), \ t\geqslant 0, \ A\in\mathscr{E},$$

特别

$$\int P(t, x, E)\,\mu(dx)=P(t, E)=\mu(E)=1,$$

故

$$P(t, \cdot, E)=1, \qquad \mu\text{—}a.e.$$

最后，由定理（11.1.8）．(ii)及(11.1.10) 知 $q(x)-q(x,\cdot)$ 关于 μ 可逆，从而 $P^{\min}(t,x,A)$ 也关于 μ 可逆．因而

$$\int_A P(s, dx)\,P(t, x, B)$$

$$=\int_A \mu(dx)\,P(t, x, B)$$

$$=\int_A \mu(dx)\,P^{\min}(t, x, B)$$

$$=\int_B \mu(dx)\,P^{\min}(t, x, A)$$

$$= \int_B P(s, dx) P(t, x, A), \quad s, t \geq 0, \ A, B \in \mathscr{E}.$$ ▌

(11.1.11) **定理** 对于给定的保守 q 对 $q(x) - q(x, \cdot)$，存在强可逆 q 过程和存在熵产生率为零的 q 过程的充要条件都是此 q 对可逆。

证 必要性显然。往证充分性。因 q 对保守，故由定理(7.2.8)知，我们总可以构造出一个 μ 几乎不断的 q 过程。但由(11.1.6)知，此时可逆与强可逆等价。故强可逆 q 过程必定存在。 ▌

§ 11.2 环流分解的稳定性

(11.2.1) **定义** 称 $R = (r_{ij}: 1 \leq i, j \leq n)$ 为一个环流矩阵，如果存在两两不同的 $i_1, \cdots, i_k$ $(k \geq 3)$ 和 $a > 0$，使得

$$r_{ij} = \begin{cases} a, & i = i_l, \ j = i_{l+1}, \ l = 1, 2, \cdots, k \ (i_{k+1} \equiv i_1), \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

此时，称 $[i_1, \cdots, i_k, i_1]$ 为 R 的环流圈，称 $i_1 \to i_2 \to \cdots \to i_k \to i_1$ 为 R 的环流方向，而称 a 为环流量。

(11.2.2) **定义** 称

$$c(t, A, B) \equiv \left[\int_A \mu(dx) P(t, x, B) - \int_B \mu(dx) P(t, x, A) \right]^+$$

为在时刻 t 从 A 到 B 的概率流。

(11.2.3) **定义** 设 $P(t, x, A)$ 是以 μ 为平稳分布的不断的跳过程，如果

$$\int_A \mu(dx) P(t, x, B) = \int_B \mu(dx) P(t, x, A)$$

$$A, B \in \mathscr{E}.$$

则称 t 为 $(P(t))$ 的一个细致平衡点。否则称为非细致平衡点。

(11.2.4) **定理** 设 $P(t)$ 是以 μ 为平稳分布的跳过程，

则

(i) 细致平衡点或者只有一个（即 $t=0$），或者有无穷多个；

(ii) 非细致平衡点或者不存在，或者是非空开集；

(iii) 如 $P(t)$ 不可逆，则细致平衡点在 $[0,\infty)$ 中不稠；

(iv) 如 q 对 $q(x)-q(x,\cdot)$ 关于 μ 不可逆，则对于每一个 q 过程 $P(t)$，存在 $\delta>0$，使得每一个 $t\in(0,\delta)$ 都是 $P(t)$ 的非细致平衡点。

证 (a)由于 $P(0,x,A)=\delta(x,A)$ 故 $t=0$ 是一个细致平衡点。如果某 $t>0$ 是一个细致平衡点，则由 $K-C$ 方程知，一切 nt $(n\geqslant1)$ 都是细致平衡点。此即是 (i)。

(b) 如果 $P(t)$ 可逆，则不存在非细致平衡点。否则，必定存在 $t_0>0$ 和 $A,B\in\mathscr{E}$，使 $c(t_0,A,B)>0$。另一方面，对于固定的 A 和 B，$c(\cdot,A,B)$ 连续，从而在 t_0 的某邻域内必有 $c(\cdot,A,B)>0$。这表明非细致平衡点是开集。

(c) 如 (iii) 不真，则由 $P(t,x,A)$ 关于 t 的连续性导致 $P(t)$ 可逆。

(d) 若存在细致平衡点列 $\{t_n\}$，$t_n\downarrow0$，则由定理 (7.1.9) 的证法可证 q 对可逆。故 (iv) 成立。 ∎

(11.2.5) **假设** 从现在起，我们假设所给的 q 对 $q(x)-q(x,\cdot)$ 是有界、保守的，唯一的 q 过程以 μ 为平衡分布。

我们将取定 $\mathscr{E}$ 的一个可测划分 $\{A_i\}_1^\infty$。

在 $b\mathscr{E}$ 上赋上确界范数，我们得到一个赋范空间。仍然记作 $b\mathscr{E}$。定义

$$\Omega f(x)=\int q(x,dy)f(y)-q(x)f(x)$$

$$\hat{\Omega}=\Omega/\|q\|+I$$

此处I为$_b\mathscr{E}$到自身的恒等算子，$\|\cdot\|$为上确界范数．那么，我们有

(11.2.6) **引理** Ω和$\hat{\Omega}$都是从$_b\mathscr{E}$到自身的有界线性算子，

$$\|\Omega\| \leqslant 2\|q\| \quad, \quad \|\hat{\Omega}\| \leqslant 3.$$

$\hat{\Omega}$还是一个正算子．如$0\leqslant f_m \uparrow f$，$f_m$，$f\in {}_b\mathscr{E}$，则对于每$x\in E$和$n\geqslant 1$，

$$\Omega^n f_m(x) \longrightarrow \Omega^n f(x), \quad m\to\infty.$$

证 我们只证末项断言．当$n=1$时，

$$\Omega f_m(x) = \int q(x, dy) f_m(y) - q(x) f_m(x)$$

$$\longrightarrow \int q(x, dy) f(y) - q(x) f(x), \quad m\to\infty.$$

设断言对n正确，则由

$$\|\Omega^n f_m\| \leqslant 2^n \|q\|^n \|f_m\| \leqslant 2^n \|q\|^n \|f\|,$$

$$\Omega^{n+1} f_m(x) = \int q(x, dy)(\Omega^n f_m(y)) - q(x)\Omega^n f_m(x)$$

以及控制收敛定理，得

$$\Omega^{n+1} f_m(x) \longrightarrow \Omega^{n+1} f(x), \quad m\to\infty. \quad \blacksquare$$

(11.2.7) **引理** 对于固定的A和B，作为t的函数，

$$\int_A \mu(dx) P(t, x, B)$$

可延拓成解析函数．

证 只需注意如下事实：

$$\int_A \mu(dx) P(t, x, B)$$

$$= \int_A \mu(dx) e^{t\Omega} I_B(x)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \int_A (\Omega^n I_B)(x) \mu(dx)$$

以及

$$\left|\int_A (\Omega^n I_B)(x)\,\mu(dx)\right| \leqslant (2\|q\|)^n \mu(AB)$$

$$\leqslant (2\|q\|)^n. \qquad \rule{0.5em}{1em}$$

下述结果是定理（11.2.4）的补充.

（11.2.8）推论 在（11.2.5）之下，如果$P(t, x, A)$关于μ不可逆，则可能除了$[0,\infty)$中的一个孤立点集而外，每一个$t\in(0,\infty)$都是一个非细致平衡点.

证 由不可逆性知，存在$t_0>0$和A_0，$B_0\in\mathscr{E}$使

$$\int_{A_0}\mu(dx)\,P(t_0,x,B_0)\neq\int_{B_0}\mu(dx)\,P(t_0,x,A_0).$$

命

$$\Lambda=\left\{t: \int_A\mu(dx)\,P(t,x,B)=\int_B\mu(dx)\,P(t,x,A),\right.$$

$$\left.A,\ B\in\mathscr{E}\right\}$$

则由定理（11.2.4）知，或者$\Lambda=\{0\}$，或者Λ是一个无穷集。在第二种情况下，注意到

$$\Lambda\subset\left\{t: \int_{A_0}\mu(dx)\,P(t,x,B_0)=\int_{B_0}\mu(dx)\,P(t,x,A_0)\right\}.$$

我们的结论便可由引理（11.2.7）和如下事实导出：

设Λ是含有收敛子列的无穷集. 如果两个解析函数f和g在Λ上重合，则这两个解析函数恒等.

（11.2.9） **引理** 在假设（11.2.5）之下，我们有

$$\sum_i \Omega^n I_{A_j}(x)=0,$$

$$\sum_i |\hat{\Omega}^n I_{A_j}(x)|\leqslant 3^n,$$

对于一切$x\in E$和$n\geqslant1$的成立.

证 由引理（11.2.6）知，$\Omega^n(n\geqslant1)$是有界线性算子，

$$\sum_i \Omega^n I_{A_i}(x) = (\Omega^n \sum_i I_{A_j})(x) = (\Omega^n 1)(x)$$

$$= \Omega^{n-1}(q(\cdot, E) - q(\cdot))(x) = 0;$$

又 $\hat{\Omega}^n$ $(n \geqslant 1)$ 是正有界线性算子且 $\|\hat{\Omega}\| \leqslant 3$,

$$\sum_i |\hat{\Omega}^n I_{A_j}(x) = \sum_i \hat{\Omega}^n I_{A_i}(x) = (\hat{\Omega}^n 1)(x)$$

$$\leqslant \|\hat{\Omega}\|^n \leqslant 3^n. \qquad \blacksquare$$

(11.2.10) **引理** 在假设 (11.2.5) 之下，对于每 $f \in {}_b\mathscr{E}$ 和 $n \geqslant 1$，我们有

$$\int \mu(dx)\, \Omega^n f(x) = 0.$$

证 由 $P(t)$ 的平稳性得

$$0 = \int \mu(dx) \frac{P(t, x, A) - \delta(x, A)}{t}$$

$$= \int_{A^c} \mu(dx)\, P(t, x, A)/t - \int_A \mu(dx)\, [1 - P(t, x, \{x\})]/t$$

$$+ \int_A \mu(dx)\, P(t, x, A - \{x\})/t.$$

现在，利用

$$0 \leqslant \frac{P(t, x, B)}{t} \leqslant \frac{1 - P(t, x, \{x\})}{t} \leqslant q(x) \leqslant \|q\|$$

和控制收敛定理，得

$$0 = \int_{A^c} \mu(dx)\, q(x, A) - \int_A \mu(dx) q(x) + \int_A \mu(dx) q(x, A)$$

$$= \int \mu(dx)\, q(x, A) - \int \mu(dx) \int_A \delta(x, dy)\, q(y)$$

$$= \int \mu(dx)\, \Omega I_A(x), \qquad A \in \mathscr{E}.$$

这表明结论对于 $n=1$ 成立。进而，由引理 (11.2.6) 和单调类定理得

$$\int \mu(dx)\, \Omega f(x) = 0, \quad f \in {}_b\mathscr{E}.$$

另一方面，由引理（11.2.6）得

$$\Omega^n f \in {}_b\mathscr{E}, \qquad f \in {}_b\mathscr{E},\ n \geqslant 1.$$

因此

$$\begin{aligned}&\int \mu(dx)\, \Omega^{n+1} f(x)\\ =&\int \mu(dx)\, (\Omega(\Omega^n f))(x) = 0.\end{aligned}$$ ▌

定义

$$c_{ij}^{(n)} = \left[\int_{A_i} \mu(dx)\, \hat{\Omega}^n I_{A_j}(x) - \int_{A_j} \mu(dx) \hat{\Omega}^n I_{A_i}(x)\right]^+,$$

$$d_{ij}^{(n)} = \left(\int_{A_i} \mu(dx) \hat{\Omega}^n I_{A_j}(x)\right) \wedge \left(\int_{A_j} \mu(dx) \hat{\Omega}^n I_{A_i}(x)\right)$$

由引理（11.2.6）立知

$$d_{ij}^{(n)} \geqslant 0, \qquad i,\ j,\ n \geqslant 1.$$

（11.2.11）**引理** 对一切 i，j 和 n，我们有

(i) $c_{ij}^{(n)} \geqslant 0$； (ii) $c_{ij}^{(n)} c_{ji}^{(n)} = 0$；

(iii) $\sum_j (c_{ji}^{(n)} - c_{ij}^{(n)}) = 0$； (iv) $\sum_{i,j} c_{ij}^{(n)} < \infty$.

证 头两项断言是显然的．由引理（11.2.9）和（11.2.01）得

$$\begin{aligned}&\sum_j (c_{ji}^{(n)} - c_{ij}^{(n)})\\ =&\sum_j \left(\int_{A_i} \mu(dx)\, \hat{\Omega}^n I_{A_j}(x) - \int_{A_j} \mu(dx) \hat{\Omega}^n I_{A_i}(x)\right)\\ =&\int_{A_i} \mu(dx) \sum_j (\Omega/\|q\| + I)^n I_{A_j}(x)\\ &\quad - \int \mu(dx)\, (\Omega/\|q\| + I)^n I_{A_i}(x)\\ =&\int_{A_i} \mu(dx) \sum_j I_{A_j}(x) - \int \mu(dx)\, I_{A_i}(x) = 0\end{aligned}$$

这证得（iii）．至于（iv），由引理（11.2.10）得

$$\sum_{i,j} c_{ij}^{(n)} \leqslant 2 \sum_{i,j} \left| \int_{A_j} \mu(dx) \hat{\Omega}^n I_{A_i}(x) \right|$$

$$\leqslant 2\int \mu(dx) \sum_{i} \left| \hat{\Omega}^n I_{A_i}(x) \right| \leqslant 2 \cdot 3^n < \infty.$$ ∎

(11.2.12) **引理** 设矩阵 $C=(c_{ij})$ 满足上述引理中的条件(i)—(iv)．则必有如下分解：

$$C=\sum_{k\in H} R_k.$$

此处 H 为至多可列集。约定空集上的 $\sum$ 为零矩阵．对每 $k\in H$，R_k 是一个环流矩阵．

证 (a) 先考虑 C 为有限阶矩阵情形，无妨设 $C\neq 0$．此时存在 i 和 i_1，使 $c_{ii_1}>0$．然后由条件(ii)和(iii)知，必定存在 $i_2\neq i, i_1$ 使 $c_{i_1 i_2}>0$．如此继续，由于只有有限多个元素，因而有限步必须回到 i．这样，存在 $m\geqslant 2$ 使

$$c_{ii_1} c_{i_1 i_2} \cdots c_{i_{m-1} i_m} c_{i_m i} > 0,$$

记

$$a_1=\min\{c_{ii_1}, \cdots, c_{i_m i}\}>0$$

并命

$$r_{jk}^{(1)}=\begin{cases} a_1, \text{如 } j=i_l,\ k=i_{l+1},\ l=0, \cdots, m+1, \\ \quad i_0=i,\ i_{m+1}=i, \\ 0, \text{其它}. \end{cases}$$

则 $R_1=(r_{jk}^{(1)})$ 是一个环流矩阵．

其次，命

$$C_1=C-R_1$$

则 C_1 也满足前述条件(i)—(iv)，而且 C_1 的非零元素至少比 C 少一个．仿上，我们可从 C_1 中分解出 R_2．如此继续下去，有限步可以完成．

(b) C 为无穷矩阵情形．我们要将它归结为(a)．固定

$n\geqslant 3$. 以下无妨设指标集为

$$\{1,\ 2,\ \cdots\}.$$

命

$$_nc_{ij}=c_{ij},\qquad 如\ i,\ j<n,$$

$$_nc_{in}=\left[\sum_{j\geqslant n}(c_{ij}-c_{ji})\right]^+,\quad i<n,$$

$$_nc_{nj}=\left[\sum_{i\geqslant n}(c_{ij}-c_{ji})\right]^-,$$

$$_nc_{nn}=0.$$

并记

$$n^*=\{n,\ n+1,\ \cdots\},$$

则可视 $C^{(n)}=({}_nc_{ij}:\ i,\ j\leqslant n)$ 为 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n-1,\ n^*\}$ 上的矩阵. 依 (a)，可对 $C^{(n)}$ 作分解:

$$C^{(n)}=\sum_{k\in H_1}R_k+\sum_{k\in H_2}\widetilde{R}_k,$$

其中 R_k 是不含 n^* 的环流矩阵，而 $\widetilde{R}_k$ 是含 n^* 的环流矩阵。但 $\widetilde{C}_n\equiv C-\sum_{k\in H_1}R_k$ 也满足条件 (i) — (iv)。依上述方法，可对 $\widetilde{C}_n$ 在 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ (n+1)^*\}$ 上作分解. 如此继续下去. 条件 (iv) 将保证

$$\lim_{n\to\infty}\widetilde{C}_n=0.$$

我们略去这些证明的细节. 】

下面是本节的主要结果

(11.2.13) **定理** 设 $q(x)-q(x,\cdot)$ 是一个有界的保守 q 对，相应的 q 过程 $P(t)$ 以 μ 为平稳分布. 又设 $\{A_i\}_1^\infty$ 是 $\mathscr{E}$ 的一个可测划分. 定义

$$a_{ij}(t)=\int_{A_i}\mu(dx)\,P(t,\ x,\ A_j),\quad t\geqslant 0$$

则 $A(t)=(a_{ij}(t))$ 可以分解成两部分：

$$A(t)=D(t)+\sum_{k\in H}R_k(t)$$

其中 $D(t)$（它是一个对称矩阵）是细致平衡部分；$\sum\limits_{k\in H}R_k(t)$ 是环流部分，每一个 $R_k(t)$ 是一个环流矩阵；H 至多可列，但可以是空集。而且，当 t 变动时，可能除了 $[0,\infty)$ 中的一个可列集而外，每一个 $R_k(t)$ 的环流圈不变（但环流方向和环流量可以变动）。换言之，环流分解是几乎稳定的。

证 因为

$$a_{ij}(t)=\int_{A_i}\mu(dx)\,e^{t\Omega}\,I_{A_j}(x)$$

$$=e^{-t\|q\|}\int_{A_i}\mu(dx)\,e^{t\|q\|\hat{\Omega}}I_{A_j}(x)$$

$$=e^{-t\|q\|}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t\|q\|)^n}{n!}\int_{A_i}\mu(dx)\hat{\Omega}^n I_{A_j}(x)\ ,$$

从而

$$A(t)=e^{-t\|q\|}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t\|q\|)^n}{n!}[D^{(n)}+C^{(n)}],$$

其中

$$D^{(n)}=(d_{ij}^{(n)})\ ,\quad n\geqslant 0,$$

$$C^{(n)}=(c_{ij}^{(n)})\ ,\quad n\geqslant 1,\quad C^{(0)}=0.$$

这些矩阵都不依赖于 t。$D^{(n)}$ 显然是对称矩阵。因此，

$$D(t)\equiv e^{-t\|q\|}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t\|q\|)^n}{n!}D^{(n)}$$

也是对称矩阵。另一方面，由引理（11.2.11）和（11.2.12），我们有如下的环流分解：

$$C^{(n)}=\sum_{l\in H_n}\widetilde{R}_{n,l},\quad n\geqslant 1,$$

其中 H_n 为至多可列集。我们约定空集上的和数为 0。记 $\widetilde{R}_{n,l}$ 上的流量为 $\widetilde{r}_{n,l}\geqslant 0$。显然，$\widetilde{R}_{n,l}\geqslant 0$。在集 $\{\widetilde{R}_{n,l}:\ n\geqslant 1,\ l\in H_n\}$ 上，可能有些具有相同的环流圈，但方向不同，对环流圈作适当的标号。这样，在第 k 个环流圈中，可能有两个环流矩阵具有不同的环流方向。把具有同一方向的环流矩阵归拼到一起，我们得到两个环流矩阵 $\overline{r_{k_1}}(t)\overline{R_{k_1}}$ 和 $\overline{r_{k_2}}(t)\overline{R_{k_2}}$。它们的环流圈都有标号 k，但环流方向相反。这里，$\overline{R_{k_1}}$ 和 $\overline{R_{k_2}}$ 都与 t 无关。现在，我们得到

$$A(t)=D(t)+\sum_{k\in H}(\overline{r_{k_1}}(t)\overline{R_{k_1}}+\overline{r_{k_2}}(t)\overline{R_{k_2}})$$

现在，我们可以讨论环流分解的稳定性。下面分四种情况加以讨论。

(a) 在 $\overline{r_{k_1}}(t)\overline{R_{k_1}}$ 和 $\overline{r_{k_2}}(t)\overline{R_{k_2}}$ 中有一个，例如说 $\overline{R_{k_2}}$ 不出现。那么，第 k 个环流圈决不会消失，这是因为，对于一切 $t>0$，$\overline{r_{k_1}}(t)>0$ 而 $\overline{R_{k_1}}\neq 0$。实际上，$\overline{r_{k_1}}(t)$ 可表成

$$\overline{r_{k_1}}(t)=e^{-t\|q\|}\sum_{a}c_a\frac{(t\|q\|)^a}{a!},$$

其中 $c_a\geqslant 0$，并存在 a_0 使 $c_{a_0}>0$。

(b) $\overline{r_{k_1}}(t)\equiv\overline{r_{k_2}}(t)$。此时 $\overline{r_{k_1}}(t)\overline{R_{k_1}}+\overline{r_{k_2}}(t)\overline{R_{k_2}}$ 是一个对称矩阵，可以归并到 $D(t)$ 中去而不必加以讨论。

(c) 对于每一个 $t>0$，$\overline{r_{k_1}}(t)>\overline{r_{k_2}}(t)$。此时，我们可以用一个对称矩阵（也归并到 $D(t)$ 中去）和一个新的环流矩阵 $R(t)=(\overline{r_{k_1}}(t)-\overline{r_{k_2}}(t))\overline{R_{k_1}}$ 代替 $\overline{r_{k_1}}(t)\overline{R_{k_1}}+\overline{r_{k_2}}(t)\overline{R_{k_2}}$。此时 $R_k(t)$ 决不会消失。对于 $\overline{r_{k_2}}(t)>\overline{r_{k_1}}(t)$（一切 $t>0$）的情形也可以作类似的讨论。

(d) 假定情形(a)—(c)不出现，此时对于某些 t，有 $\overline{r_{k_1}}(t)$

$=\overline{r_{k_2}}(t)$；但对另外一些 t，有 $\overline{r_{k_1}}(t)\neq\overline{r_k}(t)$。如同在（c）中所做的那样，我们总可以用一个对称矩阵和一个环流矩阵 $R_k(t)$ 代替 $\overline{r_{k_1}}(t)\overline{R_{k_1}}+\overline{r_{k_2}}(t)\overline{R_{k_2}}$；如果 $\overline{r_{k_1}}(t)\neq\overline{r_{k_2}}(t)$，则 $R_k(t)$ 的环流量是 $\overline{r_{k_1}}(t)-\overline{r_{k_2}}(t)$（当 $(\overline{r_{k_1}}(t)>\overline{r_{k_2}}(t))$ 或 $\overline{r_{k_2}}(t)-\overline{r_{k_1}}(t)$ （当 $\overline{r_{k_2}}(t)>\overline{r_{k_1}}(t)$）；在两种情况下，$R_k(t)$ 有相同的环流圈而环流方向相反。如果 $\overline{r_{k_1}}(t)=\overline{r_{k_2}}(t)$，则环流 $R_k(t)$ 消失。这样，环流圈只在时刻 $t\in\Lambda_k$ 处消失。此处

$$\Lambda_k=\left\{t\geqslant 0:\ \overline{r_{k_1}}(t)=\overline{r_{k_2}}(t)\right\}.$$

如果 Λ_k 是有限集，则必定是一个孤立点集。于是可设 Λ_k 是一个无限集。其次，由上面的构造知，$\overline{r_{k_1}}(t)$ 和 $\overline{r_{k_2}}(t)$ 可视作为 t 的解析函数。从而 Λ_k 必为孤立点集。今命

$$\Lambda=\bigcup_{k\in H}\Lambda_k$$

作为可列多个孤立点集之并，Λ 也是可列的。 ▌

§ 11.3 补充与注记

从物理、化学、生物学等领域里众多的远离平衡系统中，都已经观察到形形色色的花样，环流分解意在描述这些花样。环流分解的稳定性表示花样是可观察的。

对于离散时间的马链，环流分解最初由钱敏平[2]引进。引理（11.2.12）来自钱[2]和侯振挺、汪培庄[1]，后者也讨论了非稳定流的分解，本章的其余部分取自严士健、陈木法[1]。

对于一般 q 过程（不必有界）情形，问题还未解决。这里，我们用到了 $P(t)$ 的解析性。但 $P(t)$ 可以不是解析的，例如见 Freedman[1; § 8.2]。

第 三 篇

常 返 性 和 遍 历 性

第十二章　常 返 性

本章先研究马氏链的常返性和正常返性，对常见的结果作些补充。而后研究可配称马氏链的常返性。

与常返性紧密相联系的不变测度的存在性问题，将留到下一章去讨论。

§12.1　常 返 性

设 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 是定义在概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\boldsymbol{P})$ 上、取值于可数状态空间 E、具有转移概率矩阵 $\boldsymbol{P}=(P_{ij}:\ i,j\in E)$ 的马氏链。关于这种过程的常返性和非常返性的判别准则，可在任一随机过程的教材中找到。本节中，我们将给出一些不太常见但又很有用的一些充分条件。

一般地，可将 E 中元素任意编号。无妨就设 $E=\{0,1,2,\cdots\}$。命

$$f_{ij}^{(n)}=\boldsymbol{P}[X_n=j,\ X_k\neq j,\ 1\leqslant k\leqslant n-1\mid X_0=i],\quad n\geqslant 1$$

$$f_{ij}^{*}=\sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$$

$$f_i^{*}=f_{ii}^{*},\qquad i,j\in E.$$

我们构造一个新的转移矩阵 $\widetilde{P}=(\widetilde{P}_{ij}:\ i,j\in E)$ 如次：

$$\widetilde{P}_{ij}=\delta_{ij},\qquad 如\ i=0$$
$$=P_{ij},\qquad 如\ i\neq 0$$

则状态 0 为吸收态。下述结果是熟知的：

(12.1.1) **引理** 对每 $i\in E$，极限

$$\widetilde{\pi}_{i0}=\lim_{n\to\infty}\widetilde{P}_{i0}^{(n)}$$

恒存在，而且 $\widetilde{\pi}_{00}=1$。

由恒等式

$$\sum_{k=1}^{n}f_{i0}^{(k)}=\widetilde{P}_{i0}^{(n)}\qquad (i\geqslant 1) \tag{12.1.2}$$

立得

(12.1.3) **引理** $f_{i0}^{*}=\widetilde{\pi}_{i0}$，$i\geqslant 1$。

(12.1.4) **定理** 设 $P=(P_{ij})$ 不可约。若

$$\sum_{j\in E}P_{ij}\,y_j\leqslant y_j,\quad i\neq 0$$

有满足 $\lim\limits_{i\to\infty}y_i=\infty$ 的解 (y_i)，则此链常返。

证 设 (y_i) 是所述的解，则

$$\sum_{j\in E}\widetilde{P}_{ij}\,y_j\leqslant y_i,\quad i\in E.$$

进而

$$\sum_{j\in E}\widetilde{P}_{ij}^{(n)}\,y_j\leqslant y_i,\quad i\in E,\quad n\geqslant 1$$

于是

$$\begin{aligned}1&=\sum_{j=0}^{N}\widetilde{P}_{ij}^{(n)}+\sum_{j=N+1}^{\infty}\widetilde{P}_{ij}^{(n)}\\&\leqslant\sum_{j=0}^{N}\widetilde{P}_{ij}^{(n)}+\sum_{j=N+1}^{\infty}\widetilde{P}_{ij}^{(n)}\,y_j/(\inf_{k>N}y_k)\\&\leqslant\sum_{j=0}^{N}\widetilde{P}_{ij}^{(n)}+y_i/(\inf_{k>N}y_k).\end{aligned}$$

先令 $n\to\infty$，再命 $N\to\infty$，便得

$$\widetilde{\pi}_{i0}=1,\qquad i\neq 0$$

由此及引理 (12.1.3) 知 $f_{i0}^{*}=1$，$i\neq 0$。最后，由

$$1-f_{00}^{*}=\sum_{j\neq 0}P_{0j}(1-f_{j0}^{*})$$

及不可约性立知链常返。 ▌

(12.1.5) **定理** 设$P=(P_{ij})$不可约，则它非常返的充要条件是方程

$$\sum_{j\in E}P_{ij}y_j=y_i,\qquad i\neq 0$$

有非常数的有界解。

证 设链非常返，则必有某$i\neq 0$使

$$f_{i0}^{*}=\tilde{\pi}_{i0}<1$$

注意$\tilde{\pi}_{i0}$是链$\tilde{P}=(\tilde{P}_{ij})$从$i$出发最终回到0的概率，因而

$$\sum_{j\in E}\tilde{P}_{ij}\tilde{\pi}_{j0}=\tilde{\pi}_{i0},\ i\in E.$$

由此及$\tilde{\pi}_{00}=1$，便知$y_i=\tilde{\pi}_{i0}$，$i\in E$是满足条件的解。

反之，设方程有非常数有界解。不失一般性，可设

$$y_0=1,\qquad 0\leqslant y_i\leqslant 2,\qquad i\in E,$$

则

$$\sum_{j\in E}\tilde{P}_{ij}y_j=y_i,$$
$$i\in E,$$

进而

$$\tilde{P}_{i0}^{(n)}\leqslant\sum_{j\in E}\tilde{P}_{ij}^{(n)}y_j\leqslant y_i,$$
$$i\in E,\ n\geqslant 1.$$

命$n\to\infty$，便得

$$\tilde{\pi}_{i0}\leqslant y_i,\qquad i\in E.$$

由于$\{y_i\}$是非常数的，故存在$i_0\neq 0$使$y_{i_0}<1$或$y_{i_0}>1$。在前一种情况下，我们有$\tilde{\pi}_{i_00}<1$；在后一种情况下，以$\{2-y_i\}$代替

$\{y_i\}$，我们可得到同样的结论．故仿定理（12.1.4）证明的最后一步可见链非常返． ▌

现在转来讨论正常返性．

(12.1.6) **定理** 设 $P=(P_{ij})$ 不可约．若方程

$$\sum_{i\in E} x_i P_{ij} = x_j,\quad j\in E$$

有满足 $\sum |x_i| < \infty$ 的非零解，则此链正常返．反之，仅当 P 正常返时，

$$\begin{cases} \sum\limits_{i\in E} x_i P_{ij} \leqslant x_j, & j\in E \\ x_j \geqslant 0, \ j\in E; & \sum x_i < \infty \end{cases}$$

才有非零解．

证 无妨设链 P 为非周期的，则定理的结论容易由如下事实导出：

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = \pi_j,\qquad j\in E$$

存在且与 i 无关．或者 π_i 恒大于零，或表 π_i 恒等于零． ▌

(12.1.7) **定理** 设 $P=(P_{ij})$ 不可约，当且仅当

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{\infty} P_{ij}\, y_j \leqslant y_i - 1, & i\neq 0 \\ y_i \geqslant 0, \ i\in E; & \sum\limits_{j=0}^{\infty} P_{0j}\, y_j < \infty \end{cases}$$

有解时，链 P 是正常返的．

证 设链 P 正常返，则由定理（2.1.23）知，$\{\mu_{i0};\ i\in E\}$ 有限且满足

$$\sum_{j=1}^{\infty} P_{ij}\,\mu_{j0} = \mu_{i0} - 1,\quad i\in E.$$

特别地，取

$$y_0 = 0,\quad y_j = \mu_{j0},\quad j\neq 0$$

便知条件是必要的。

反之，设 (y_i) 为满足条件的解。命

$$\lambda=\sum_{j=0}^{\infty} P_{0j}\, y_j<\infty,$$

$$y_i^{(1)}=y_i,\quad i\in E,$$

$$y_i^{(n+1)}=\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}^{(n)} y_j,\quad n\geqslant 1\,,$$

则由

$$\begin{aligned}
y_i^{(n+2)} &= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} P_{ij}^{(n)} P_{jk}\, y_k \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}^{(n)}\, y_j^{(2)} \\
&\leqslant \lambda P_{i0}^{(n)}+\sum_{j=1}^{\infty}(y_j-1)P_{ij}^{(n)} \\
&\leqslant (1+\lambda)P_{i0}^{(n)}+y_i^{(n+1)}-1
\end{aligned}$$

及 (y_i) 的有限性立知 $(y_i^{(n)})$ 对每 n 有限，而且

$$y_i^{(n+2)}\leqslant(1+\lambda)\sum_{r=1}^{n} P_{i0}^{(r)}+y_i^{(2)}-n.$$

进而

$$y_i^{(n+2)}/n\leqslant(1+\lambda)\,\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} P_{i0}^{(r)}+y_i^{(2)}/n-1$$

命 $n\to\infty$，得

$$0\leqslant(1+\lambda)\,\pi_0-1$$

于是

$$\pi_0>(1+\lambda)^{-1}>0$$

故此链正常返。 ▌

本节的余下部分讨论 Q 过程的常返性和正常返性。

设 $Q=(q_{ij})$ 为 $E=\{0,1,2,\cdots\}$ 上的保守 Q 矩阵，定义跳跃

矩阵

$$\overline{P}_{ij}=(1-\delta_{ij})q_{ij}/q_i,\quad i,\ j\in E,$$

此处假定 $q_i>0$，$i\in E$。

(12.1.8) **定义** 称 $P(t)=(P_{ij}((t)\colon i,j\in E)$ 是常返的，如果

$$\int_0^\infty P_{ii}(t)dt=\infty,\ i\in E$$

或等价地，对每 $h>0$，$P(h)\equiv(P_{ij}(h))$ 是常返的。

(12.1.9) **定理** 设 $Q=(q_{ij})$ 为正则、不可约 Q 矩阵，则 $P(t)$ 常返的充要条件是其跳跃链 $(\overline{P}_{ij})$ 常返。

证*) 由［Chung，Ⅰ，§10，定理4的推论1］知，过程 $P(t)$ 常返的充要条件是

$\boldsymbol{P}_i[X(\cdot,\omega)$ 包含无穷多个 i 区间$]=1$，$i\in E$，此处

$$\boldsymbol{P}_i[\cdot]=\boldsymbol{P}[\cdot\mid X(0,\omega)=i],\ i\in E.$$

由于正则性假设，

$$\boldsymbol{P}_i[\tau_\infty=\infty]=1,\ i\in E$$

其中 τ_∞ 为过程 $X(t)$ 的第一次无穷。因而，上述条件等价于

$$\boldsymbol{P}_i[Y_n=i,\ i.\ 0.\ ]=1,\ i\in E$$

这里

$$Y_n=X(\tau_n),\ n\geqslant 0,$$

τ_n 为 $X(t)$ 的第 n 次跳跃时刻 $(\tau_0\equiv 0)$，它的转移矩阵即是 $(\overline{P}_{ij})$。因此，上述条件又等价于 $(\overline{P}_{ij})$ 常返。 ∎

关于正常返性，问题并没有这么简单。

(12.1.10) **引理** 在 (12.1.9) 的假设之下.

$$\lim_{t\to\infty}P_{ij}(t)=\pi_j,\quad j\in E$$

存在且与 i 无关。而且，或者 $\sum_j\pi_j=1$，或者 $\sum_j\pi_j=0$。

---

*) 另一证法见 (12.3.1)。

证 由于 $(P_{ij}(h))$ $(h>0)$ 是不可约、非周期链，因而所述断言易由

$$\lim_{t\to\infty} P_{ij}(t)=\lim_{n\to\infty} P_{ij}(nh)=\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)}(h)$$

导出。 ▮

下面，我们讨论几个很一般的结果。

(12.1.11) **引理** 设 $P(t)$ 是满足向前方程的 q 过程，μ 为 $P(t)$ 的 σ 有限不变测度，则

(12.1.12) 对每 $A\in\mathscr{E}$：$\mu(A)<\infty$，$\sup\limits_{x\in A} q(x)<\infty$，有

$$\int \Omega I_A d\mu=0,$$

$$\Omega f(x)\equiv\int q(x,dy)f(y)-q(x)f(x)$$

或等价地，

(12.1.13) $$\int \mu(dx)f(x)q(x)$$

$$=\int \mu(dx)\int q(x,dy)f(y),\ f\in {}_r\mathscr{E}_+$$

证 由

$$\mu(A)=\int \mu(dx)P(t,x,A),\ t\geqslant 0,\ A\in\mathscr{E},$$

得

$$\frac{1}{\lambda}\int \mu(dx)f(x)=\int \mu(dx)\int P(\lambda,x,dy)f(y),$$

$$\lambda>0,\ f\in {}_r\mathscr{E}_+.$$

另一方面，由向前方程得

$$\int \mu(dx)P(\lambda,x,A)=\int \mu(dx)\int P(\lambda,x,dy)\int_A \frac{q(y,dz)}{\lambda+q(z)}$$

$$+\int_A \frac{\mu(dx)}{\lambda+q(x)}.$$

综合上面两式得

$$\mu(A)/\lambda=\lambda^{-1}\int\mu(dx)\int_A\frac{q(x,dy)}{\lambda+q(y)}+\int_A\frac{\mu(dx)}{\lambda+q(x)}.$$

当 $\mu(A)<\infty$ 时，

$$\int_A\mu(dx)\frac{q(x)}{\lambda+q(x)}=\int\mu(dx)\int_A\frac{q(x,dy)}{\lambda+q(y)},$$

使用单调类得

$$\int_A\mu(dx)q(x)=\int\mu(dx)q(x,A),$$

由此立得第一式，再用一次单调类定理得第二式。 】

(12.1.14) **引理** 设 $P(t)$ 为满足向前方程的 q 过程，μ 为 $(E,\mathscr{E})$ 上的 σ 有限测度。若 (12.1.12) 或 (12.1.13) 之一成立，则

$$\mu\geqslant\lambda\mu P(\lambda),\qquad\lambda>0.$$

证 将上述引理之证倒回去，得

$$\mu(A)=\int\mu(dx)\int_A\frac{q(x,dy)}{\lambda+q(y)}+\int_A\mu(dx)\frac{\lambda}{\lambda+q(x)},$$
$$\lambda>0,\ A\in\mathscr{E}.$$

由于

$$\int\mu(dx)\lambda P^{(1)}(\lambda,x,A)=\int_A\mu(dx)\frac{\lambda}{\lambda+q(x)}\leqslant\mu(A).$$

假设

$$\int\mu(dx)\lambda P^{(n)}(\lambda,x,A)\leqslant\mu(A),$$

那么

$$\begin{aligned}&\int\mu(dx)\lambda P^{(n+1)}\lambda,x,A)\\&=\int\mu(dx)\int\lambda P^{(n)}(\lambda,x,dy)\int\frac{q(y,dz)}{\lambda+q(z)}+\int_A\mu(dx)\frac{\lambda}{\lambda+q(x)}\\&\leqslant\int\mu(dx)\int_A\frac{q(x,dy)}{\lambda+q(y)}+\int_A\mu(dx)\frac{\lambda}{\lambda+q(x)}\\&=\mu(A),\end{aligned}$$

故

$$\mu \geqslant \lambda \mu P(\lambda). \quad \blacksquare$$

(12.1.15) **定理** 设$P(t)$为满足向前方程的不断的q过程，μ为概率测度．则μ为$P(t)$的不变测度当且仅当（12.1.12）和（12.1.13）之一成立．

证 由引理（12.1.14）得

$$\mu(A) \geqslant \lambda \int \mu(dx) P(\lambda, x, A), \quad \lambda > 0, \quad A \in \mathscr{E}.$$

若有某$\lambda>0$和A使上式的“$>$”成立，则由

$$\begin{aligned} 1 &= \mu(A) + \mu(A^C) \\ &> \lambda \int \mu(dx) P(\lambda, x, A) + \lambda \int \mu(dx) P(\lambda, x, A^C) \\ &= 1 \end{aligned}$$

导致矛盾，可见

$$\mu(A) = \lambda \int \mu(dx) P(\lambda, x, A), \quad \lambda > 0, \quad A \in \mathscr{E}.$$

由$P(t, x, A)$关于t的连续性和控制收敛定理知$\int \mu(dx) P(t, x, A)$关于t连续，故由上式及 Laplace 变换的唯一性定理立得

$$\mu(A) = \int \mu(dx) P(t, x, A), \quad t \geqslant 0, \quad A \in \mathscr{E}. \quad \blacksquare$$

(12.1.16) **定理** 设$Q=(q_{ij})$为正则、不可约的Q矩阵，则$P(t)$为正常返的充要条件是方程

$$(12.1.17) \qquad \sum_i x_i q_{ij} = 0, \quad j \in E$$

有唯一可和的非负非零解（不计常数因子）．

证 先设$P(t)$正常返，则由（12.1.10）知

$$\lim_{t \to \infty} P_{ij}(t) = \pi_j > 0$$

而且

$$\sum_j \pi_j = 1.$$

相应于离散参数情形，我们有

$$\pi_j = \sum_i \pi_i P_{ij}(t)$$

再由定理（12.1.15）得

$$\sum_i \pi_i q_{ij} = 0,\ j \in E.$$

因此，(π_i)是方程（12.1.17）的一个解。

今设(x_i)为方程（12.1.17）的可和的非负非零解，不失一般性，可设

$$\sum_i x_i = 1;\ x_i > 0,\ i \in E.$$

使用定理（12.1.15），我们得到

$$x_j = \sum_i x_i P_{ij}(t),\ t \geqslant 0,\ j \in E.$$

命$t \to \infty$，得

$$0 < x_j = \pi_j$$

这不仅证明了$P(t)$是正常返的，而且证明了（12.1.17）的解的唯一性。 ▌

（12.1.18）**注** 关于正常返性，定理（12.1.9）的相应的结论不真。

取

$$p_i > 0,\ i \geqslant 1;\ \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1;$$

$$\overline{P}_{0i} = p_i,\ i \geqslant 1;\ \overline{P}_{i0} = 1,\ i \geqslant 1;$$

$$\overline{P}_{ij} = 0,\text{其它情形。}$$

那么，$\overline{P} = (\overline{P}_{ij})$是正常返的。它有唯一的平衡分布

$$\pi_0 = 1/2,\ \pi_i = p_i/2,\ i \geqslant 2.$$

今取$q_i = \pi_i > 0$，$q_{ij} = q_i \overline{P}_{ij}$，$i \neq j$. 则$Q = (q_{ij})$有界，从而Q过程唯一。由定理（12.1.16）知，若$P(t)$正常返，则

$$x_j q_j = \sum_{i \neq j} x_i q_{ij}$$

从而对每 $j \geqslant 1$,

$$x_j \pi_j = \sum_{i \neq i} x_i \quad \pi_i \overline{P}_{ij} = x_0 \pi_0 p_j$$

即 $x_j = x_0$. 这导致 $\sum\limits_j x_j = +\infty$ 而与 (12.1.16) 相悖. 故 $\mathbf{P}(t)$ 不是正常返的.

反过来, 我们选一个 $P(t)$ 正常返而跳跃链非正常返的例子如下: 取保守生灭 Q 矩阵

$$a_i = b_i, \quad i \geqslant 0, \ b_0 = 0.$$

则由定理 (3.2.20) 立知 Q 过程唯一. 最小生灭过程总是可配称的, 它有配称列

$$\mu_0 = 1, \quad \mu_i = \frac{b_0 b_1 \cdots b_{i-1}}{a_1 a_2 \cdots a_i}, \ i \geqslant 1.$$

这样, 我们可取 $b_i \to \infty$, 使

$$\sum_0^\infty \mu_i = 1 + b_0 \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{b_i} < \infty.$$

于是 $\mathbf{P}(t)$ 是正常返的. 但 $\overline{P}_{i,i-1} = \overline{P}_{i,i+1} = 1/2$, $i \geqslant 1$, $\overline{P}_{01} = 1$, 故 $\overline{P}$ 非正常返. ∎

下述结果表明, 在特殊情况下, 两者还是等价的.

(12.1.19) **定理** 如果保守、不可约 Q 矩阵 $Q = (q_{ij})$ 满足

$$0 < m \leqslant q_i \leqslant M < \infty, \ i \in E,$$

则 $P(t)$ 正常返的充要条件是 $\overline{P}$ 正常返

证 因为 Q 矩阵有界, 从而正则. 注意方程

$$\sum_i \pi_i q_{ij} = 0, \ j \in E$$

的非负解 (π_i) 与方程

$$\mu_j=\sum_i \mu_i \overline{P}_{ij},\ j\in E$$

的非负解（μ_i）有如下一一对应关系

$$\mu_j=\pi_j q_j,\qquad j\in E.$$

于是两者同时恒为零或同时恒大于零，然后，利用

$$\sum_j \pi_j\leqslant \sum_j \mu_j\leqslant M\sum_j \pi_j.$$

定理（12.1.6）和定理（12.1.16）立得所述结论． ∎

我们已经看到，一般地说，$P(t)$的正常返性不能用$\overline{P}$完全刻划，这就需要新的判别准则．下述结果是侯、郭［1；定理9.4.1］的特例*)．

(12.1.20) **定理** 设$Q=(q_{ij})$为正则、不可约Q矩阵．则$P(t)$正常返的充要条件是方程

$$(12.1.21)\quad x_i\geqslant \sum_{j\neq i,i_0}\frac{q_{ij}}{q_i}x_j+\frac{1}{q_i},\ i\in E\setminus\{i_0\}$$

有满足条件

$$(12.1.22)\quad \sum_{j\neq i_0}\frac{q_{i_0j}}{q_{i_0}}x_j<\infty$$

的非负解（x_i；$i\neq i_0$）．此处i_0为E中任一固定元．

(12.1.23) **推论** 条件（12.1.21）和（12.1.22）可以分别换成

$$(12.1.24)\quad \sum_j q_{ij}x_j+1\leqslant 0,\ i\neq i_0,$$

$$(12.1.25)\quad \Big|\sum_j q_{i_0j}x_j\Big|<\infty.$$

证 在定理中，补设$x_0=0$，便得推论条件．反之，若(12.1.24）成立，则

*）参考注（12.1.26）．

$$\sum_{j\neq i,i_0}\frac{q_{ij}}{q_j}x_j+\frac{1}{q_i}\leqslant\sum_{j\neq i}\frac{q_{ij}}{q_i}x_j+\frac{1}{q_i}\leqslant x_i,\quad i\neq i_0$$

从而（12.1.21）成立。如（12.1.25）成立，则必定有

$$\sum_{j\neq i_0}q_{i_0j}x_j<\infty$$

这当然也导出（12.1.22）． ▌

（12.1.26）**注** 在上面所引用的书中，（12.1.20）的陈述中施加了常返性的前提条件，但在我们的情况下，这是多余的。今证明如下：设 (u_i) 是满足条件（12.1.24）和（12.1.25）的非负解。定义

$$c_i=\begin{cases}1, & i\neq i_0;\\ -\sum\limits_j q_{i_0j}u_j, & i=i_0,\end{cases}$$

则

$$c_i+\sum_j q_{ij}u_j\leqslant 0,\quad i\in E.$$

从而

$$u_i-c\geqslant\sum_{j\neq i}\frac{q_{ij}}{\lambda+q_i}(u_j-c)+\frac{c_i-\lambda c}{\lambda+q_i},\quad i\in E.$$

此处 $c=(\inf\{c_j/\lambda;\ j\in E\})\wedge 0>-\infty$。于是由比较定理得

$$u_i-c\geqslant\sum_j P_{ij}(\lambda)(c_j-\lambda c),\quad i\in E.$$

注意正则性假设，$\lambda\sum\limits_j P_{ij}(\lambda)=1$，因而

$$u_i\geqslant\sum_j P_{ij}(\lambda)c_j,\qquad i\in E,\ \lambda>0.$$

进而

$$\begin{aligned}u_i&\geqslant\sum_{j\neq i_0}P_{ij}(\lambda)+P_{ii_0}(\lambda)c_{i_0}\\&=\lambda^{-1}+P_{ii_0}(\lambda)(c_{i_0}-1),\end{aligned}$$

即

$$\lambda u_i \geqslant 1 + \lambda P_{ii_0}(\lambda)(c_{i_0} - 1), \quad i \in E, \ \lambda > 0.$$

由于

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \lambda \mathbf{P}_{ij}(\lambda) = \lim_{t \to \infty} \mathbf{P}_{ij}(t) = \pi_{ij} = \pi_j.$$

可见

$$0 \geqslant 1 + \pi_{i_0}(c_{i_0} - 1)$$

这表明 $\pi_{i_0} \neq 0$. ▌

下面，我们将讨论几种特殊 Q 过程的常返性和正常返性。为此，我们需要如下简单结果：

(12.1.27) **引理** 设 (q_{ij})为正则、不可约 Q 矩阵，则 (q_{ij}) 过程常返的充要条件是方程

$$(12.1.28) \qquad x_i = \sum_{k \neq j_0} \overline{\mathrm{P}}_{ik} x_k, \ 0 \leqslant x_i \leqslant 1, \ i \in E$$

对于某个固定的 j_0(等价地，对任何 j_0) 只有零解.

证 由定理 (12.1.9) 和 (2.1.22)，我们只需证明引理的条件等价于方程

$$(12.1.29) \qquad x_i = \sum_{k \neq j_0} \overline{\mathrm{P}}_{ik} \ x_k + \overline{\mathrm{P}}_{ij_0}, \ i \in \mathrm{E}$$

的最小解 $x_i^* = 1$, $i \in E$. 注意 (12.1.28) 是 (12.1.29) 的齐次方程，而且 ($y_i = 1$, $i \in E$) 总是方程 (12.1.29) 的一个非负解，从而最小解 $x_i^* \leqslant 1$, $i \in E$. 利用这些事实容易导出所需结论. ▌

(12.1.30) **定理** 设 (q_{ij}) 为 (3.2.10) 所定义的单生 Q 矩阵. 再设它是正则、不可约的. 则 Q 过程常返的充要条件是

$$\sum_{k=0}^{\infty} F_k^{(0)} = \infty,$$

其中 $F_k^{(0)}$ 的定义见 (3.2.12) . Q 过程正常返的充要条件是

$$d \equiv \sup_{k \geqslant 0} \left[\left(\sum_{l=0}^{k} d_l \right) \Big/ \left(\sum_{l=0}^{k} F_l^{(0)} \right) \right] < \infty,$$

其中

$$d_0=0,$$

$$d_k=\left(1+\sum_{s=0}^{k-1} q_k^{(s)} d_s\right)\Big/ q_{k,k+1},\quad k>0.$$

特别地，对于生灭过程，常返的充要条件是

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_1\cdots a_k}{b_1\cdots b_k}=\infty$$

正常返的充要条件是：

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b_0\cdots b_k}{a_1\cdots a_{k+1}}<\infty.$$

证 为证前一断言，我们只需证明方程（12.1.28）有非零解当且仅当 $\sum_{k=0}^{\infty} F_k^{(0)}<\infty$。取 $j_0=0$，则方程（12.1.28）有非零解当且仅当

$$x_i=\sum_{k\neq 0} \overline{P}_{ik}x_k,\ x_0=1,\ i\in E$$

有非负的有界解。但此方程的解唯一，它就是

$$\widetilde{x}_0=1=\widetilde{x}_1$$

$$\widetilde{x}_{i+1}-\widetilde{x}_i=\left(\sum_{j=1}^{i-1} q_{ij}\ (\widetilde{x}_i-\widetilde{x}_j)\ +q_{i0}\widetilde{x}_i\right)\Big/ q_{i,i+1},$$

$$i\geqslant 1.$$

显然 $\widetilde{x}_i$ 是上升的。这样，问题归结为 $(\widetilde{x}_i)$ 是有界的当且仅当 $\sum_{k=0}^{\infty} F_k^{(0)}<\infty$。注意

$$\sum_{j=1}^{i-1} q_i^{(j)}\ (\widetilde{x}_{j+1}-\widetilde{x}_j)\ =\sum_{j=0}^{i-1} q_{ij}\ (\widetilde{x}_i-\widetilde{x}_j)\ ,$$

从而

$$\widetilde{x}_{i+1}-\widetilde{x}_i=\sum_{j=1}^{i-1}\frac{q_i^{(j)}}{q_{i,i+1}}\ (\widetilde{x}_{j+1}-\widetilde{x}_j)\ +\frac{q_i^{(0)}}{q_{i,i+1}},\ i\geqslant 1.$$

这表明 $(y_i\equiv \widetilde{x}_{i+1}-\widetilde{x}_i:i\geqslant 1)$ 是方程

$$z_i=\sum_{j=1}^{i-1}\frac{q_i^{(j)}}{q_{i,i+1}}z_j+\frac{q_i^{(0)}}{q_{i,i+1}}\ ,\ i\geqslant 1$$

的非负有限解。另一方面，此方程的解也是唯一的，它即是

$$z_1^*=q_1^{(0)}/q_{12},$$

$$z_i^*=\sum_{j=1}^{i-1}q_i^{(j)}/q_{i,i\pm1}\ z_i^*\ +q_i^{(0)}/q_{i,i\pm1},\ i\geqslant 1.$$

使用归纳法易证

$$z_i^*=F_i^{(0)}\ ,\ i\geqslant 1.$$

综上所述，我们得到

$$\tilde{x}_0=\tilde{x}_1=1=F_0^{(0)}$$

$$\tilde{x}_{i\pm1}-\tilde{x}_i=F_i^{(0)}\ ,\ i\geqslant 1.$$

这当然导出所需的结论。

为证明第二项断言，我们使用推论（12.1.23），并取 $j_0=0$. 设（u_i）为满足（12.1.24）和（12.1.25）的任一解，则使用 Abel 变换得

$$q_{k,k+1}\ (u_{k+1}-u_k)\ +1$$

$$=\sum_j q_{kj}u_j+1-\sum_{j=0}^{k-1}q_{kj}u_j-q_{k,k\pm1}u_k+q_ku_k$$

$$\leqslant\sum_{j=0}^{k-1}q_{kj}\ (u_k-u_j)$$

$$=\sum_{j=0}^{k-1}q_k^{(j)}\ (u_{j+1}-u_j)\ .$$

命 $v_k=u_{k+1}-u_k,\ k\geqslant 0$, 则由上式及归纳法得

（12.1.31）$v_k\leqslant F_k^{(0)}v_0-d_k,\ k\geqslant 0,$

从而

$$0\leqslant u_{k\pm1}=\sum_{l=0}^{k}v_l+u_0$$

$$\leqslant\left(\sum_{l=0}^{k} F_l^{(0)}\right)v_0-\sum_{l=0}^{k} d_l+u_0$$

$$\leqslant\left(\sum_{l=0}^{k} F_l^{(0)}\right)u_1-\sum_{l=0}^{k}d_l.$$

因此，$d\leqslant u_1<\infty$. 反之，如 $d<\infty$，我们取

$$u_0=0,\ \infty>u_1\geqslant d,$$

(12.1.32)

$$u_{k+1}=u_k+F_k^{(0)}u_1-d_k,\ k\geqslant 1,$$

则自然有

$$\left|\sum_j q_{0j}u_j\right|=q_{01}u_1<\infty,$$

对每 $k>0$，我们有

$$1+q_{k,k+1}\ (u_{k+1}-u_k)$$

$$=q_{k,k+1}F_k^{(0)}-q_{k,k+1}\ d_k+1$$

$$=\sum_{s=0}^{k-1}q_k^{(s)}F_s^{(0)}u_1-\sum_{s=0}^{k-1}q_k^{(s)}d_s$$

$$=\sum_{s=0}^{k-1}\ q_k^{(s)}\ (F_s^{(0)}u_1-d_s)$$

$$=\sum_{s=0}^{k-1}\ q_k^{(s)}\ (u_{s+1}-u_s)$$

$$=\sum_{j=0}^{k-1}\ q_{kj}\ (u_k-u_j)$$

即 $\sum_j q_{kj}u_j+1=0,\ k>0.$ ∎

本节的最后一个问题是讨论多维 Q 过程的常返性和正常返性。这里的想法与定理 (3.2.21) 是一样的，即把多维化成一维。为此，先证

(12.1.33) **引理** 设 (q_{ij}) 为 (3.2.10) 所定义的单生 Q 矩阵。则存在满足 (12.1.24) 和 (12.1.25) (取 $i_0=0$) 的非

负上升解的充要条件是：

$$(12.1.34) \qquad \hat{d} \equiv \sup_{k>0} d_k / F_k^{(0)} < \infty.$$

此时，由（12.1.32）所定义的（u_i）（其中 d 改用 $\hat{d}$）便是满足（12.1.24）和（12.1.25）的一个非负上升解.

证 引理的后一断言可由前一定理证明的最后一部分看出. 这同时证得充分性. 为证必要性，只需注意（12.1.31）依然成立，然后由 u_k 的上升性知 $v_k \geqslant 0$，$k \geqslant 1$. 从而

$$\hat{d} \leqslant \sup_{k>0} (d_k / F_k^{(0)}) \leqslant v_0$$

$$= u_1 - u_0 = \left| \sum_i q_{0j} u_j \right| \Big/ q_{01} < \infty. \qquad \blacksquare$$

（12.1.35）**注** 一般地，我们有 $d \leqslant \hat{d}$. 对于生灭过程，可证 $d < \infty$ 当且仅当 $\hat{d} < \infty$.

（12.1.36）**定理** 使用定理（3.2.21）的假设和记号. 但我们取 $E_0 = \{\theta\}$，E_k（$k \geqslant 1$）为有限集. 再设（$q(x, y)$）和（q_{ij}）都是不可约的而且（q_{ij}）是正则的. 如果 $\sum_{k=0}^{\infty} F_k^{(0)} = \infty$，则（$q(x, y)$）过程常返；如果 $\hat{d} < \infty$，则（$q(x, y)$）过程正常返.

证 为证常返性，由引理（12.1.27），我们只需证明方程

$$u(x) = \sum_{y \neq \theta} \overline{P}(x, y) u(y), \quad 0 \leqslant u(x) \leqslant 1, \ x \in E$$

只有零解. 此处，（$\overline{P}(x, y)$）为（$q(x, y)$）的跳跃矩阵. 现在，我们可以使用类似于定理（3.2.22）的证法. 设 $\{u(x): x \in E\}$ 是上述方程的任一非零解. 命

$$u_k = \max\{u(x): x \in E_k\}, \quad k \geqslant 0.$$

则存在 $x^{(k)} \in E_k$，使得

$$u_0 = u(\theta), \quad u_k = u(x^{(k)}), \quad k \geqslant 1$$

于是

$$q_0u_0 = q(\theta)u(\theta) = \sum_{y\neq\theta} q(\theta,\ y)\ u(y)$$

$$\leqslant \sum_{y\in E^{(1)}} q\ (\theta,\ y)\ u_1 = q_{01}u_1$$

当 $k\geqslant 1$ 时，使用证明（3.2.28）的手法，可得

$$q\ (x^{(k)},\ \theta)\ u_k + \sum_{i=1}^{k-1}\left(\sum_{y\in E_i} q(x^{(k)},\ y)\right)(u_k - u_i)$$

$$\leqslant \sum_{y\in E_{k+1}} q\ (x^{(k)},\ y)\ \ (u_{k+1} - u_k).$$

这表明 $u_k\uparrow$，而且

$$q_{k0}u_k + \sum_{i=1}^{k-1} q_{ki}\ (u_k - u_i) \leqslant q_{k,k+1}\ (u_{k+1} - u_k),$$

$$k\geqslant 1.$$

故我们总有

$$q_k u_k \leqslant \sum_{i\neq 0,k} q_{kj}u_j,\ \ k\geqslant 0.$$

于是，由引理（12.1.27）、（3.2.7）和定理（12.1.30）知 $u_i = 0$，$i\geqslant 0$. 但这矛盾于 $u(x)\ \neq 0$ 的假设.

为证明正常返性，使用推论（12.1.23），我们只需证明

$$\sum_y q(x,\ y)u(y) + 1 \leqslant 0,\ \ x\neq\theta,$$

$$\left|\sum_y q(\theta,\ y)u(y)\right| < \infty$$

有一个非负解. 设（u_k）为引理（12.1.33）中所构造的解，并取

$$u(x)\ = u_k,\ \text{如}\ x\in E_k,\ k\geqslant 0.$$

如 $x\neq\theta$，则必存在某 k，使 $x\in E_k$，于是

$$\sum_y q(x,\ y)\ u\ (y)\ \ +1$$

$$= -\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{y\in E_j} q(x, y)(u_k - u_j) + \sum_{y\in E_{k+1}} q(x, y)\cdot$$

$$\cdot (u_{k+1} - u_k) + 1$$

$$\leqslant -\sum_{j=0}^{k-1} q_{kj}(u_k - u_j) + q_{k,k+1}(u_{k+1} - u_k) + 1$$

$$= \sum q_{kj} u_j + 1 \leqslant 0,$$

而

$$\sum_{y} q(\theta, y) u(y) = \sum_{y\in E_1} q(\theta, y) u_1 = q_{01} u_1$$

有限，故我们已构造出所需的解。 ∎

(12.1.37) **例** 应用定理 (12.1.36)，容易证明有限维 Schlögl 模型（见(3.2.31)）是正常返的。由于单物种自催化模型 (3.2.29) 和 Lotka-Volterra 模型均含有吸收态，易见它们都是非常返的。至于 Brusseltor 模型，定理 (12.1.36) 的方法失效。

§12.2 可配称马氏链的常返性

设 (E, X_n, P_{ij}) 是取值于离散状态空间的马氏链，过程 $\{X_n\}_{n\geq 0}$ 具有转移概率矩阵 $P = (P_{ij})$。称它是可配称的，如果存在正数序列 π_i $(i\in E)$*，使得

(12.2.1) $\quad \pi_i P_{ij} = \pi_j P_{ji}, \quad i, j\in E.$

对于连续时间参数的马链，可类似地定义相应的可配称概念。为研究它们的常返性和正常返性，可先将它们分解成若干不可约子链，然后逐一考察每一子链的常返性和正常返性。这样，我们可

* 假定正性也是由于链可分块。

以、並将假定链是不可约的．此时，若不计常数因子，则配称列(π_i)是唯一的（参考场论）．不论是离散参数还是连续参数的，正常返的充要条件都是配称列可和．因此，问题在于：对于不可和情形，链是否常返？利用定理（12.1.9），我们只需研究离散参数情形．

本节的目的就是研究离散参数、不可约、可配称马链的常返性．我们将先给出非常返性的Royden判准，而后给出它的一系列应用．包括证明关于常返性的Nash-Williams定理．之后，我们将给出非常返性的另一判准．我们也将给出一些例子，说明这些判准是有效的．

（12.2.2）**定理** 设(E, X_n, P_{ij}, π_i)是不可约可配称马链，则它非常返的充要条件是存在实数u_{ij} $(i, j\in E)$，使得

(i) $u_{ij}=-u_{ji}$；

(ii) 存在$i_0\in E$，使$\sum_j u_{i_0 j}\neq 0$但

$$\sum_j u_{ij}=0, \quad i\neq i_0;$$

(iii) $\sum_{i,j} u_{ij}^2/a_{ij}<\infty$．

此处约定$0/0=0$；$x/0=\infty$，如$x>0$．而

$$a_{ij}=\pi_i P_{ij}, \quad i, j\in E.$$

（12.2.3）**物理解释**

用长度为1的管子将$i\in E$连结起来．称i为结点．假定从i到j的管子的截面积为a_{ij}．並设连结i的管子的截面积的总和

$$\pi_i=\sum_j a_{ij}<\infty.$$

假想液体从某$i_0\in E$、以固定的速度流入上述系统．假定液体是不可压缩的而且不能从任何地方跑掉．现在，假定液体已充满各个管道．並用u_{ij}表示从i到j的流量．由不可压缩性，我

们应有 $u_{ij}=-u_{ji}$，$\sum_j u_{ij}=0$，$i\neq i_0$。但由假设，$\sum_j u_{i_0j}\neq 0$。在 i 与 j 之间液体的质量是 a_{ij}，从而，由 i 到 j 的流速为 u_{ij}/a_{ij}。液体的总动能为

$$\sum_{i,j} a_{ij}\left(\frac{u_{ij}}{a_{ij}}\right)^2=\sum_{i,j} u_{ij}^2/a_{ij}.$$

基于上述解释，我们可把满足条件（i）和(ii)的u_{ij}（$i,j\in E$）称为一个流，而把上面的和数称为这个流的动能。这样，判准（12.2.2）可以解释成：链非常返的充要条件是：存在一个具有有限（动）能的流。

定理（12.2.2）的证明：（I）充分性．不失一般性，可设 $\pi_{i_0}=1$。

命

$$H=\{v:\ v=(v_{ij})\text{ 满足（iii）}\},$$

$$\langle v,\ w\rangle=\sum_{i,j} v_{ij}w_{ij}/a_{ij},$$

则 H 是一个 Hilbert 空间．定义

$$l^i_{jk}=\delta_{ij}a_{ik},\quad i,\ j,\ k\in E.$$

则

$$\langle l^i,\ l^j\rangle=\pi_i\delta_{ij},\quad i,\ j\in E.$$

从而 $l^i\in H$（$i\in E$）．这样，条件（ii）可以改写成

$$\langle l^{i_0},\ u\rangle\neq 0,\ \langle l^i,\ u\rangle=0,\ i\neq i_0.$$

再命

$$H_0=\{u\in H:\ u\text{ 满足条件（i）且 }\langle l^{i_0},\ u\rangle=1,\ \langle l^i,\ u\rangle=0,\ i\neq i_0\}.$$

显然 H_0 是一个非空凸集，易证它还是完备的．往证存在唯一的 $w\in H_0$，使

(12.2.4) $\qquad \|w\|=\inf\{\|v\|:\ v\in H_0\}$

为此，记 $\delta=\inf\{\|v\|:\ v\in H_0\}$．选 $\{v^{(\ )}\}_1^\infty\subset H_0$，使

$\|v^{(\ )}\| \longrightarrow \delta$. 由平行四边形法则

$$\|v^{(m)}-v^{(n)}\|^2=2\|v^{(m)}\|^2+2\|v^{(n)}\|^2-\|v^{(n)}+v^{(m)}\|^2$$

$$=2\|v^{(m)}\|^2+2\|v^{(n)}\|^2-4\left\|\frac{1}{2}(v^{(n)}+v^{(m)})\right\|^2$$

$$\leqslant 2\|v^{(m)}\|^2+2\|v^{(n)}\|^2-4\delta\longrightarrow 0,\ m,\ n\to\infty.$$

从而 $\{v^{(n)}\}_1^\infty$ 为 H_0 中的Cauchy 列。由 H_0 的完备性知，存在 $w\in H_0$，使得（12.2.4）成立。这样的 w 必定唯一。事实上，若另有 w' 满足（12.2.4），则

$$\|w'-w\|^2\leqslant 2\|w'\|^2+2\|w\|^2-4\left\|\frac{1}{2}(w'+w)\right\|$$

$$\leqslant 4\delta-4\delta=0.$$

其次，我们证明：

(12.2.5) $\quad \langle w,\ w-e\rangle=0,\ e\in H_0.$

记 $v=w-e$，无妨设 $v\neq 0$，则对每 λ

$$\|w-\lambda v\|^2=\|w\|^2+\lambda^2\|v\|^2-2\lambda\langle w,\ v\rangle$$

$$=\|w\|^2+\|v\|^2\left(\lambda-\frac{\langle w,\ v\rangle}{\|v\|^2}\right)^2-\frac{\langle w,\ v\rangle^2}{\|v\|^4}$$

特别地，取 $\lambda=\langle w,\ v\rangle/\|v\|^2$，则

$$\|z\|^2\equiv\left\|w-\frac{\langle w,v\rangle}{\|v\|^2}v\right\|^2=\|w\|^2-\frac{\langle w,v\rangle^2}{\|v\|^4}\leqslant\|w\|^2$$

这表明 $z\in H$。由此易证 $z\in H_0$。进而

$$\|w\|^2\leqslant\|z\|^2\leqslant\|w\|^2.$$

故

$$\langle w,\ w-e\rangle=\langle w,\ v\rangle=0.$$

现在，我们要利用（12.2.5）来构造 W_i $(i\in E)$ 使

(12.2.6) $\quad a_{ij}(W_j-W_i)=w_{ij},\ i,\ j\in E.$

$$W_{i_0}=0.$$

类似于§10.1所讨论的场论，将 W_i 理解为在点 i 处的势，那么，对于从 i_0 到 i 的任一条路 $i_0\to i_1\to\cdots\to i_n=i$，自然应定义沿这条

路所作的功为（注意与§10.1不同！）

$$W_i=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{w_{i_k i_{k+1}}}{a_{i_k i_{k+1}}}$$

为证明这确实给出了一个势函数（W_i: $i\in E$），我们还需证明W的取法与路径的选择无关. 为此，设

$$j_0\to j_1\to\cdots\to j_n=j_0$$

是任一条闭路，无妨设j_0，…，j_{n-1}各不相同，我们需要证明

$$(12.2.7)\qquad \sum_{k=0}^{n-1}\frac{w_{j_k j_{k+1}}}{a_{j_k j_{k+1}}}=0.$$

今定义（f_{ij}）：

$$f_{j_k j_{k+1}}=-f_{j_{k+1} j_k}=\begin{cases}1, & 如 k<n;\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

那么

$$\langle f, w\rangle=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{w_{i_k i_{k+1}}}{a_{i_k i_{k+1}}}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{w_{i_{k+1} i_k}}{a_{i_{k+1} i_k}}$$

$$=2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{w_{i_k i_{k+1}}}{a_{i_k i_{k+1}}}.$$

这样，为证（12.2.7），只需证$\langle f, w\rangle=0$. 但是

$$\langle f, l^i\rangle=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{l^i_{i_k i_{k+1}}}{a_{i_k i_{k+1}}}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{l^i_{i_{k+1} i_k}}{a_{i_{k+1} i_k}}$$

$$=0,\qquad i\in E.$$

$$\langle f, f\rangle<\infty.$$

这表明$f+w\in H_0$. 故

$$\langle f, w\rangle=-\langle w, w-(f+w)\rangle=0.$$

现在，由（12.2.6）得

$$\sum_i a_{i_0 j}W_i=\sum_i w_{i_0 j}=\langle w, l^{i_0}\rangle=1.$$

从而

(12.2.8)　$W=(W_i: i\in E)$ 非零。

再用一次 (12.2.6)：

$$\pi_i\sum_j P_{ij}W_j=\sum_j w_{ij}+W_i\sum_j a_{ij}$$
$$=\langle w,\ l^i\rangle+\pi_i W_i.$$

可见

(12.2.9)　$W_i=\sum_j P_{ij}W_j,\ i\neq i_0,$

(12.2.10)　$\sum_{i,j} a_{ij}(W_i-W_j)^2=\sum_{i,j}\frac{w_{ij}^2}{a_{ij}}<\infty.$

我们将利用 (W_i) 的这些性质来证明链的非常返性。

反证之，假定此链常返。命

$$T=\inf\{n\geqslant 0:\ X_n=i_0\}$$

对每 $A\subset E$，命

$${}_AP_{ij}^{(0)}=\delta_{ij},\ {}_AP_{ij}^{(1)}=P_{ij},\ {}_AP_{ij}^{(n)}=P^i[X_n=j;\ X_1,\ \cdots,X_{n-1}\notin A\}$$

于是由 (12.2.6) 和 (12.2.9) 得

$$W_i=\sum_{j\neq i_0}P_{ij}W_j=\sum_{j\neq i_0}P_{ij}\sum_{k\neq i_0}P_{jk}W_k$$
$$=\sum_{j\neq i_0}{}_{i_0}P_{ij}^{(2)}W_j=\cdots=\sum_{j\neq i_0}{}_{i_0}P_{ij}^{(n)}W_j$$
$$=E^i\,[W(X_n),\ n<T]$$
$$=E^i\,[W(X_{n\wedge T})],\ n\geqslant 1,\ i\neq i_0$$

当 $i=i_0$ 时，此式平凡，故我们总有

(12.2.11)　$W_i=E^i\,[W(X_{n\wedge T})],\ n\geqslant 1,$

进而，若记 $\mathscr{F}_n=\sigma(X_m:\ m\leqslant n)$，则由强马氏性

$$E^i[W(X_{(n+1)\wedge T})\mid\mathscr{F}_{n\wedge T}]$$
$$=E^{X_{n\wedge T}}[W(X_{1\wedge T})]$$
$$=\sum_j I_{[X_{n\wedge T}=j]}=E^j[W(X_{1\wedge T})]$$

$$= \sum_j I_{[X_{n\wedge T}=j]} W_j$$

$$= W(X_{n\wedge T}), \quad n \geqslant 1, \ i \in E.$$

这表明 $W(X_{k\wedge T})$ 是 $\boldsymbol{P}^i$ 鞅. 注意到 (12.2.11) 和鞅收敛定理，便知

$$(12.2.12) \qquad \lim_{k\to\infty} W(X_{k\wedge T}) = 0, \ a.s.$$

今命

$$g_{ij} = \boldsymbol{E}^i\left[\sum_{n=0}^{\infty} I_{[X_n=j, n<T]}\right], \ i, \ j \in E$$

则由常返性假设，

$$g_{ii} = \sum_{n=0}^{\infty} {}_{i_0}P_{ii}^{(n)} < \infty, \ i \neq i_0; \ g_{i_0 i_0} = 0.$$

易证

$$\pi_i g_{ij} = \pi_j g_{ji}, \ i, \ j \in E,$$

往证：$g_{ji} \leqslant g_{ii}$, $i \in E$. 当 $i = i_0$ 时，此式平凡。若 $i \neq i_0$，则

$$g_{ji} = \sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{P}^j[X_n = i, \ n < T]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \boldsymbol{P}^j[X_s \neq i, \ s < m; \ X_m = i, \ X_n = i, \ n < T]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} {}_{\{i_0, i\}}P_{ji}^{(m)} {}_{i_0}P_{ii}^{(n-m)}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} {}_{\{i_0, i\}}P_{ji}^{(m)} {}_{i_0}P_{ii}^{(n-m)}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} {}_{\{i_0, i\}}P_{ji}^{(m)} \sum_{n=0}^{\infty} {}_{i_0}P_{ii}^{(n)} \leqslant g_{ii}.$$

综合以上事实，得

$$\boldsymbol{E}^i[(W)X_{k\wedge T}) - W(X_0))^2]$$

$$\overset{\text{鞅性}}{=} \boldsymbol{E}^i\left[\sum_{j=0}^{k-1} (W(X_{(j+1)\wedge T}) - W(X_{j\wedge T}))^2\right]$$

$$\leqslant \boldsymbol{E}^i \left[\sum_0^\infty (W(X_{(j+1)\wedge T}) - W(X_{j\wedge T}))^2 \right]$$

$$= \boldsymbol{E}^i \left(\sum_0^\infty \boldsymbol{E}^i [(W(X_{(j+1)\wedge T}) - W(X_{j\wedge T}))^2 \mid \mathscr{F}_{j\wedge T}] \right)$$

$$= \boldsymbol{E}^i \left[\sum_{j=0}^\infty \sum_{l\in E} I_{\{X_{j\wedge T}=l, j<T\}} \boldsymbol{E}^i [(W(X_{(j+1)\wedge T}) - \right.$$

$$\left. - W_l)^2 \mid X_{j\wedge T} = l] \right]$$

$$= \sum_{l\in E} \sum_{m\in E} \boldsymbol{E}^i \left[\sum_{j=0}^\infty I_{\{X_{j\wedge T}=l, j<T\}} \boldsymbol{E}^i [(W_m - W_l)^2,\ X_{(j+1)\wedge T} \right.$$

$$\left. = m \mid X_{j\wedge T} = l] \right]$$

$$= \sum_{l,m\in E} P_{lm} (W_m - W_l)^2 \boldsymbol{E}^i \left[\sum_{j=0}^\infty I_{\{X_j = l, j<T\}} \right]$$

$$= \sum_{l\in E} g_{il} \sum_{m\in E} P_{lm} (W_m - W_l)^2$$

$$\leqslant g_{ii}/\pi_i \sum_{l,m\in E} \pi_l P_{lm} (W_l - W_m)^2 < \infty,$$

从而

$$\sup_k \boldsymbol{E}^i [(W(X_{k\wedge T}) - W(X_0))^2] < \infty,\ i\in E.$$

特别地，取 $i = i_0$，得

$$\sup_k \boldsymbol{E}^{i_0} [W(X_{k\wedge T})^2] < \infty$$

这说明 $(W(X_{k\wedge T})^2;\ k\geqslant 0)$ 是 $\boldsymbol{P}^{i_0}$ 下鞅，而且

$$W(X_{k\wedge T}) \xrightarrow[k\to\infty]{a.s. L^2(\boldsymbol{P}^{i_0})} W(X_T) = 0$$

$$\sup_k \boldsymbol{E}^{i_0} [W(X_{k\wedge T})^2] = \boldsymbol{E}^{i_0} [W(X_T)^2] = 0$$

故 $W(X_{k\wedge T}) = 0$，$k\geqslant 0$，$\boldsymbol{P}^{i_0} - a.s.$ 由于链是互通的，故 $W = 0$。这矛盾于 (12.2.8)．

（Ⅰ）必要性。

设 $(X_n)_{n\geq 0}$ 非常返。命

$$W_i = \boldsymbol{P}^i[\text{存在 } n\geq 0 \text{ 使 } X_n = i_0.]$$

我们将证明：

$$u_{ij} \equiv \pi_i P_{ij}\ (W_i - W_j)\ ,\ i,\ j \in E$$

满足条件（i），(ii) 和（iii）.（i）是显然的. 至于（ii），只需注意由非常返性，

$$\sum_j u_{i_0 j} = \pi_{i_0} \sum_j P_{i_0 j}\ (W_{i_0} - W_j)$$

$$= \pi_{i_0}\ (1 - W_j) > 0,$$

$$\sum_j u_{ij} = \pi_i\ (W_i - \sum_j P_{ij} W_j)\ = 0,\ i \neq i_0.$$

往证（iii）. 设 F 为包含 i_0 的任一有限集，并记 $F^* = F - \{i_0\}$，定义

$$w_i = \boldsymbol{P}^i[\text{存在 } n\geq 0 \text{ 使 } X_n = i_0 \text{ 且对每 } m\leqslant n,\ X_m \in F]$$

那么，由 $w_i = \sum_{j\in F^*} P_{ij} w_j = \sum_j P_{ij} w_j,\ i\in F^*$，得

$$\sum_{i\in F^*} \sum_{j\in E} \pi_i P_{ij}\ (w_i - w_j)^2$$

$$= \sum_{i\in F^*} \sum_{j\in E} \pi_i P_{ij} (w_j^2 - w_i^2)$$

另一方面，

$$1 = w_{i_0} \geqslant w_i \geqslant w_j = 0,\ i\in F,\ j\notin F$$

从而

$$\sum_{i\in F^*} \sum_{j\in E} \pi_i P_{ij}\ (w_i - w_j)^2$$

$$= \sum_{i\in F^*} \sum_{j\notin F} \pi_i P_{ij}\ (w_j^2 - w_i^2)$$

$$+ \sum_{i\in F^*} \pi_i P_{ii_0}\ (w_{i_0}^2 - w_i^2)$$

$$\leqslant \sum_{i\in F} \pi_i P_{ii_0} \ (w_{i_0}^2 - w_i^2) \leqslant \pi_{i_0}.$$

现在，让 F 变动．取 $F_n \uparrow E$ 并定义相应的 $w^{(n)}$．则 $\lim_{n\to\infty} w_i^{(n)} = W_i$，$i\in E$．于是由前段所证和 Fatou 引理，得

$$\sum_{i\neq i_0} \sum_{j\in E} \pi_i P_{ij} \ (W_i - W_j)^2 \leqslant \pi_{i_0}.$$

进而

$$\sum_{i,j\in E} \pi_i P_{ij} \ (W_i - W_j)^2 \leqslant 2\pi_{i_0} < \infty. \qquad \blacksquare$$

(12.2.13) **例** 二维简单随机徘徊

$$P_{ij} = \begin{cases} 1/4, & \text{如 } |i-j| = 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

是常返的．

显然，$P = (P_{ij};\ i,\ j\in \boldsymbol{Z}^2)$ 是可配称的，且配称列是常数．无妨取

$$\pi_i = 4, \qquad i\in \boldsymbol{Z}^2.$$

那么

$$a_{ij} = \pi_i P_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{如 } |j-i| = 1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

取 $A_0 = \{(0,\ 0)\}$，视之为流 (u_{ij}) 的源头．记 A_n 为边长是 $2n$、中心在 $(0,\ 0)$ 处的正方形上的整点 $(n\geqslant 1)$．并用 $[A_n,\ A_{n+1}]$ 表连接 A_n 和 A_{n+1} $(n\geqslant 0)$ 的 $8n+4$ 条边（即管子）．当 $n\geqslant 1$ 时，

$$0 = \sum_{i\in A_n,\ i\in Z^2} u_{ij}$$

$$= \sum_{(i,j)\in [A_n,\ A_{n+1}]} u_{ij} - \sum_{(i,j)\in [A_{n-1},\ A_n]} u_{ij}.$$

可见，

$$c \equiv \sum_{(i,j)\in [A_n,\ A_{n+1}]} u_{ij}$$

与 $n\geqslant 0$ 无关．无妨设 $c>0$．由初等不等式

$$\left(\sum_i a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_i a_i^2\right)\left(\sum_i b_i^2\right)$$

得

$$\left(\sum_{(i,j)\in[A_n, A_{n+1}]} u_{ij}\right)^2 = \left(\sum_{(i,j)\in[A_n, A_{n+1}]} \frac{u_{ij}}{\sqrt{a_{ij}}}\cdot\sqrt{a_{ij}}\right)^2$$

$$\leqslant \left(\sum_{(i,j)\in[A_n, A_{n\mp1}]} \frac{u_{ij}^2}{a_{ij}}\right)\left(\sum_{(i,j)\in[A_n, A_{n\mp1}]} a_{ij}\right),$$

$$n\geqslant 0.$$

于是

$$\sum_{(i,j)\in\mathbf{Z}^2} \frac{u_{ij}^2}{a_{ij}} \geqslant \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{(i,j)\in[A_n, A_{n\mp1}]} \frac{u_{ij}^2}{a_{ij}}\right)$$

$$\geqslant \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{(i,j)\in[A_n, A_{n+1}]} u_{ij}\right)^2\left(\sum_{(i,j)\in[A_n, A_{n\mp1}]} a_{ij}\right)^{-1}$$

$$= c\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{8n+4} = \infty. \quad ▮$$

关于三维情形，见（12.2.28）．

设 (E, X_n, a_{ij}) 是一个可配称马链，$\widetilde{a}_{ij}$ 为任一实数列，满足

$$0\leqslant\widetilde{a}_{ij}\leqslant a_{ij},\quad \widetilde{a}_{ij}=\widetilde{a}_{ij},\ i,\ j\in E.$$

命

$$\widetilde{E} = \{i\in E:\ \widetilde{\pi}_{ii}\equiv\sum_j\widetilde{a}_{ij}>0\}.$$

再设 $\widetilde{X}$ 为取值于 $\widetilde{E}$、具有转移概率

$$\widetilde{P}_{ij} = \widetilde{a}_{ij}/\widetilde{\pi}_i$$

的马链．称 $(\widetilde{E}, \widetilde{X}_n, \widetilde{a}_{ij})$ 为 (E, X_n, a_{ij}) 的一个子过程．由定理（12.2.2）立即可得

（12.2.14）**推论**　常返可配称马链的子过程也常返．

下面的结果属于 Nash-Williams[1]:

(12.2.15) **定理** 设 (E, X_n, a_{ij}) 是一个可配称马链，$E=\sum_{k=0}^{\infty}\Lambda^k$，$\Lambda^k(k\geqslant 0)$ 互不相容。假定

$$i\in\Lambda^k,\ a_{ij}>0\Longrightarrow j\in\Lambda^{k-1}+\Lambda^k+\Lambda^{k+1},\ k\geqslant 0$$

$$\sum_{i\in\Lambda_k}\sum_{j\in E} a_{ij}<\infty,\ k\geqslant 0.$$

此处约定$\Lambda^{-1}=\phi$。记

$$[\Lambda^{k-1},\ \Lambda^k]=\{(i,j):\ i\in\Lambda^{k-1}, j\in\Lambda^k\}.$$

那么，只要

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Big[\sum_{(i,j)\in[\Lambda^k,\Lambda^{k+1}]} a_{ij}\Big]^{-1}=\infty.$$

此链就常返。

证 证法与 (12.2.13) 完全类似。如有必要，可将 Λ^0 分成两部分，我们总可假设 $\Lambda^0=\{i_0\}$.给定 E 上的一个以 i_0 为源的流 (u_{ij})，我们需要证明它必有无限能。为方便，无妨设此流的强度为1，即

$$\sum_j u_{i_0j}=1,\ \sum_j u_{ij}=0, i\neq i_0.$$

如果对于某k，$\sum_{i\in\Lambda^k,\ j\in E}|u_{ij}|=\infty$，则由 Cauchy-Schwartz 不等式立知它有无限能（参考 (12.2.13) 之证）。因此，我们可设

$$\sum_{i\in\Lambda^k,\ j\in E}|u_{ij}|<\infty,\ k\geqslant 0.$$

然后仿 (12.2.13) 的证法易得所需的结论。 ∎

定理 (12.2.2) 有一个单源头条件，即条件 (ii)。这常给应用带来不便。下面，我们要排除这一限制，得到更好的判准。

(12.2.16) **定理** 定理 (12.2.2) 中的条件 (ii) 可换成

(ii)′ $\sum_{i\in E}\left|\sum_{j\in E}u_{ij}\right|<\infty$ 且 $\sum_{i\in E}\left(\sum_{j\in E}u_{ij}\right)\neq 0$.

证 条件显然是必要的．以下分五步完成充分性的证明．设 (u_{ij}) 为满足 (i)，(ii)′和(iii)的流．

(*a*) 先证：存在 $i_0\in E$，使

$$(12.2.17)\qquad \sum_j u_{i_0 j}>\sum_{i\neq i_0}\left|\sum_j u_{ij}\right|.$$

为方便，简记 $d_i=\sum_j u_{ij}$．如有必要，用 $(-u_{ij})$ 代替 (u_{ij})，我们可以假定

$$(12.2.18)\qquad \sum_i d_i>0.$$

由于 $\sum_i\left|d_i\right|<\infty$，故可取有限子集 $I\subset E$，使

$$(12.2.19)\qquad \sum_{i\in I}d_i>\sum_{i\notin I}|d_i|.$$

若 I 为单点集，则结论已真．否则，任取 $i_0\in I$．再取 $l\in I-\{i_0\}$．任意取定一条从 i_0 到 l 的路 $i_0\to i_1\to\cdots i_n\to i_{n+1}=l$，并命

$$\widetilde{u}_{ij}=\begin{cases}u_{ij}+d_l, & 如\ i=i_k,\ j=i_{k+1},\ 0\leqslant k\leqslant n;\\ u_{ij}-d_l, & 如\ i=i_{k+1},\ j=i_k,\ 0\leqslant k\leqslant n;\\ u_{ij}, & 其它情形.\end{cases}$$

那么

$$\widetilde{d}_i=\begin{cases}d_i, & i\neq i_0,l;\\ d_{i_0}+l_l, & i=i_0;\\ 0, & i=l.\end{cases}$$

从而 $\sum_{i\in I-\{l\}}\widetilde{d}_i=\sum_i d_i>0$,

$$\sum_{i\in I-\{l\}}\widetilde{d}_i=\sum_{i\in I}\widetilde{d}_i=\sum_{i\in I}d_i>\sum_{i\notin I}|d_i|=\sum_{i\notin I-\{l\}}|\widetilde{d}_i|.$$

这样，新的流 $(\widetilde{u_{ij}})$ 依然满足条件 (i)，(12.2.18)和 (12.2.19)，

而且I的个数减少一个．由于我们只改变了一条可达路上的流量，因而不会改变有限能性质，即条件（iii）依然成立．如此继续下去，有限步必定得到（12.2.17）．

(b)使用（12.2.2）中的记号，我们可以把问题归结为寻找满足

$$\langle l^i, w\rangle = \langle l^i, u\rangle,\ i\neq i_0.$$

$$|\langle l^{i_0}, w\rangle| \leqslant \sum_{i\neq i_0} |\langle l^i, u\rangle|$$

和条件（i）的$w\in H$．事实上，由前一式得到

$$\langle l^i,\ u-w\rangle = 0,\ i\neq i_0,$$

而由后一式得到

$$|\langle l^{i_0},\ u-w\rangle| \geqslant |\langle l^{i_0}, u\rangle| - |\langle l^{i_0}, w\rangle|$$

$$\geqslant |\langle l^{i_0}, u\rangle| - \sum_{i\neq i} |\langle l^i, u\rangle|$$

$$= \sum_j u_{i_0 j} - \sum_{i\neq i_0} |\sum_j u_{ij}| > 0.$$

可见$u-w$满足定理（12.2.2）的全部条件．

(c) 为证存在（b）中所需的w，我们将使用类似于（12.2.2）证明中构造w使其最小化H_0中的范数．代替H_0，我们命

$$H(F) = \{v\in H:\ \langle l^i, v\rangle = \langle l^i, u\rangle, i\in F^*\},$$

此处$F\ni i_0$为E的任一有限子集，而$F^* = F - \{i_0\}$．我们将记w_F最小化$H(F)$中的范数；随后，作为$\{w_{F_n}: u\geqslant 1\}$的弱极限，我们将得到所需的$w$．

与先前的证明一样，满足

$$\|w_F\| = \inf\{\|v\|:\ v\in H(F)\}$$

存在且唯一，它由

$$\langle w_F, w_F - e\rangle = 0,\ e\in H(F)$$

所刻画，由于$u\in H(F)$，从而

$\|w_F\|\leqslant\|u\|$.

对于一切如上的 F 成立. 今取有限子集序列 $i_0\in F_n\uparrow E$, 则由上式知 $\{\|w_{F_n}\|: n\geqslant 1\}$ 是有界集, 因而存在弱极限w.显然, $w\in H$. w 满足 (i) 而且

$\langle l^i, w\rangle = \langle l^i, u,\rangle \quad i\neq i_0.$

故我们只需证明: 对于如上的每一个 F,

$$(12.2.20)\qquad |\langle i^{i_0}, w_F\rangle| \leqslant \sum_{i\in F^*} |\langle l^i, w_F\rangle| .$$

表 $w_F = (w_{ij}: i, j\in E)$. 往证: 存在$\varphi: E\to \boldsymbol{R}$, 使

$$(12.2.21)\qquad w_{ij} = a_{ij}(\varphi_i - \varphi_j);$$

$$(12.2.22)\qquad \text{在 } E - F^* \text{上}, \varphi = 0.$$

与前面完全一样, 使用场论的思想和已证的(c), 我们可以得到唯一的满足 (12.2.21) 和 $\varphi_{i_0} = 0$ 的函数φ. 为证所造的函数 φ 满足 (12.2.22), 设$i\in E - F$, 并分两种情况:

①$a_{i_0 i} > 0$.

此时必有 $w_{i_0 i} = 0$, 进而 $\varphi_i = 0$. 否则, 用

$$\widetilde{w}_{kj} = \begin{cases} 0, & k = i_0,\ j = i \text{ 或 } k = i,\ j = i_0; \\ w_{kj}, & \text{其它情形} \end{cases}$$

代替 (w_{ij}), 我们将得到满足 (i) 的$\widetilde{w}\in H(F)$, 使 $\|\widetilde{w}\| < \|w_F\|$, 而导致矛盾.

②$a_{i_0 i} = 0$.

此时, 我们引进

$\widetilde{a}_{i_0 i} = c > 0, \qquad \widetilde{a}_{i i_0} = c.$

$\widetilde{a}_{kj} = a_{kj}$, 其它情形.

并定义相应的 $\widetilde{l}^i$, $\widetilde{H}$, $\widetilde{H}(F)$ 和$\widetilde{w}_F$. 易证 $\|\widetilde{w}_F\| = \|w_F\|$, 因而由唯一性知$\widetilde{w}_F = w_F$. 这样, 由已证的①, 我们也有 $w_{i_0 i} = \widetilde{w}_{i_0 i} = 0$, 进而$\varphi_i = 0$.

(d) 今命

$$T=\inf\{u\geqslant 0,\ X_n\notin F^{\bullet}\}$$

$$g_{ij}=\boldsymbol{E}^{i}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{I}_{[X_n=j,\ n<T]}\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\boldsymbol{P}^{i}[X_n=j,\ n<T],\ j\in F^{\bullet}.$$

往证

$$(12.2.23)\quad \varphi_i\equiv\varphi(i)=\sum_{i\in F^{\bullet}}g_{ij}\frac{\langle l^j,\ w_F\rangle}{\langle l^j,\ l^j\rangle};$$

$$(12.2.24)\quad \sum_{i\in F^{\bullet}}\sum_{j\in F^{\bullet}}a_{ij}g_{jk}=\langle l^k,\ l^k\rangle,\ k\in F^{\bullet}.$$

首先，我们有

$$(12.2.25)\quad g_{jk}=0,\ i\in F^{\bullet};\ k\in F^{\bullet}$$

$$(12.2.26)\quad g_{ik}-\delta_{ik}=\sum_{j}P_{ij}g_{jk}=\sum_{j\in F^{\bullet}}P_{ij}g_{jk},$$

$$k\in F^{\bullet}.$$

另一方面，由 (12.2.21) 和 (12.2.22) 得到

$$\langle l^i,w_F\rangle=\pi_i\varphi_i-\pi_i\sum_{j}P_{ij}\varphi_j$$

$$=\pi_i\varphi_i-\pi_i\sum_{j\in F^{\bullet}}P_{ij}\varphi_j.$$

从而

$$(12.2.27)\quad \varphi_i=\sum_{j\in F^{\bullet}}P_{ij}\varphi_j+\frac{\langle l^i,w_F\rangle}{\langle l^i,l^i\rangle}.$$

进而，若记 (12.2.23) 的右方为 $\widetilde{\varphi}$，则

$$\boldsymbol{E}^{i}[(\varphi-\widetilde{\varphi})(X_{(n+1)\wedge T})\,|\,\mathscr{F}_{n\wedge T}]$$

$$=\boldsymbol{E}^{X_{n\wedge T}}[(\varphi-\widetilde{\varphi})(X_{1\wedge T})]$$

$$=\sum_{i}\mathrm{I}_{[X_{n\wedge T}=i]}\sum_{j\in F^{\bullet}}P_{ij}(\varphi_j-\widetilde{\varphi}_j)$$

$$= \sum_i I_{[X_{n\wedge T}=i]}(\varphi_i - \tilde{\varphi}_i)$$

$$= (\varphi - \tilde{\varphi})(X_{n\wedge T}),$$

这表明 $(\varphi - \tilde{\varphi})(X_{n\wedge T})$，$\mathscr{F}_{n\wedge T}$，$\boldsymbol{p}^i$）是鞅，但在$E - F^{\bullet}$上，$\varphi = \tilde{\varphi} = 0$。故得（12.2.23）. 为证(12.2.24)，固定 $k \in F^{\bullet}$，并命 $c_{ij} = a_{ij}(g_{ik} - g_{jk})$ ，则由

$$\sum_{j\in F^{\bullet}-\{k\}} \sum_i a_{ji} g_{ik}$$

$$= \sum_{j\in F^{\bullet}-\{k\}} \pi_j \sum P_{ji} g_{ik}$$

$$= \sum_{j\in F^{\bullet}-\{k\}} \pi_j g_{jk}$$

$$= \sum_{j\in F^{\bullet}-\{k\}} \sum_i a_{ji} g_{jk} < \infty$$

知

$$\sum_{j\in \bullet} \sum_i c_{ji} = \sum_i c_{ki} = \sum_i a_{ki}(g_{kk} - g_{ik})$$

$$= \pi_k - \pi_k[1 - g_{kk} + \sum_i P_{ki} g_{ik}]$$

$$= \pi_k = \langle l^k, l^k \rangle.$$

另一方面，注意$c_{ik} + c_{ji} = 0$，便得

$$\langle l^k, l^k \rangle = \sum_{j\in F^{\bullet}} \sum_{i\in E} c_{ji}$$

$$= \sum_{j\in F^{\bullet}} \sum_{i\in F^{\bullet}} c_{ji} + \sum_{j\in F^{\bullet}} \sum_{i\bar{\in} F^{\bullet}} c_{ji}$$

$$= \sum_{j\in F^{\bullet}} \sum_{i\bar{\in} F^{\bullet}} c_{ji}$$

$$= \sum_{j\in F^{\bullet}} \sum_{i\bar{\in} F^{\bullet}} a_{ji}[g_{jk} - g_{ik}]$$

$$= \sum_{j\in F^{\bullet}} \sum_{i\bar{\in} F^{\bullet}} a_{ji} g_{jk}.$$

此即是（12.2.24）.

(*e*) 我们使用 (12.2.23) 和 (12.2.24) 来证明所需的 (12.2.20) .首先，由 (12.2.24) 得

$$\sum_j a_{i_0 j} g_{jk} \leqslant \pi_k,\ k \in F^*.$$

其次，由 (12.2.21) 和 (12.2.22) 得

$$\langle l^{i_0},\ w_F\rangle = -\sum_{j\in F^*} a_{i_0 j}\varphi(j)$$

再用 (12.2.23) ，便得

$$|\langle l^{i_0},\ w_F\rangle| \leqslant \sum_{j\in F^*}\sum_{k\in F^*} a_{i_0 j} g_{jk}\ \frac{|l^k,\ w_F\rangle|}{\langle l^k,\ l^k\rangle}$$

$$\leqslant \sum_{k\in F^*} |\langle l^k,\ w_F\rangle| .$$

这正是所需的不等式。

(12.2.28) **例** 三维简单随机徘徊是非常返的。

证 取

$$u_{ij} = \begin{cases} \left(\frac{1}{|i|} - \frac{1}{|j|}\right) \wedge 2, & \text{如 } |i-j| = 1,\ i, j \in \boldsymbol{Z}^3; \\ 0 & \text{, 其它.} \end{cases}$$

并记

$$N_i = \{j \in \boldsymbol{Z}^3 : |i-j| = 1\}.$$

显然 (u_{ij}) 满足条件 (i) ，当 $j \in N_i$ 时，

$$u_{ij} = \left(\frac{1}{|i|} - \frac{1}{|j|}\right) \wedge 2 = o\left(\frac{1}{|i|^2}\right).$$

可见它也满足 (iii) . 为验证条件 (ii)′，设 M 是中心在原点，边长为 $2m$ 的正方体，则

$$\sum_{i\in M}\sum_{j\in N_i} u_{ij} = \sum_{i\in\partial M}\sum_{j\in N_i - M} u_{ij} = o(1).$$

另一方面，若记 $(e_1, e_2,\ e_3)$ 为 $\boldsymbol{R}^3$ 上的坐标基，并命

$$g(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{3} [f(x+\varepsilon e_i) + f(x-\varepsilon e_i) - 2f(x)]$$

此处 f 为 x 邻域内的调和函数，则由 Taylor 展式知

$$g(\varepsilon)=\frac{1}{2}(\triangle f)\varepsilon^2+o(\varepsilon^4)=o(\varepsilon^4).$$

利用以上两个估计及 $\triangle\left(\frac{1}{x}\right)=0\ (x\neq 0)$ 易得 (ii)′. ∎

§12.3 补充与注记

定理 (12.1.7) 及之前的结果主要属于 Foster[1] 和 Kendall[1]. 定理 (12.1.9) 和 (12.1.19) 取自吴立德[1]. 定理 (12.1.15) 及之前的两个引理是新的，虽然某些特殊形式是已知的. 注 (12.1.26) 参考了 Reuter[3]. §12.1 的某余结果属于严士健、陈木法[2].

§12.2 取自 Lyons[1].

何声武告知笔者如下有趣的事实，它提供了定理 (12.1.9) 的一个初等证明.

(12.3.1) **引理** 假定 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$ 正则. 则

$$\int_0^\infty P_{ij}(t)\,dt=\sum_{n=0}^\infty \overline{P}_{ij}^{(n)}/q_j,\quad i,j\in E.$$

此处

$$\overline{P}_{ij}=\begin{cases}\delta_{ij}, & \text{如 } q_i=0;\\ (1-\delta_{ij})q_{ij}/q_i, & \text{如 } q_i\neq 0.\end{cases}$$

证 由于 $(P_{ij}(\lambda))$ 是向后方程的最小解，

$$P_{ij}(\lambda)\uparrow\int_0^\infty P_{ij}(t)\,dt,\ \frac{q_{ij}}{\lambda+q_i}\uparrow\frac{q_{ij}}{q_i},\ \lambda\downarrow 0$$

因此，由单调收敛定理和比较定理易见，对于固定的 $j\in E$, $\int_0^\infty P_{ij}(t)\,dt\ (i\in E)$ 是方程

$$x_i=\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{q_i}x_k+\frac{\delta_{ij}}{q_i},\quad i\in E.$$

的最小解. 但

$$x_i^{(1)}=\frac{\delta_{ij}}{q_i}=\frac{\overline{P}_{ij}^{(0)}}{q_j},\ i\in E.$$

如 $x_i^{(n)}=\overline{P}_{ij}^{(n-1)}/q_j,\ i\in E$, 则

$$x_i^{(n+1)}=\sum_k \overline{P}_{ik}^{(n)}x_k=\sum_k \overline{P}_{ik}\overline{P}_{kj}^{(n-1)}/q_j=\overline{P}_{ij}^{(n)}/q_j,$$

故

$$\int_0^\infty P_{ij}(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}x_i^{(n)}=\sum_{n=0}^{\infty}\overline{P}_{ij}^{(n)}/q_j. \qquad \blacksquare$$

第十三章　不变测度

不变测度的研究具有重要的实际意义。一个系统是否稳定，取决于它是否存在平稳分布，即总负荷为1的不变测度。本章先研究离散参数马链、既而连续参数马链的不变测度的存在性。最后，我们将研究一般马氏过程的另一类不变测度——λ_π不变测度的存在性问题。

§13.1　离散时间参数马链的不变测度

设 (E, X_n, P_{ij}) 是一个离散参数不可约马链。我们将分正常返、常返和非常返三种情形研究其不变测度的存在性。当然，我们排除恒为零的平凡的不变测度。所谓唯一性，仍指不计常数因子的唯一性。

由不可约性假设，若 (π_i) 是一个不变测度，则 $\pi_i>0$, $i\in E$。

关于正常返情形，答案格外简单。

(13.1.1) **定理**　设 (E, X_n, P_{ij}) 不可约、正常返．若它是非周期的则不变测度存在且唯一。它就是

$$\pi_j=\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}\ ,\quad i,j\in E$$

若它是周期的，则存在无穷多个不变测度。

证　见定理 (12.1.6)．　】

(13.1.2) **推论**　设 (E, X_n, P_{ij}) 不可约、非正常返，则它的不变测度只要存在，便不可和。

证　也见定理 (12.1.6)．　】

关于常返情形，结论可在许多书中找到．此处，我们只列出结果．

(13.1.3) **定理** 设 (E, X_n, P_{ij}) 不可约、常返．则不变测度存在且唯一．它就是

$$\pi_{i_0} = 1,$$

$$\pi_i = \sum_{n=0}^{\infty} {}_{i_0}p_{i_0 i}^{(n)}, \quad i \neq i_0,$$

其中 i_0 为任一取定的 E 中元，而 ${}_kP_{ij}^{(n)}$ 表示禁止概率：对于每 $A \subset E$,

(13.1.4) $${}_AP_{ij}^{(0)} = \delta_{ij},$$

$${}_AP_{ij}^{(n)} = \boldsymbol{P}_i[X_n = j, \ X_1, \cdots, \ X_{n-1} \notin A].$$

对于非常返情形，情况远为复杂．请看：

(13.1.5) **例** 取 $P_{i,i+1} = p_i$, $P_{i,0} = 1 - p_i$, $i \geqslant 0$. 如果 (π_i), $\pi_0 = 1$ 是一个不变测度，则

$$\pi_i = \prod_{k=0}^{i-1} p_k, \quad i > 0;$$

$$\pi_0 = 1 = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k (1 - p_k) = \lim_{n \to \infty} (1 - \prod_{k=0}^{n} p_k).$$

这样，存在（自然唯一！）不变测度的充要条件是 $\lim\limits_{n \to \infty} \prod\limits_{k=0}^{n} p_k = 0$. 另一方面，$\prod\limits_{k=0}^{n} p_k$ 表示链从 0 出发、前 $n+1$ 步不回到 0 的概率．因此，条件 $\lim\limits_{n \to \infty} \prod\limits_{k=0}^{n} p_k = 0$ 等价于从 0 出发、经有限步回到 0 的概率为 1，即等价于链常返．这样，我们得到非常返不存在不变测度的例子．

(13.1.6) **例** 取 $P_{i,i+1} = p \neq 1/2$; $P_{i,i-1} = q \equiv 1 - p$; $i = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$. 此链非常返．假定 (π_i) 是一个不变测度，则

$$q\pi_{k+1}-\pi_k+\pi_{k-1}p=0,\ k=0,\pm1,\pm2,\ \cdots$$

此差分方程的通解是

$$\pi_k=c_1(\gamma/q)^k+c_2,\ k=0,\pm1,\ \cdots$$

这样，对于任何的 $c_1, c_2\geqslant0$, $c_1+c_2=1$, (π_i) 是一个不变测度。故存在无穷多个不变测度。

(13.1.7) **例** 取

$$P_0=1/2, P_{01}=1/2, P_{i,i-1}=P_{i,i}=1/2^{i+2},$$

$$P_{i,i+1}=(2^{i+1}-1)/2^{i+1}, i=1,2,\cdots$$

我们注意，此链从 0 出发直接跑到∞的概率是

$$1/2\prod_{i=1}^{\infty}(2^{i+1}-1)/2^{i+1}>0$$

从而，链从 0 出发、有限步不回到 0 的概率是正的。故此链非常返。

设 (π_i) 是任一不变测度，则

$$1/2\pi_0+1/8\pi_1==\pi_0,$$

$$1/2\pi_0+1/8\pi_1+1/16\pi_2=\pi_1,$$

$$P_{k-2,k-2}\pi_{k-2}+P_{k-1,k-1}\pi_{k-1}+P_{k,k-1}\pi_k=\pi_{k-1},$$

$$k=2,3,\ \cdots$$

由条件 $\pi_0=1$ 得 $\pi_1=4$。进而由第三个等式知，(π_i) 是唯一决定的。为证这样迭代出来确是一个不变测度，只需再证 (π_i) 是正的。但这容易由 $\pi_1>\pi_0>0$ 和归纳法得到。

在给出非常返情形不变测度的存在性判准之前，我们先给出一个必要条件，这个条件有明显的直观意义。

(13.1.8) **定理** 设 (E, X_n, P_{ij}) 是不可约非常返链。无妨设 $E=\{0,1,2\cdots\}$。那么，只要存在不变测度，必定存在来自无穷的简单路径。即存在互不相同的 $i_1, i_2, \cdots$ 使

$$P_{i_2i_1}>0, P_{i_3i_2}>0,\ \cdots$$

证 定义对偶链

$$\overline{P}_{ij}=\pi_j P_{ji}/\pi_i,\ \ i,j\in E,$$

则

$$\overline{P}_{ij}^{(n)}=\pi_j P_{ji}^{(n)}/\pi_i,\ \ i,j\in E.$$

由于$\sum_{n=0}^{\infty}\overline{P}_{ij}^{(n)}=(\pi_j/\pi_i)\sum_{n=0}^{\infty}P_{ji}^{(n)}<\infty$. 可见对偶链$(E,\ \overline{X}_n,\ \overline{P}_{ij})$不可约、非常返. 不失一般性，可设此链是非周期的. 那么，对于几乎一切ω, $\overline{P}_{\overline{X}_1(\omega),\overline{X}_0(\omega)}$, $\overline{P}_{\overline{X}_2(\omega),\overline{X}_1(\omega)}$，…全都是正的. 另另一方面，由于链是非常返的，故对于几乎一切ω, $(\overline{X}_0(\omega),\overline{X}_1(\omega),\cdots)$中不可能有某一元素出现无穷多次. 这样，对几乎一$\omega$，存在无穷多个互不相同的子列$\overline{X}_{n_0}(\omega)$，$\overline{X}_{n_1}(\omega)$，…使

$$\overline{P}_{\overline{X}_{n_1}(\omega),\ \overline{X}_{n_0}(\omega)}>0,\ \overline{P}_{\overline{X}_{n_2}(\omega),\ \overline{X}_{n_1}(\omega)}>0,\ \cdots$$ ▌

下面将给出存在性判准. 为方便，仍然取

$$E=\{0,1,2,\cdots\}.$$

注意不可约链非常返的充要条件是

$$(13.1.9)\quad \sum_{n=0}^{\infty}P^n<\infty.$$

其次，我们将允许链是中断的，即

$$\sum_j P_{ij}\leqslant 1,\ \ i\in E.$$

仿(13.1.4)；定义

$$_HP_{ij}^{(0)}=\delta_{ij}$$

$$_HP_{ij}^{(n)}=\sum_{k_1,\cdots,k_{n-1}\overline{\in}H}P_{ik_1}P_{k_1k_2}\cdots P_{k_{n-1},j}\quad i,j\in E,\ n\geqslant 1.$$

此处$H\subset E$.

(13.1.10) **定理** 设(E,X_n,P_{ij})为满足(13.1.9)的不可约链（可以中断），则存在不变测度的充要条件是：存在无穷子集$K\subset E$，使

$$\lim_{j\in\infty}\lim_{K\ni i\to\infty} L_{ki}(j)/L_{ki}(0)=0.$$

此处

$$(13.1.11)\qquad L_{ki}(j)=\sum_{r\neq j}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}{}_iP_{kr}^{(n)}P_{ri}+P_{ki},\quad i,j,k\in E.$$

证 (I) 充分性

显然有

$$(13.1.12)\qquad {}_HP_{ij}^{(n)}=\sum_{l\in H}{}_HP_{il}^{(m)}{}_HP_{lj}^{(n)},\quad i,\ j\in E,\qquad 0\leqslant m\leqslant n$$

往证

$$(13.1.13)\qquad {}_iP_{ii}^{(n)}=\sum_{m=1}^{n}{}_{\{i,j\}}P_{ij}^{(m)}{}_iP_{ji}^{(n-m)},\ i\neq j.$$

事实上,

$$
\begin{aligned}
{}_iP_{ii}^{(n)}&=\sum_{k_1,\cdots,k_{n-1}\neq i}P_{ik_1}P_{k_1k_2}\cdots P_{k_{n-1}i}\\
&=\sum_{m=1}^{n}\sum_{\substack{k_1,\cdots,k_m\neq i,j\\ k_m=j}}P_{ik_1}P_{k_1k_2}\cdots P_{k_{m-1}j}\\
&\quad\times\sum_{k_{m+1},\cdots,k_{n-1}\neq i}P_{jk_{m+1}}\cdots P_{k_{n-1}i}\\
&=\sum_{m=1}^{n}{}_{\{i,j\}}P_{ij}^{(m)}{}_iP_{ji}^{(n-m)}.
\end{aligned}
$$

定义

$$\varphi_{ij}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}{}_iP_{ii}^{(n)}\right)^{-1},\ i,\ j\in E;$$

$$\theta_{ij}=\sum_{n=1}^{\infty}{}_{\{i,j\}}P_{ij}^{(n)},\ i\neq j;$$

$$Q_{ki}=\sum_{n=0}^{\infty}P_{ki}^{(n)},\ k,\ i\in E.$$

则由假设立知 $\theta_{ij}(i\neq j)$ ，φ_{ij} 和 Q_{ij} 都是正的且有限。

利用（13.1.13），得

$$(13.1.14)\quad \theta_{ij}=\theta_{ij}\left(\sum_{n=0}^{\infty}{}_iP_{ii}^{(n)}\right)\varphi_{ji}$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}{}_{\{i,j\}}P_{ii}^{(m)}\sum_{n=0}^{\infty}{}_iP_{ii}^{(n)}\varphi_{ji}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}{}_{\{i,j\}}P_{ii}^{(m)}{}_iP_{ii}^{(n-m)}\varphi_{ji}$$

$$=\left(\sum_{n=1}^{\infty}{}_iP_{ii}^{(n)}\right)\varphi_{ji},\quad i\neq j$$

另一方面

$$(13.1.15)\quad \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{i\in\{k_1,\cdots,k_{n-1}\}}P_{kk_1}P_{k_1k_2}\cdots P_{k_{n-1}i}$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{n-1}\sum_{k_1,\cdots,k_{m-1}}P_{kk_1}\cdots P_{k_{m-1}i}$$

$$\times\sum_{k_{m+1}\neq i,\cdots,k_{n-1}\neq i}P_{ik_{m+1}}\cdots P_{k_{n-1}i}$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{n-1}P_{ki}^{(m)}{}_iP_{ii}^{(n-m)}$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}P_{ki}^{(m)}{}_iP_{ii}^{(n)}$$

$$=Q'_{ki}\sum_{n=1}^{\infty}{}_iP_{ii}^{(n)},\quad i,\ j,\ k\in E.$$

此处

$$Q'=Q-I=\sum_{n=1}^{\infty}P^n.$$

于是

$$(13.1.16)\quad Q'_{kj}=\sum_{n=1}^{\infty}P_{kj}^{(n)}$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{i\in\{k_1,\cdots,k_{n-1}\}}P_{kk_1}\cdots P_{k_{n-1}j}+\sum_{n=1}^{\infty}{}_iP_{kj}^{(n)}$$

$$=Q'_{ki}\sum_{n=1}^{\infty}{}_iP_{ij}^{(n)}+\sum_{n=1}^{\infty}{}_iP_{kj}^{(n)}\quad(\text{由}(13.1.15))$$

$$=Q'_{ki}\theta_{ij}/\varphi_{ji}+\sum_{n=1}^{\infty}{}_iP_{kj}^{(n)}\quad(\text{由}(13.1.14))$$

$$i,\ k,\ j\in E,\ i\neq j.$$

从而

$$Q'_{kj}=P_{kj}+\sum_{n=2}^{\infty}P_{kj}^{(n)}$$

$$=P_{kj}+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}P_{kr}^{(n-1)}P_{rj}$$

$$=P_{kj}+\sum_{r=0}^{j-1}Q'_{kr}P_{rj}+\sum_{r=j}^{\infty}\Big[Q'_{ki}\frac{\theta_{ir}}{\varphi_{ri}}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}{}_iP_{kr}^{(n)}\Big]P_{rj},\ j>i.$$

两边除以 Q'_{k0}，得

$$(13.1.17)\quad \frac{Q'_{kj}}{Q'_{k0}}=\sum_{r=0}^{j-1}\left(\frac{Q'_{kr}}{Q'_{k0}}\right)P_{rj}$$

$$+\frac{Q'_{ki}}{Q'_{k0}}\sum_{r=j}^{\infty}\left(\frac{\theta_{ir}}{\varphi_{ri}}\right)P_{rj}+\frac{L_{kj}(j)}{Q'_{k0}},$$

$$j>i.$$

另一方面，由（13.1.16）可见

$$\theta_{ij}/\varphi_{ji}\leqslant Q'_{kj}/Q'_{ki}\leqslant\varphi_{ij}/\theta_{ji},\quad i\neq j$$

因此，存在与k无关的常数 c_i 和 c'_i，使

(13.1.18) $0 < c_i \leqslant Q'_{ki}/Q'_{k0} \leqslant c'_i < \infty, \ i \in E.$

注意

$$
\begin{aligned}
Q'_{ki} &= \sum_{n=1}^{\infty} P_{ki}^{(n)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} \sum_{\substack{k_1, \cdots, k_{m-1} \neq i, \\ k_m = i, k_{m+1}, \cdots, k_{n-1}}} P_{kk_1} \cdots P_{k_{n-1} i} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} {}_iP_{ki}^{(m)} P_{ii}^{(n-m)} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} {}_iP_{ki}^{(m)} \sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{(n)} \\
&= \left(\sum_{m=1}^{\infty} {}_iP_{ki}^{(m)} \right) Q_{ii}, \\
L_{ki}(0) &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} {}_iP_{kr}^{(n)} P_{ri} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} {}_iP_{ki}^{(n)} + \sum_{n=1}^{\infty} {}_iP_{ki}^{(n)} P_{ii} + {}_iP_{ki}^{(1)} \\
&= \left(\sum_{n=1}^{\infty} {}_iP_{ki}^{(n)} \right) (1 + P_{ii}).
\end{aligned}
$$

便得

$$
(13.1.19) \qquad \frac{Q'_{ki}}{L_{ki}(0)} = \frac{Q_{ii}}{1 + P_{ii}} > 1, \quad i, k \in E.
$$

从而

$$
\begin{aligned}
&\overline{\lim_{j \to \infty}} \ \overline{\lim_{K \ni i \to \infty}} \frac{L_{ki}(j)}{Q'_{k0}} \\
= &\overline{\lim_{j \to \infty}} \ \overline{\lim_{K \ni i \to \infty}} \frac{L_{ki}(j)}{L_{ki}(0)} \cdot \frac{L_{ki}(0)}{Q'_{ki}} \cdot \frac{Q'_{ki}}{Q'_{k0}} \\
\leqslant &c'_i \ \overline{\lim_{j \to \infty}} \ \overline{\lim_{K \ni i \to \infty}} \frac{L_{ki}(j)}{L_{ki}(0)} = 0.
\end{aligned}
$$

由于（13.1.18），我们可利用对角线程序，选择一个与 i 无关的子列$\{k_m\}_1^\infty$，使

$$\lim_{m\to\infty}\frac{Q'_{k_m,i}}{Q'_{k_m,0}}=\mu_i>0,\ i\in E.$$

最后，由（13.1.17）可见，我们可取充分大的 j，使$\sum_{r=j}^{\infty}$（θ_{ir}/φ_{ri}）P_{ri} 任意小。故由此式立知(μ_i)是一个不变测度。

（Ⅱ）必要性

由于

$$\frac{L_{ki}(j)}{L_{ki}(0)}=\frac{Q_{k0}}{Q_{ki}}\cdot\frac{Q_{ki}}{L_{ki}(0)}\cdot\frac{L_{ki}(j)}{Q_{k0}}$$

$$\leqslant c_i^{-1}\cdot\frac{Q_{ii}}{1+P_{ii}}\cdot\frac{L_{ki}(j)}{Q_{k0}}\text{(由 (13.1.18) 和 (13.1.19))}$$

$$k>i,$$

我们只需证

$$(13.1.20)\quad \lim_{i\to\infty}\lim_{K\ni k\to\infty}L_{ki}(j)/Q_{k0}=0.$$

另一方面，由

$$L_{ki}(j)=\sum_{r=j}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}{}_iP_{kr}^{(n)}P_{ri},\ k\geqslant j,$$

$${}_iP_{kr}^{(n)}\leqslant P_{kr}^{(n)}.$$

可见

$$L_{ki}(j)\leqslant\sum_{r=j}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}P_{kr}^{(n)}P_{ri}=\sum_{r=j}^{\infty}Q_{kr}P_{ri},\ k\geqslant j$$

但

$$\sum_{r=0}^{\infty}Q_{kr}P_{ri}=Q_{ki},\ k\neq i.$$

故得

(13.1.21) $L_{ki}(j) \leqslant Q_{ki} - \sum_{r=0}^{j-1} Q_{kr}P_{ri}, \ k \neq i, \ k \geqslant j.$

为完成必要性证明，我们需要用到如下的 Doob 基本定理．

(13.1.22) **定理** 设 (E, X_n, P_{ij}) 是不可约、不中断非常返链．定义 Green 函数 Q 如前．则对于几乎一切 $\omega \in \Omega$，极限

$$(13.1.23) \quad \lim_{n \to \infty} \frac{Q_{i, X_n(\omega)}}{Q_{0, X_n(\omega)}} = q_i, \quad i \in E.$$

存在，且满足

$$(13.1.24) \quad \sum P_{ij} q_j = q_i, \quad i \in E.$$

证 这个定理来自马氏链的 Martin 边界理论．此处，我们使用文献 Dynkin [2]．并使用那里的记号．首先注意，那里用 $G = (g(x,y):\ x, y \in E)$ 表示矩阵 Q．由 § 8 知，若取 $\gamma_0 = 1$，$\gamma_i = 0$，$i \geqslant 1$．则 $(1, \gamma) = 1$，

$$E_\gamma = \{y:\ \sum_x \gamma(x) g(x,y) > 0\}$$
$$= \{y:\ \gamma(0) g(0,y) > 0\}$$
$$= E,$$

可见γ是一个参考测度．而且 $\boldsymbol{P}_\gamma = \boldsymbol{P}_0$．由不断性知生存时间 $\zeta = +\infty$, $a.s.$ 于是由定理 4 （§ 9）知：在 E^* 上，

$$\lim_{n \to \infty} X_n(\omega) = X_\infty(\omega) \in \partial F, \quad a.s.$$

今取过份函数 $h \equiv 1$，则

$$\boldsymbol{P}_0 = \boldsymbol{P}_0^h = \boldsymbol{P}_{\gamma h}^h.$$

进而由定理5 （§ 12） 知

$$\boldsymbol{P}_0[X_\infty \in B] = \boldsymbol{P}_{\gamma h}^h[X_\infty \in B] = 1 - \mu_h(\partial E - B) = 1.$$

可见 $X_\infty \in B$, $a.s.$ 再用一次定理 5 得：对于每 $Z \in B$，k_z 是调和函数，这里

$$k_z(i)=\frac{g(i,z)}{\eta(z)}=\frac{g(i,z)}{\sum_j \gamma(j)g(j,z)}=\frac{g(i,z)}{g(0,z)}.$$

然而，对于每 $i\in E$，$z\to k_z(i)$ 在 E^* 中连续（§8），故

$$\frac{g(i,X_n(\omega))}{g(0,X_n(\omega))}=k_{X_n(\omega)}(i)\xrightarrow[n\to\infty]{}k_{X_\infty(\omega)}(i)=g_i\ a.s.$$

且 (g_i) 为调和函数． ▌

现在，让我们回到定理（13.1.10）的必要性证明．假定链 (E,X_n,P_{ij}) 有不变测度 (π_i)，$\pi_0=1$．如（13.1.8）那样引进对偶链 $(\overline{P_{ij}})$．则 $(\overline{P}_{ij})$ 不可约、非常返且不中断．于是，由定理（13.1.22）知，对于几乎一切 $\omega\in\overline{\Omega}$，极限

$$(13.1.25)\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\overline{Q}_{i,\ \overline{X_n}(\omega)}}{\overline{Q}_{0,\ \overline{X_n}(\omega)}}=q_i,\ i\in E$$

存在且

$$\sum_j \overline{P}_{ij}q_j=q_i,\ i\in E.$$

这等价于说，对于几乎一切的 $\omega\in\overline{\Omega}$，极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{Q_{\overline{X_n}(\omega),i}}{Q_{\overline{X_n}(\omega),0}}=s_i$$

存在，且

$$s_j=\sum_i s_iP_{ij},\ j\in E.$$

今设 K' 是使（13.1.25）成立的样本轨道所经过的状态的全体．由于 $\{\overline{X}_n\}_{n\geq0}$ 的非常返性，对于几乎一切的 $\omega\in\overline{\Omega}$，$\{\overline{X}_n(\omega)\}_{n\geq0}$ 不可能经过任一状态无穷次．因此，对于几乎一切的 $\omega\in\overline{\Omega}$，$\{\overline{X}_n(\omega)\}_{n\geq0}$ 必含有无穷多个两两不同的状态．这样，我们可以选取子列 $K=\{k_n\}_{n\geq1}\subset K'$，使得 $k_n\to\infty$ 且

$$(13.1.26)\quad \lim_{n\to\infty}\frac{Q_{k_n,i}}{Q_{k_n,0}}=s_i,\ i\in E.$$

由（13.1.21）得到

$$\frac{Q_{ki}}{Q_{k_0}}-\sum_{r=0}^{j-1}\frac{Q_{kr}}{Q_{k_0}}P_{ri}\geqslant 0,\ k\neq i,\ k\geqslant j.$$

往证

$$(13.1.27)\quad \lim_{j\to\infty}\ \lim_{K\ni k\to\infty}\left[\frac{Q_{ki}}{Q_{k_0}}-\sum_{r=0}^{j-1}\frac{Q_{kr}}{Q_{k_0}}P_{ri}\right]=0.$$

由此及（13.1.21）将立即导出所需的（13.1.20）.

假定（13.1.27）不真，则对于每 $\varepsilon>0$ 则存在K中的子列，无妨设$\{k_n\}_1^\infty$自身和$\{j_n\}_1^\infty$，使得 k_n，$j_n\to\infty$，而且

$$\frac{Q_{k_n,i}}{Q_{k_n,0}}-\sum_{r=0}^{j_n-1}\frac{Q_{k_n,r}}{Q_{k_n,0}}P_{ri}\geqslant\varepsilon .$$

命

$$f_n(r)=\begin{cases}\dfrac{Q_{k_n,r}}{Q_{k_n,0}}, & r<j_n,\\ 0 & ,r\geqslant j_n.\end{cases}$$

并定义E上的测度

$$\mu_i(G)=\sum_{r\in G}P_{ri},\ i\in E.$$

由假设，（13.1.26）和 Fatou 引理，得

$$\begin{aligned}0&\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\Big[f_n(i)-\int_E f_n(r)\mu_i(dr)\Big]\\&\leqslant\lim_{n\to\infty}f_n(i)-\underline{\lim_{n\to\infty}}\int_E f_n(r)\mu_i(dr)\\&\leqslant\lim_{n\to\infty}f_n(i)-\int_E\lim_{n\to\infty}f_n(r)\mu_i(dr)\\&=s_i-\sum_r s_rP_{ri}\\&=0.\qquad\blacksquare\end{aligned}$$

作为定理（13.1.10）的直接推论，我们有

(13.1.28) **推论** 在定理（13.1.10）的条件下，若对于每 $i\in E$，只存在有限多个$k\in E$，使 $P_{ki}>0$，则不变测度存在。

§ 13.2 连续时间参数马链的不变测度

我们先给出一个显见的结果

(13.2.1) **引理** 设 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$满足

$$0<\sum_{j\neq i}q_{ij}=q_i<\infty,\ i\in E.$$

则方程

(13.2.2) $$\sum_i \pi_i q_{ij}=0,\ j\in E$$

的每一非平凡、非负 解 (π_i)与 跳阵 矩阵$\overline{P}=(\overline{P}_{ij})$ 的不变测度 (μ_i) 有如下一一对应关系：

(13.2.3) $\mu_i=\pi_i q_i,\ i\in E.$

下述结果是定理（13.1.1）和（12.1.6）的直接推论

(13.2.4) **定理** 设跳过程 $P(t)=(P_{ij}(t))$ 不可约、正常返，则不变测度存在且唯一，它就是

$$\pi_j=\lim_{t\to\infty}P_{ij}(t),\quad i,\ j\in E.$$

特别地，若它还是正则 Q 过程（意指全稳定），则 (π_i) 也是方程（13.2.2）的唯一的非平凡、非负可和解。

为研究常返情形，我们先给出一个一般性的引理。

(13.2.5) **引理** 设 $P(t)=(P_{ij}(t))$ 是一个不可约的 跳 过程。如果对于一切的$m\geqslant1$，$P\left(\frac{1}{m}\right)=\left(P_{ij}\left(\frac{1}{m}\right)\right)$都有唯一 的不 变测度，则$P(t)$自身也有唯一的不变测度。

证 (i) 设 (π_i) 是 $(P_{ij}(1))$ 的唯一的不变测度。固定 $m\geqslant1$。再设$(\overline{\pi}_i)$ 是$\left(P_{ij}\left(\frac{1}{m}\right)\right)$的唯一的不变测度，那么，由$K-C$

方程得

$$\overline{\pi}_j=\sum_i \overline{\pi}_i \mathrm{P}_{ij}\left(\frac{1}{m}\right)$$

$$=\sum_i\left(\sum_k \overline{\pi}_k \mathrm{P}_{ki}\left(\frac{1}{m}\right)\right)\mathrm{P}_{ij}\left(\frac{1}{m}\right)$$

$$=\sum_k \overline{\pi}_k \mathrm{P}_{kj}\left(\frac{2}{m}\right).$$

进而

$$\overline{\pi}_j=\sum_k \overline{\pi}_k \mathrm{P}_{kj}\left(\frac{n}{m}\right),\quad n\geqslant 1.$$

特别地

$$\overline{\pi}_j=\sum_k \overline{\pi}_k \mathrm{P}_{kj}(1),$$

由唯一性得

$$\overline{\pi}_i=\pi_i,\quad i\in E.$$

代入前一等式，得到

$$\pi_j=\sum_k \pi_k \mathrm{P}_{kj}\left(\frac{n}{m}\right),\qquad n,\ m\geqslant 1.$$

(ii) 由 (i) 和 Fatou 引理得

$$\pi_j\geqslant\sum_i \pi_i \mathrm{P}_{ij}(t),\qquad t\geqslant 0,\ j\in E.$$

今设存在 $t_0\geqslant 0$ 和 j，使

$$\pi_j>\sum_i \pi_i \mathrm{P}_{ij}(t_0).$$

取有理数 $r>t_0$。由于 $\mathrm{P}_{jj}(r-t_0)>0$，故由 (i) 和上述两式，可得

$$\pi_j=\sum_i \pi_i \mathrm{P}_{ij}(r)=\sum_k\left(\sum_i \pi_i \mathrm{P}_{ik}(t_0)\right)\mathrm{P}_{kj}(r-t_0)$$

$$<\sum_k \pi_k \mathrm{P}_{kj}(r-t_0)\leqslant\pi_j$$

导致矛盾。 ∎

(13.2.6) **定理** 设$P(t)$为不可约常返跳过程，则不变测度存在且唯一. 特别地，若它还是正则Q过程，则此不变测度(π_i)也是方程（13.2.2）的唯一的非平凡、非负解.

证 由引理（13.2.5），定理（13.1.3），定理（12.1.9）和引理（13.2.1）立得. ▌

一般地，我们有

(13.2.7) **定理** 设$P(t)$是一个正则、不可约Q过程，那么

(i) 每一个$P(t)$跳跃矩阵$\overline{P}=(\overline{P}_{ij})$的不变测度唯一决定方程（13.2.2）的一个非平凡、非负解；而方程（13.2.2）的每一个非平凡、非负解都是$P(t)$的一个过份测度. 即

$$\mu_j \geqslant \sum_i \mu_i P_{ij}(t), \quad j\in E, \quad t\geqslant 0.$$

(ii) 每一个$P(t)$的不变测度都是方程（13.2.2）的一个非平凡、非负解，从而唯一决定$(\overline{P}_{ij})$的一个不变测度. 特别地

(iii) 如$P(t)$还是非常返的，则它有不变测度的必要条件是：存在无穷子集$K\subset E$，使

$$\lim_{j\to\infty}\lim_{K\ni k\to\infty} \overline{L}_{ki}(j)/\overline{L}_{ki}(0)=0,$$

此处$\overline{L}_{ki}(j)$如（13.1.11）所定义，只是换(P_{ij})为$(\overline{P}_{ij})$. 进而，关于$\overline{P}$，必定存在来自无穷的一条简单路径.

证 由引理（12.1.14）和（13.2.1）立得（i）. 而由引理（12.1.11）和（13.2.1）立得（ii）. 最后，由定理（12.1.9），定理（13.1.8），（13.1.10）和（ii）立得（iii）. ▌

§13.3 数 λ_π

在本节和下一节，我们假定E是一个局部紧、可分的距离空间. 以$\mathscr{E}$表示E上的Borel域. 假定$P(t,x,\cdot)$为$(E,\mathscr{E})$上的次

马氏转移概率函数，满足如下条件.

(13.3.1) 对于每 $\varphi\in C_0(E)=E$ 上具有紧支撑的连续函数的全体，$(t,x)\to P_t\varphi(x)$ 在 $[0,\infty)\times E$ 上连续；

(13.3.2) 存在 $\psi_0\in C_0(E)^+$，使得对于 E 的每一紧子集 K（记作 $K\subset\subset E$），都存在 $t>0$ 和 $\varepsilon>0$，满足 $P_t\psi_0\geqslant\varepsilon I_K$.

对于马链来说，头一个条件是自然满足的，第二个条件相当于不可约. 命

$$\mathscr{M}=\{\mu:\ \mu \text{ 和 } \mu P_t\ (t>0) \text{ 都是非负 Radon 测度}\}$$
$$=\{\mu:\ \mu \text{ 是非负 Radon 测度且 } \mu P_t\psi_0<\infty,\ t>0\}.$$

所谓 Radon 测度，仍指在紧集上取值有限的测度. 在 $\mathscr{M}$ 上，赋予淡收敛拓扑. 即对一切 $\varphi\in C_0(E)$, $\mu_n(\varphi)\to\mu(\varphi)$. 记作 $\mu_n\xrightarrow{v}\mu$.

再命

$$\mathscr{C}_\lambda=\{\mu\in\mathscr{M}:\ \mu P_t\leqslant e^{\lambda t}\mu,\ t\geqslant0\},\ ,\ \lambda\in\boldsymbol{R}^1.$$
$$\mathscr{K}_\lambda=\{\mu\in\mathscr{C}_\lambda:\ \mu(\psi_0)=1\},\ \lambda\in\boldsymbol{R}^1.$$

我们有

(13.3.3) 引理 对每 $\lambda\in\boldsymbol{R}^1$，$\mathscr{C}_\lambda$ 是 $\mathscr{M}$ 中的闭凸锥. 若 $\mathscr{C}_\lambda\neq\{0\}$，则 $\mathscr{K}_\lambda$ 是 $\mathscr{C}_\lambda$ 的紧基.

证 显然 $\mathscr{C}_\lambda$ 是凸锥. 为证它是闭的，首先注意：对于每 $\varphi\in C_0(E)^+$ 和 $t>0$，若 $\mu_n\xrightarrow{v}\mu$, $\mu_n,\mu\in\mathscr{C}_\lambda$，则

$$\varliminf_{n\to\infty}\mu_nP_t\varphi\geqslant\varliminf_{n\to\infty}\mu_n(\psi P_t\varphi)=\mu(\psi P_t\varphi)$$
$$\psi\in C_0(E)^+,\ \psi\leqslant1.$$

取 $\psi_m\in C_0(E)^+$，$\psi_m\uparrow1$，$m\to\infty$，得

$$\varliminf_{n\to\infty}\mu_nP_t\varphi\geqslant\mu P_t\varphi$$

可见 $\mu\to\mu P_t(\varphi)$ 是下半连续的. 今设 $\mathscr{C}_\lambda\ni\mu_n\xrightarrow{v}\mu$，则

$$\infty>\mu\varphi e^{\lambda t}=\lim_{n\to\infty}\mu_n\varphi e^{\lambda t}\geqslant\lim\mu_nP_t(\varphi)$$
$$\geqslant\mu P_t(\varphi),\ \varphi\in C_0(E)^+.$$

可见 $\mu\in\mathscr{C}_\lambda$. 故 $\mathscr{C}_\lambda$ 是闭的.

其次，我们证明 $\mathscr{K}_\lambda$ 是紧的. 为此，只需证：对每 $K\subset\subset E$,

$\sup\limits_{\mu\in\mathscr{K}_\lambda}\mu(K)<\infty$。然而，对于$K\subset\subset E$，存在$t>0$和$\varepsilon>0$使$\varepsilon I_K\leqslant$ $\leqslant \mathbf{P}_t\psi_0$。从而

$$\varepsilon\mu(K)\leqslant\mu P_t(\psi_0)\leqslant e^{\lambda t}\mu(\psi_0)=e^{\lambda t},\mu\in\mathscr{K}_\lambda$$

最后，我们证明$\mathscr{K}_\lambda$是$\mathscr{C}_\lambda$的基。为此，只需证明：若$\mu\in$ $\in\mathscr{C}_\lambda-\{0\}$，则$\mu(\psi_0)>0$。事实上，我们可选$K\subset\subset E$，使$\mu(K)=$ $=\rho>0$；还可选$t>0$和$\varepsilon>0$，使$\varepsilon I_K\leqslant\mathbf{P}_t\psi_0$。这样，

$$e^{\lambda t}\mu(\psi_0)\geqslant\mu(\mathbf{P}_t\psi_0)\geqslant\varepsilon\mu(K)=\varepsilon\rho>0.$$

数λ_π定义为

$$\lambda_\pi=\inf\{\lambda\in\boldsymbol{R}^1:\ \mathscr{C}_\lambda\neq\{0\}\}$$

(13.3.4) 定理 $\lambda_\pi\in(-\infty,0]$且$\mathscr{C}_{\lambda_\pi}\neq\{0\}$。

证 首先，如$\lambda>0$且$x^0\in E$，则

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}P(t,x^0,\cdot)dt\in\mathscr{C}_\lambda-\{0\},$$

因而$\lambda_\pi\leqslant0$。

其次，若$\lambda_1\leqslant\lambda_2$，则$\mathscr{C}_{\lambda_1}\subset\mathscr{C}_{\lambda_2}$。因而，对于$\lambda_2\geqslant\lambda_1>\lambda_\pi$，我们有$\phi\neq\mathscr{K}_\lambda\subset\mathscr{K}_{\lambda_2}$。特别地，利用$\mathscr{K}_\lambda(\lambda>\lambda_\pi)$的紧性，便得$\bigcap\limits_{\lambda>\lambda_\pi}\mathscr{K}_\lambda$ $\neq\phi$。另一方面，显然有$\mathscr{K}_{\lambda_\pi}=\bigcap\limits_{\lambda>\lambda_\pi}\mathscr{K}_\lambda$，故$\mathscr{K}_{\lambda_\pi}\neq\phi$。最后，如$\mu\in\mathscr{K}_{\lambda_\pi}$，取$K$使$\mu(K)>0$，再取$t>0$和$\varepsilon>0$使$\varepsilon I_K\leqslant\mathbf{P}_t\psi_0$。那么

$$0<\varepsilon\mu(K)\leqslant\mu(\mathbf{P}_t\psi_0)\leqslant e^{\lambda_\pi t}\mu(\psi_0)=e^{\lambda_\pi t}.$$

可见$\lambda_\pi>-\infty$。

(13.3.5) 推论 对于每$\lambda_2>\lambda_1\geqslant\lambda_\pi$和$\mu\in\mathscr{C}_{\lambda_1}-\{0\}$，$\int_0^\infty e^{-\lambda_2 t}\mu\mathbf{P}_t dt\in\mathscr{C}_{\lambda_2}-\{0\}$。

下面，我们将用两种不同的方式来刻划λ_π。这将有助于理解数λ_π的意义。

给定$(E,\mathscr{E})$上的一个非负Radon测度m，我们定义

$$\lambda_0(m)=\sup_{\varphi\in C_{0(E)}^+}\ \overline{\lim_{t\to\infty}}\ \frac{1}{t}(\psi,\mathbf{P}_t\varphi)_m$$

此处 $(\cdot,\cdot)_m$表 $L^2(m)$ 上的(实)内积.

(13.3.6) **引理** 若 $m(\psi_0)>0$, 则 $\lambda_\pi\leqslant\lambda_\sigma(m)$.

证 给定 $\lambda>\lambda_\pi(m)$. 记

$$\nu=\psi_0 m,\quad \mu=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\nu P_t dt.$$

任给 $K\subset\subset E$, 选 $\varphi\in C_0(E)^+$使 $\varphi\geqslant I_K\vee\psi_0$. 由于$\lambda>\lambda_\sigma(m)$, 可见存在 $c<\infty$ 和 $\lambda'<\lambda$, 使

$$(\varphi,P_t\varphi)_m\leqslant Ce^{\lambda' t},\quad t\geqslant 0.$$

进而

$$\mu(K)\leqslant\mu(\varphi)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}(\psi_0,P_t\varphi)_m dt$$

$$\leqslant\int_0^\infty e^{-\lambda t}(\varphi,P_t\varphi)_m dt\leqslant c\int_0^\infty e^{-(\lambda-\lambda')t}dt<\infty.$$

这表明 μ 是一个 Radon 测度. 显然有 $\mu\in\mathscr{E}_\lambda$. 最后, 由 $m(\psi_0)>0$ 知 $\mu(\psi_0)>0$. 故 $\mathscr{E}_\lambda\neq\{0\}$. 此即是 $\lambda\geqslant\lambda_\pi$. ▌

(13.3.7) **引理** 如$\lambda>\lambda_\pi$, 则存在局部一致正 (即在紧集上一致正) 的可测函数 g_λ, 使

$$P_t g_\lambda\leqslant e^{\lambda t}g_\lambda,\quad t\geqslant 0$$

而且

$$g_\lambda\in L^1(\mu),\quad \mu\in\mathscr{E}_{\lambda_\pi}.$$

证 只需取

$$g_\lambda=\int_0^\infty e^{-\lambda t}P_t\psi_0 dt$$

则显然 g_λ 是局部一致正的, 而且

$$P_t g_\lambda\leqslant e^{\lambda t}g_\lambda,\quad t\geqslant 0.$$

最后, 对每 $\mu\in\mathscr{E}_\lambda$,

$$\mu(g_\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\mu P_t(\psi_0)dt\leqslant\int_0^\infty e^{-(\lambda-\lambda_\pi)t}\mu(\psi_0)dt<\infty,$$

故 $g_\lambda\in L^1(\mu)$. ▌

(13.3.8) **定理** 假定 $P(t,x,\cdot)$ 有密度函数 $p(t,x,y)$，关于三个变元联合可测，而且满足如下条件：对每 $K\subset\subset E$ 和 $x\in E$，存在 $t>0$ 和 $\varepsilon>0$ 使

$$\varepsilon I_K\leqslant p(t,x,\cdot)\ ,\ m-a.e.$$

那么，对于每 $\lambda>\lambda_\pi$，存在局部一致正的可测函数 $g_\lambda\in L^1_{loc}(m)$（局部 L^1 可积），使得 $P_tg_\lambda\leqslant e^{\lambda t}g_\lambda$，$t\geqslant 0$。特别地，$\lambda_\pi=\lambda_\sigma(m)$。

证 先假定对每 $\lambda>\lambda_\pi$，所述的 g_λ 存在。给定 $\lambda>\lambda_\pi$ 和 $\varphi\in C_0(E)^+$，选择 $\varepsilon>0$ 使 $\varepsilon\varphi\leqslant g_\lambda$。那么

$$\varepsilon(\varphi,P_t\varphi)_m\leqslant(\varphi,P_tg_\lambda)_m\leqslant e^{\lambda t}(\varphi,g_\lambda)_m,\ \ t\geqslant 0.$$

又因 $g_\lambda\in L^1_{loc}(m)$，$(\varphi,g_\lambda)_m<\infty$，从而

$$\overline{\lim_{t\uparrow\infty}}\frac{1}{t}\log\ (\varphi,P_t\varphi)_m\leqslant\lambda.$$

这表明 $\lambda_\sigma(m)\leqslant\lambda$。另一方面，由 $P_t\psi_0\geqslant\varepsilon I_K$ 知

$$P_t\psi_0=\int p(t,\cdot,dy)\psi_0(y)m(dy)\geqslant\varepsilon I_K.$$

从而 $m(\psi_0)>0$。从而由引理（13.3.6）及方才所证得 $\lambda_\pi=$
$=\lambda_\sigma(m)$。

这样，我们只需再证引理(13.3.7)中所构造的 $g_\lambda\in L^1_{loc}(m)$。但由该引理已知存在 $x^0\in E$ 使 $g_\lambda(x^0)<\infty$。于是

$$\int p(t,x^0,y)g_\lambda(y)m(dy)<\infty,\ \ t>0.$$

特别地，对于 $K\subset\subset E$，我们取 $t>0$ 和 $\varepsilon>0$ 使

$$\varepsilon I_K\leqslant p(t,x^0,\cdot)\ ,\ m-a.e.$$

则有

$$\varepsilon\int_K g_\lambda(y)m(dy)\leqslant\int p(t,x^0,y)g_\lambda(y)m(dy)<\infty.\qquad\blacksquare$$

(13.3.9) **注** 我们将考虑一种特殊情况，它为我们提供了 λ_π 的一种解释。

设 $\{P_t:\ t>0\}$ 是 $L^2(m)$ 上（关于 m）的可配称半群。那么，

对于每 $t,s>0$，我们有

$$\begin{aligned}
&\log\ (\varphi, P_{(t+s)/2}\varphi)_m\\
&=\log(P_{t/2}\varphi, P_{s/2}\varphi)_m\\
&\leqslant\frac{1}{2}[\log(P_{t/2}\varphi,\ P_{t/2}\varphi)_m+\log(P_{s/2}\varphi,\ P_{s/2}\varphi)_m]\\
&=\frac{1}{2}[\log(\varphi,P_t\varphi)_m+\log(\varphi,P_s\varphi)_m],
\end{aligned}$$

$$\varphi\in C_0(E)^+.$$

这表明：对每 $\varphi\in C_0(E)^+$，$t\longrightarrow(\varphi,P_t\varphi)_m$ 是对数凸的。从而极限 $\lim\limits_{t\uparrow\infty} 1/t\ \log\ (\varphi,P_t\varphi)_m$ 存在。如果 $\varphi\in C_0(E)^+$，取 $t>0$ 和 $\varepsilon>0$ 使 $\varepsilon\varphi\leqslant P_t\psi_0$，则对每 $s>0$，我们有：

$$\begin{aligned}
\varepsilon^2(\varphi,P_s\varphi)_m&\leqslant(P_t\psi_0,\ P_{t+s}\psi_0)_m\\
&=(\psi_0,\ P_{2t+s}\psi_0)_m.
\end{aligned}$$

因而

$$\lim_{s\uparrow\infty} 1/s\ \log\ (\varphi,P_s\varphi)_m\leqslant \lim_{s\uparrow\infty} 1/s\ \log(\psi_0,P_s\psi_0)_m.$$

故得

$$\lambda_\sigma(m)=\lim_{t\uparrow\infty}\frac{1}{t}\ \log\ (\psi_0,P_t\psi_0)_m.$$

此式不仅给我们提供了一个相当具体的表达式，而且也为我们提供了 $\lambda_x=\lambda_\sigma(m)$ 的一种解释。事实上，我们将证明，$\lambda_\sigma(m)$ 是 $\{P_t:\ t>0\}$ 的 $L^2(m)$ 母元的谱的右端点。事实上，若 A 的谱表示为

$$A=\int_{-\infty}^{\rho}\lambda\,dE_\lambda$$

并以 $\overline{P}_t$ 表 P_t 的 $L^2(m)$ 闭包，则

$$\overline{P}_t=\int_{-\infty}^{\rho}e^{\lambda t}dE_\lambda,\ \ t\geqslant0.$$

显然有

$$(\psi_0,P_t\psi_0)_m=\int_0^{\rho}e^{\lambda t}d(E_\lambda\psi_0,\psi_0)\leqslant e^{\rho t}\|\psi_0\|^2_{L^2(m)}$$

从而 $\lambda_\sigma(m)\leqslant\rho$。另一方面，如果 $\alpha<\rho$，则存在 $\varphi\in C_0(E)$，使 $(E_\rho-E_{\bar\alpha})\varphi\neq 0$，于是，由 $(\varphi,P_t\varphi)_m=\int_0^\rho e^{\lambda t}d(E_\lambda\varphi,\varphi)$，我们看到；存在 $\varepsilon>0$，使

$$(|\varphi|,P_t|\varphi|)_m\geqslant(\mu,P_t\varphi)_m\geqslant\varepsilon\, e^{\alpha t},\quad t>0.$$

因而 $\alpha\leqslant\lambda_\sigma(m)$，进而 $\lambda_\sigma(m)=\rho$。 ∎

下面，我们将给出 λ_π 的第三种刻划。它同时也给我们提供了一种更一般的解释。

设 V 为 E 的相对紧开子集，定义首出时

$$\tau_V=\inf\{t\geqslant 0: X(t)\text{与}V^c\text{的距离为零}\}$$

此处，$\{X(t)\}_{t\geqslant 0}$ 为以 $P(t,x,\cdot)$ 为转移概率的马氏过程。如 m 为 $(E,\mathscr{E})$ 上的任一非负 Radon 测度，我们就定义

$$\lambda_e(m)=\inf\{\lambda\in R^1;\ E.[e^{-\lambda\tau_V}]\in L^1(V;m)\ \text{对一切相对紧开子集}V\text{成立}\}$$

为讨论 λ_π 与 $\lambda_e(m)$ 之间的关系，我们还需引进若干记号。设 $\{V_N\}_1^\infty$ 为相对紧开集列，使得 ψ_0 的支集 $\equiv \operatorname{supp}(\psi_0)\subset\subset V_1$，$V_N\uparrow E$ 且 $V_N\subset\subset V_{N+1}$。记 $\tau_N=\tau_{V_N}$，并定义

$$P^{(N)}(t,x,\Gamma)=P_x[X(t)\in\Gamma,\ \tau_N>t],\ \Gamma\in\mathscr{E}.$$

那么 $P^{(N)}(t,x,\cdot)$ 是 $(V_N,\ \mathscr{E}\cap V_N)$ 上的次马氏转移概率。我们用 $\{P_t^{(N)}:t>0\}$ 表示伴随 $P^{(N)}(t,x,\cdot)$ 的半群。

(13.3.10) **引理** 假定对每 $N\geqslant 1$ 和 $\varphi\in C_0(V_N)$，$(t,x)\longrightarrow P_t^{(N)}\varphi(x)$ 连续，而且

$$P_t^{(N)}\varphi\uparrow P_t\varphi,\ N\to\infty,\ t>0,\ \varphi\in C_0(E)^+.$$

若 $m(\psi_0)>0$，则 $\lambda_\pi\leqslant\lambda_e(m)<0$。

证 易见，在任何情况下，总有 $\lambda_e(m)\leqslant 0$。如 $\lambda_e(m)=0$，则 $\lambda_\pi\leqslant\lambda_e(m)$ 是平凡的。因此，我们无妨设 $\lambda_e(m)<0$。

给定 $\lambda_e(m)<\lambda\leqslant 0$，定义 $\nu=\psi_0 m$ 和

$$\nu_N=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\nu\, P_t^{(N)}dt$$

由 $\mathrm{supp}(\psi_0)\subset\subset V_1$ 易见

$$\nu_N(\psi_0)>0 \quad 且\mathrm{supp}(\nu_N)\subset\overline{V}_N.$$

取 $\lambda_e(m)<\lambda'<\lambda$，并置$g_N(x)=\boldsymbol{E}_x[e^{-\lambda\tau'_N}]$，则

$$g_N\geqslant 1,\ g_N\in L^1(V_N,m)$$

而且

$$\mathbf{P}_t^{(M)}g_N\leqslant e^{\lambda' t}g_N,\ 1\leqslant M\leqslant N.$$

从而

$$\begin{aligned}&\nu_N(E)\leqslant\nu_N(g_N)\\&=\int_0^\infty e^{-\lambda t}(\psi_0,\mathbf{P}_t^{(N)}g_N)_m\\&\leqslant\frac{(\psi_0,g_N)_m}{\lambda-\lambda'}<\infty.\end{aligned}$$

今定义 $\nu_N=\nu_N/\nu_N(\psi_0)$. 我们先证：$\{\mu_N:N\geqslant 1\}$是 $(E,\mathscr{E})$ 的 Radon 测度空间上的紧集. 事实上，给定 $K\subset\subset E$，取 $t>0$ 和 $\varepsilon>0$ 使 $2\varepsilon I_K\leqslant\mathbf{P}_t\psi_0$. 由于 $\mathbf{P}_t^{(N)}\psi_0\uparrow\mathbf{P}_t\psi_0$，利用 Dini 定理得：存在 N_0，使

$$\varepsilon I_K\leqslant\mathbf{P}_t^{(N)}\psi_0,\ N\geqslant N_0.$$

这样，当 $N\geqslant N_0$ 时，我们有

$$\varepsilon\mu_N(K)\leqslant\mu_N\mathbf{P}_t^{(N)}(\psi_0)\leqslant e^{\lambda t}.$$

这便证得$\{\mu_N:N\geqslant 1\}$的相对紧性. 其次，设$\{\mu_{N'}\}$为$\{\mu_N\}$的收敛子列，并以 μ 表其极限，则

$$\begin{aligned}\mu\,\mathbf{P}_t^{(M)}(\varphi)&=\lim_{N'\to\infty}\mu_{N'}\mathbf{P}_t^{(M)}(\varphi)\\&\leqslant e^{\lambda t}\lim_{N'\to\infty}\mu_{N'}(\varphi)=e^{\lambda t}\mu(\varphi),\ M\geqslant 1,t>0,\\&\qquad\qquad\varphi\in C_0(E)^+.\end{aligned}$$

再用一次 $\mathbf{P}_t^{(M)}\varphi\uparrow\mathbf{P}_t\varphi$，便得 $\mu\,\mathbf{P}_t\leqslant e^{\lambda t}\mu$. 故 $\mu\in\mathscr{K}_\lambda$. 这样，我们证得 $\lambda\geqslant\lambda_x$. 但 $\lambda>\lambda_e(m)$任意，故 $\lambda_e(m)\geqslant\lambda_x$. ▌

(13.3.11) **引理** 假定对于每 $N>1$，存在 $K_N\subset\subset E$ 使

$$\boldsymbol{P}_x[X(\tau_N)\notin K_N]=0,\ X\in V_N.$$

那么，在定理（13.3.8）的假设之下，$\lambda_e(m)\leqslant\lambda_x$.

证 给定 $\lambda>\lambda_x$. 设 g_λ 是定理（13.3.8）中所述的函数，并置

$$Y(t)=e^{-\lambda t}g_\lambda(X(t));$$

$$Q_N=\int_{V_N}\boldsymbol{P}_x\, m(dx).$$

则

$$\sup_t \boldsymbol{E}^{Q_N}[Y(t)]$$

$$=\sup_t\int_{V_N}\boldsymbol{E}_x[e^{-\lambda t}g_\lambda(X(t))]m(dx)$$

$$=\sup_t\int_{V_N}e^{-\lambda t}P_t g_\lambda(x)m(dx)$$

$$\leqslant\int_{V_N}g_\lambda(x)m(dx)<\infty;$$

对于 $B_1,\cdots,B_n\in\mathscr{E}$ 和 $0\leqslant t_1<\cdots<t_n<t$,

$$\boldsymbol{E}^{Q_N}[Y(t+s);\ X(t_i)\in B_i,\ 1\leqslant i\leqslant n]$$

$$=\int_{V_N}m(dx)\boldsymbol{E}_x[e^{-\lambda(t+s)}g_\lambda(X(t+s));X(t_i)\in B_i,1\leqslant i\leqslant n]$$

$$=\int_{V_N}m(dx)\int_{B_1}\mathbf{P}(t_1,x,dy_1)\int_{B_2}\mathbf{P}(t_2-t_1,y_1,dy_2)\int\cdots$$

$$\cdots\int_{B_n}P(t_n-t_{n-1},y_{n-1},dy_n)\int P(t-t_n,y_n,dy_{n+1})\cdot$$

$$\cdot(\mathbf{P}_s(e^{-\lambda(t+s)}g_\lambda))(y_{n+1})$$

$$\leqslant\int_{V_N}m(dx)\int_{B_1}P(t_1,x,dy)\cdots\int_{B_n}P(t_n-t_{n-1},y_{n-1},dy_n)\cdot$$

$$\cdot\int\mathbf{P}(t-t_n,y_n,dy_{n+1})e^{-\lambda t}g_\lambda(y_{n+1})$$

$$=\boldsymbol{E}^{Q_N}[Y(t);\ X(t_i)\in B_i,\ 1\leqslant i\leqslant n].$$

这样，$Y(t)$为关于Q_N的非负上鞅．由 Dood 停止定理：

$$\infty > \int_{V_N} g_\lambda(x) m(dx) \geqslant \int_{V_N} \boldsymbol{E}_x[e^{-\lambda\tau_N} g_\lambda(X(\tau_N))] m(dx)$$

但

$$\boldsymbol{P}_x[X(\tau_N) \notin K_N] = 0, \quad x \in \boldsymbol{V}_N,$$

而且g_λ是局部一致正的，从而的

$$\int_{V_N} \boldsymbol{E}_x[e^{-\lambda\lambda_N}] m(dx) < \infty, \ N \geqslant 1$$

这说明$\lambda \geqslant \lambda_e(m)$．故$\lambda_e(m) \leqslant \lambda_\pi$． ▌

(13.3.12) **定理** 在上面两个引理的假设下，$\lambda_e(m) = \lambda_\pi = = \lambda_c(m)$．

此定理表明，数λ_π的紧密地联系于过程首离相对紧开集$\mathbf{V}$的时刻τ_V．作为本节的结束，我们将从另一角度刻划数λ_π．

(13.3.13) **定义** 称$\{P_t:\ t>0\}$是λ常返的，如果不存在 Radon 测度μ，使$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\mu \mathbf{P}_t dt$仍然是 Radon 测度，反之则称为$\lambda$非常返的．

显然，对于每$\lambda<\lambda_\pi$，$\{\mathbf{P}_t:\ t>0\}$都是λ常返的；而对于每$\lambda>\lambda_\pi$，$\{P_t:\ t>0\}$都是λ非常返的．故λ_π是常返性的分界点．

(13.3.14) **推论**．如果$\{P_t: t>0\}$是$\lambda=0$常返的，则$\lambda_\pi=0$．

证 由定理 (13.3.4) 和 (13.3.13) 立得． ▌

§ 13.4 λ_π不变测度

(13.4.1) **定义** 简记

$$\mathbf{P}_t^\lambda = e^{-\lambda t}\mathbf{P}_t, \ t>0, \ \lambda \in \boldsymbol{R}^1.$$

命

$$\tilde{\mathscr{E}}_\lambda = \{\mu \in m:\ \mu \mathbf{P}_t^\lambda \uparrow \mu, \ t \downarrow 0\},$$
$$\tilde{\mathscr{E}}_\lambda(g) = \{\mu \in \mathscr{E}_\lambda:\ \mu(g) = 1\},$$

$$\mathscr{I}_\lambda=\{\mu\in\mathscr{E}_\lambda:\ \mu\mathbf{P}_t^\lambda=\mu,\ t>0\}$$

$$\lambda\in\boldsymbol{R}^1.$$

分别称$\widetilde{\mathscr{E}}_\lambda$和$\mathscr{I}_\lambda$中的元素为$\lambda$过份测度和$\lambda$不变测度。最后，称一个非负$\mathscr{E}$可测函数$h$为$\lambda$过份函数，如果

$$\mathbf{P}_t^\lambda h\uparrow h,\ t\downarrow 0,$$

而且对于每$t>0$和$x\in E$，关于测度$\mathrm{P}(t,\ x,\ \cdot)$几乎处处有$h<\infty$。

(13.4.2) **引理** 对于每$\lambda\in\boldsymbol{R}^1$，$\widetilde{\mathscr{E}}_\lambda\subset\mathscr{E}_\lambda$；若$\mathscr{E}_\lambda\neq\{0\}$，则$\widetilde{\mathscr{E}}_\lambda\neq\{0\}$。

证 前者显然。往证后者。设$\mu\in\mathscr{E}_\lambda$，$\mu\neq 0$。命$\nu=\lim\limits_{t\downarrow 0}e^{-\lambda t}\mu\mathbf{P}_t$。由于

$$e^{-\lambda(t+s)}\mu\mathbf{P}_{t+s}=e^{-\lambda t}\mu P_t(e^{-\lambda s}\mathbf{P}_s)$$

$$\leqslant e^{-\lambda s}\mu P_s\leqslant\mu.$$

从而

$$e^{-\lambda t}\mu P_t\uparrow\nu\leqslant\mu,\ t\downarrow 0,$$

进而

$$e^{-\lambda t}\nu P_t\leqslant e^{-\lambda t}\mu P_t\leqslant\nu.$$

$$\nu(\psi_0)\geqslant e^{-\lambda t}\mu P_t\psi_0\geqslant e^{-\lambda t}\mu(K)\cdot\varepsilon.$$

故$\nu\in\widetilde{\mathscr{E}}_\lambda-\{0\}$。 ▌

上节之末已经指明，数λ_π是$\{P_t:\ t>0\}$常返性的分界点。但于此，常返性的概念与先前有区别，当$\lambda<\lambda_\pi$时，虽然$\mathbf{P}_t$是λ常返的，但却不存在正的Radon测度作为不变测度。事实上，$\mathscr{I}_\lambda\subset\mathscr{E}_\lambda=\{0\}$。当然，当$\lambda>\lambda_\pi$时，虽然$\mathbf{P}_t$是$\lambda$非常返的，我们也不能期望一定存在非平凡的$\lambda$不变测度。问题在于：在$\lambda_\pi$处，情况如何？首先，我们有如下一般性结果：

(13.4.3) **定理** 如果$\{P_t:\ t>0\}$是λ_π常返的，则必定存在正的Radon测度作为λ_π不变测度。事实上，我们有$\mathscr{I}_{\lambda_\pi}=\mathscr{E}_{\lambda_\pi}$。

证 由于$\mathscr{E}_{\lambda_\pi}\neq\{0\}$，前者是后者的推论。今设$\mu\in\mathscr{E}_{\lambda_\pi}-\mathscr{I}_{\lambda_\pi}$。

则 $\mu\neq 0$ 且存在 $t_0>0$ 使 $\nu=e^{\lambda_x t_0}\mu-\mu\mathbf{P}_{t_0}$ 为正的 Radon 测度。置

$$\omega=\int_0^\infty e^{-\lambda_x t}\nu\mathbf{P}_t dt$$

则对于每 $T>t_0$，我们有

$$\begin{aligned}
&\int_0^T e^{-\lambda_x t}\nu\mathbf{P}_t dt\\
&=e^{\lambda_x t_0}\left[\int_0^T e^{-\lambda_x t}\mu\mathbf{P}_t dt-\int_{t_0}^{T+t_0} e^{-\lambda_x t}\mu\mathbf{P}_t dt\right]\\
&=e^{\lambda_x t_0}\left[\int_0^{t_0} e^{-\lambda_x t}\mu\mathbf{P}_t dt-\int_T^{T+t_0} e^{-\lambda_x t}\mu\mathbf{P}_t dt\right]\\
&\leqslant t_0 e^{\lambda_x t_0}\mu,
\end{aligned}$$

可见 ω 是一个 Radon 测度。这矛盾于 λ_x 常返性的假设。 ▌

对于马链，我们将证明定理（13.4.3）中所述的 λ_x 不变测度是唯一的。为此，我们先给出 λ_x 的一个基本估计。

为简单计，总取

$$E=\{0,1,2,\cdots\},\ g(x)=\mathbf{I}_{\{0\}}(x),\ x\in E.$$

(13.4.4) **定理** 设 $P(t)=(\mathbf{P}_{ij}(t))$ 是一个跳过程。如果 $\mu\in\widetilde{\mathscr{C}}_\lambda(g)$，$\lambda\in\boldsymbol{R}^1$，则

$$\lambda\geqslant -q_i,\ i\in E;$$
$$(\lambda+q_i)\mu_i\geqslant\sum_{j\neq i}\mu_j q_{ji},\ i\in E.$$

特别地，若 $P(t)$ 不可约，则

$$\lambda_x\geqslant-\inf_{i\in E}q_i.$$

证 定义

(13.4.5) $$\widetilde{\mathbf{P}}_{ij}(t)=\mu_j\mathbf{P}^\lambda_{ji}(t)/\mu_i,\ i,j\in E.$$

容易验证 $(\widetilde{\mathbf{P}}_{ij}(t))$ 也是一个跳过程，它的 Q 矩阵为：

$$\widetilde{q}_i=-\widetilde{q}_{ii}=\lambda+q_i,\ i\in E;$$
$$\widetilde{q}_{ij}=\mu_j q_{ji}/\mu_i,\ i\neq j.$$

然后，所述断言容易由 Q 矩阵的性质读出。 ▌

(13.4.5) **定理** 设 $(\mathrm{P}_{ij}(t))$是不可约跳过程．如果它是λ_x常返的，即

$$\int_0^\infty e^{-\lambda_x t}P_{ii}(t)\,dt=\infty,\quad i\in\mathrm{E},$$

则λ_x不变测度存在且唯一，它就是

$$(13.4.6)\qquad \mu_i=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{r=1}^{n}P_{0i}^{(r)}e^{-\lambda_x r}}{\sum_{r=0}^{n}P_{00}^{(r)}e^{-\lambda_x r}}$$

此处 $(\mathrm{P}_{ij}^{(r)})=(\mathrm{P}_{ij}(1))^r$．

证 存在性来自 (13.4.3)．为证唯一性，如 (13.4.5) 定义 $(\widetilde{\mathrm{P}}_{ij}(t))$．注意 (μ_i) 为λ_x不变测度且 $(\mathrm{P}_{ij}(t))$ 是λ常返的，因而 $(\widetilde{\mathrm{P}}_{ij}(t))$ 也是常返的．从而由Chung[2; I. §9. 定理 5]知

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{r=1}^{n}\widetilde{\mathrm{P}}_{i0}^{(r)}\right)\Big/\left(\sum_{r=0}^{n}\widetilde{\mathrm{P}}_{00}^{(r)}\right)=1.$$

另一方面，

$$\frac{\sum_{r=1}^{n}\widetilde{\mathrm{P}}_{i0}\ (rt)}{\sum_{r=0}^{n}\widetilde{\mathrm{P}}_{00}\ (rt)}=\frac{1}{\mu_i}\cdot\frac{\sum_{r=1}^{n}\mathrm{P}_{0i}^{(r)}(t)e^{-\lambda_x tr}}{\sum_{r=0}^{n}\mathrm{P}_{00}^{(r)}(t)e^{-\lambda_x tr}},\quad i\in\mathrm{E},\ t>0.$$

特别地，取$t=1$，得

$$\mu_i=\frac{\sum_{r=1}^{n}\mathrm{P}_{0i}^{(r)}e^{-\lambda_x r}}{\sum_{r=0}^{n}\mathrm{P}_{00}^{(r)}e^{-\lambda_x r}}\cdot\left(\frac{\sum_{r=1}^{n}\widetilde{\mathrm{P}}_{i0}^{(r)}}{\sum_{r=0}^{n}\widetilde{\mathrm{P}}_{00}^{(r)}}\right)^{-1},\quad i\in\mathrm{E},$$

由此立得 (13.4.6)． ∎

对于λ_x非常返情形，$\mathscr{I}_{\lambda_x}$可以是$\{0\}$．请看如下例子：

(13.4.7) **例** 取$\overline{P}_{00}=0$，$\overline{P}_{0i}=p_i>0, i\geqslant 1$，$\sum_{i=1}^{\infty}p_i<1$，$P_{i0}=1$，$i\geqslant 1$．显然$\overline{P}=(\overline{P}_{ij})$不满足定理(13.1.8)的条件，故$\overline{P}$没有不变测度．这一事实也容易直接验证．

再取$0<q_i\downarrow 0$，$i\uparrow\infty$；$q_{ij}=\overline{P}_{ij}q_i$，$i\neq j$．这个$Q$矩阵有界，从而$Q$过程唯一．自然满足向前方程．而且，由$\overline{P}$的非常返性立知$P(t)=(P_{ij}(t))$也是非常返的．利用$q_i\downarrow 0$和定理(13.4.4)知，$\lambda_x=0$．再由定理(13.2.7)知$\mathscr{I}_{\lambda_x}=\mathscr{I}_0=\{0\}$．

注意$\mu_0=1$，$\mu_i=p_i$，$i\geqslant 1$是$\overline{P}$的一个配称列，从而$(\mu_i/q_i: i\in E)$是(q_{ij})的配称列．故$P(t)$是可配称的．由非保守性及唯一性知，此过程$P(t)$中断．这样，我们构造出一个可配称中断Q过程，它没有λ_x不变测度． ▮

(13.4.8) **例** 取$\overline{P}=(\overline{P}_{ij})$如(13.1.5)，且

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=0}^{n}p_k\neq 0.$$

然后如上例构造Q矩阵(q_{ij})．我们得到一个有界保守Q过程．如上例所证，我们也有$\mathscr{I}_{\lambda_x}=\mathscr{I}_0=\{0\}$． ▮

(13.4.9) **例** 设Δ为$\boldsymbol{R}^3$上的Laplace算子．取平滑函数ρ：$\boldsymbol{R}^3\to(0,\infty)$，使得由$L=\frac{1}{2}\rho\Delta$生成的扩散过程以正概率中断(参考Stroock, Varadhan[P 260．练习10.3.3])．以$\{P_t, t>0\}$表示伴随的半群．置

$$m(dy)=1/\rho(y)dy,$$

则

$$P_tf(x)=\int_{\boldsymbol{R}^3}p(t,x,y)f(y)m(dy),\quad f\in C_b(\boldsymbol{R}^3).$$

此处p：$(0,\infty)\times\boldsymbol{R}^3\times\boldsymbol{R}^3\to(0,\infty)$平滑且关于$x$和$y$对称．而且，若用$\widetilde{L}$表示$L|_{C_0^\infty(\boldsymbol{R}^3)}$的$L^2(m)$扩张($C_0^\infty$表示具有紧支撑的

平滑函数），则由易证

$$\mathbf{P}_t = e^{t\widetilde{L}}\Big|_{C_b(\mathbf{R}^3)}$$

利用以上事实及（13.3.9），我们看到

$$\lambda_{\mathscr{E}} = \sup\{(\varphi, L\varphi)_{L^2(m)} : \varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^3),\ \|\varphi\|_{L^2(m)} = 1\}$$

但

$$(\varphi, L\varphi)_{L^2(m)} = (\varphi, 1/2\Delta\varphi)_{L^2}\quad（勒贝格测度）$$

从而 $\lambda_{\mathscr{E}} = 0$。今设 μ 为正的 Radon 测度且 $\mu\mathbf{P}_t = \mu$，$t>0$。则

$$\mu(dy) = f(y)dy,\ f \in C^\infty(\mathbf{R}^3)^*$$

且

$$\Delta(\rho f) = 0.$$

这样，ρf 应为常数。因此

$$m\mathbf{P}_t = m,\ t>0.$$

特别地

$$\begin{aligned}&\int_{R^3} g(x)(1 - \mathbf{P}_t 1(x))m(dx)\\ &= \int_{R^3} g(x)m(dx) - \int_{R^3}\mathbf{P}_t g(x)m(dx) = 0,\\ &\qquad\qquad t>0,\ g \in C_b(\mathbf{R}^3).\end{aligned}$$

这意味着 $\mathbf{P}_t 1 = 1$，矛盾于 $\{\mathbf{P}_t\}$ 中断的假设。故 $\mathscr{I}_{\lambda_{\mathscr{E}}} = \mathscr{I}_0 = \{0\}$。 ∎

下面，我们将研究 $\lambda_{\mathscr{E}}$ 非常返情形 $\mathscr{I}_{\lambda_{\mathscr{E}}}$ 的构造。主要想法是归结为 $\mathscr{I}_0$ 的构造。为此，需要使用一些相当深刻的结果。

我们将固定一个严格正的函数 $g \in \mathscr{E}$。以 $\widetilde{\mathscr{E}}_0^e$ 表示 $\widetilde{\mathscr{E}}_0$ 的全部极点集。如 Dynkin[3]或[4]，我们可赋予 $\widetilde{\mathscr{E}}_0(g)$ 如下凸可测结构：$\widetilde{\mathscr{E}}_0(g)$ 上的 σ 代数由如下集合生成：

$$\{\mu \in \widetilde{\mathscr{E}}_0(g) : \mu(B) < u\},\ B \in \mathscr{E},\ u \in \mathbf{R}.$$

称可测子集 $\mathscr{D} \subset \widetilde{\mathscr{E}}_0(g)$ 为一个面，如果对于 $\widetilde{\mathscr{E}}_0(g)$ 上的每一个概率测度 η，

(13.4.10) $\qquad \mu_\eta(B) \equiv \int_C \widetilde{\mu}(B)\eta(d\widetilde{\mu}),\ B \in \mathscr{E}, C = \widetilde{\mathscr{E}}_0^e(g)$ 属于

$\mathscr{D}$当且仅当η集中在$\mathscr{D}$上.

(13.4.11) **引理** 代替 (13.3.1), 假定对于每$t>0$, $P_t\psi_0$处处正. 设$\lambda\in\boldsymbol{R}^1$. 那么, 为使 Radon 测度$\mu$为$\lambda$不变测度, 充要条件是: 存在$T>0$, 使

$$\mu \mathbf{P}_T(\psi_0)=e^{\lambda T}\mu(\psi_0)$$

而且

$$\mu \mathbf{P}_s\leqslant e^{-\lambda s}\mu,\quad 0\leqslant s\leqslant T.$$

证 必要性是平凡的. 为证充分性, 命$\nu_s=e^{\lambda s}\mu-\mu\mathbf{P}_s$, $s\geqslant 0$. 由假设, 对于$0\leqslant s\leqslant T$, ν_s是一个非负的 Radon 测度. 固定$0\leqslant s\leqslant T$, 则

$$\begin{aligned}\nu_s(\mathbf{P}_{T-s}\psi_0)&=e^{\lambda s}\mu(\mathbf{P}_{T-s}\psi_0)-\mu(\mathbf{P}_T\psi_0)\\&\leqslant e^{\lambda T}\mu(\psi_0)-\mu(\mathbf{P}_T\psi_0)=0\end{aligned}$$

由于$\mathbf{P}_{T-s}\psi_0$是局部一致正的, 我们看到: $\nu_s=0$, $0\leqslant s<T$. 即$\mu\mathbf{P}_s=e^{\lambda s}\mu$, $0\leqslant s<T$. 最后, 利用半群性立得

$$\mu\mathbf{P}_s=e^{\lambda s}\mu,\quad s\geqslant 0.\qquad \rrbracket$$

(13.4.12) **定理** $\mathscr{I}_0(g)$是$\widetilde{\mathscr{C}}_0(g)$的一个面.

证 由上述引理知, 对于每$T>0$,

$$\mathscr{I}_0(g)=\bigcap_{\varphi\in C_0(E)}\{\mu\in\mathscr{I}_0(g): \mu(\varphi)=\mu \mathrm{P}_T(\varphi)\}.$$

从而$l_0(g)$是$\widetilde{\mathscr{C}}_0(g)$中的可测集. 显然, 若$\eta$集中在$\mathscr{I}_0(g)$上, 则由 (13.4.10) 所定义的$\mu_\eta\in\mathscr{I}_0(g)$. 今假定由(13.4.10) 所定义的$\mu_\eta\in\mathscr{I}_0(g)$. 那么,

$$\begin{aligned}\mu(\varphi)&=\int_C\widetilde{\mu}(\varphi)\eta(d\widetilde{\mu})\\&=\int_C\widetilde{\mu}\mathrm{P}_T(\varphi)\eta(d\widetilde{\mu}).\ (C=\widetilde{\mathscr{C}}_0^e(g),\text{下式同})\end{aligned}$$

从而

$$(13.4.13)\qquad \int_{C-\mathscr{I}_{(g)}}(\widetilde{\mu}(\varphi)-\widetilde{\mu}\mathrm{P}_T(\varphi))\eta(d\widetilde{\mu})=0,$$

$$\varphi\in C_0(E).$$

记

$$\mathscr{D}'=\widetilde{\mathscr{C}}_0^e(g)-\mathscr{I}_0(g),$$
$$\mathscr{D}'_\varphi=\{\mu\in\mathscr{D}':\ \widetilde{\mu}(\varphi)-\widetilde{\mu}P_T(\varphi)>0\}.$$

则由 (13.4.13) 得

$$\eta(\mathscr{D}')=\eta\Big(\bigcup_{\varphi\in\widetilde{C}(E)}\mathscr{D}'_\varphi\Big)$$
$$\leqslant\sum_{\varphi\in\widetilde{C}_0)}\eta(\mathscr{D}'_\varphi)=0,$$

此处 $\widetilde{C}_0(E)$ 为 $C_0(E)$ 中的可数稠集. 可见, η 集中在 $\mathscr{I}_0(g)$ 上. ▮

由 Dynkin[3; 6.1]知, 每一个面 $\mathscr{D}$ 的极点集是 $\mathscr{D}\cap\widetilde{\mathscr{C}}_0^e(g)$. 这样, $\mathscr{I}_0(g)$ 的极点集 $\mathscr{I}_0^e(g)=\mathscr{I}_0(g)\cap\widetilde{\mathscr{C}}_0^e(g)$.

设 $\mathscr{M}$ 为 $(E,\mathscr{E})$ 上的非负测度的全体. 我们说 $\mathscr{M}$ 中的元素 m 是最小的, 如果 $m=m_1+m_2$, $m_1,m_2\in\mathscr{M}$ 导出 m_1 和 m_2 均与 m 成比例. 容易看出, μ 为 $\widetilde{\mathscr{C}}_0-\{0\}$ 的极点, 当且仅当: 对于某 g, 它是 $\widetilde{\mathscr{C}}_0(g)$ 的极点. 综合以上讨论, 并利用 Dynkin[4; 引理 2.2, 定理 2.1 和定理2.2], 我们可以给出 $\mathscr{I}_0$ 的最小元计算的极限程序如下:

(13.4.14) 定理 记

$$E_c=\left\{x\in E:\ \int_0^\infty P_tg(x)dt=\infty\right\},$$
$$E_d=\left\{x\in E:\ \int_0^\infty P_tg(x)dt<\infty\right\},$$
$$\mu_c=\mu|_{E_c},\quad \mu_d=\mu|_{E_d},\quad \mu\in\widetilde{\mathscr{C}}_0,$$
$$\mathscr{I}_{0,c}=\{\mu\in\mathscr{I}_0:\ \mu=\mu_c\},$$
$$\mathscr{I}_{0,d}=\{\mu\in\mathscr{I}_0:\ \mu=\mu_d\}.$$

设 μ 是 $\mathscr{I}_0$ 的最小元. 那么

(i) 如 $\mu(g)<\infty$, 则或者 μ 属于 $\mathscr{I}_{0,c}$ 或者 $\mu\in\mathscr{I}_{0,d}$;

(ii) 如 $\mu\in\mathscr{I}_{0,c}$, φ, $\psi\in L^1(\mu)$, $\mu(\psi)\neq0$, 则对于 μ 几乎所

有的 x,

$$\frac{\mu(\varphi)}{\mu(\psi)}=\lim_{T\to\infty}\frac{\int_0^T P_t\varphi(x)\,dt}{\int_0^T P_t\psi(x)\,dt}.$$

(iii) 如$\mu\in\mathscr{I}_{0,d}$,则存在 E 中一切序列 x_1, x_2, …所构成的空间 E^∞ 上的概率测度 $\boldsymbol{P}$,使得对于 $\boldsymbol{P}$ 几乎一切序列 $x_1,x_2,\cdots$, $s\in(0,\infty)$, 和 φ, $\psi\in L^1(\mu)$, $\mu(\psi)\neq0$, 有

$$\frac{\mu(\varphi)}{\mu(\psi)}=\lim_{k\to\infty}\frac{\int_0^\infty P_t\varphi(x_k)\,dt}{\int_0^\infty P_t\psi(x_k)\,dt},$$

而且

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\int_s^\infty P_t\varphi(x_k)\,dt}{\int_0^\infty P_t\psi(x_k)\,dt}=0.$$

我们使用对偶技巧,将$\mathscr{I}_{\lambda_x}\neq\{0\}$归结为$\mathscr{I}_0\neq\{0\}$。

设 f 是有限、处处正的 λ_x 过份函数。定义

(13.4.15) $\widehat{P}(t,x,dy)=f(x)^{-1}P(t,x,dy)f(y)$, 则 $\widehat{P}(t,x,\cdot)$是一个次马氏转移函数. 以$\widehat{\mathscr{I}}_0$表示它的不变测度(包括 0)的全体. 那么,我们有

(13.4.16) **定理** $\mathscr{I}_{\lambda_x}\neq\{0\}$当且仅当$\widehat{\mathscr{I}}_0\neq\{0\}$.事实上,$\mu\in\mathscr{I}_{\lambda_x}$ 与 $\nu\in\widehat{\mathscr{I}}_0$有如下对应关系:

$$\nu(dx)=f(x)\mu(dx).$$

证 如果 $\nu\in\widehat{\mathscr{I}}_0$ 且 $\nu(dx)=f(x)\mu(dx)$, 则

$$\int_B f(x)\mu(dx)=\nu(B)=\int\nu(dx)\,\widehat{P}(t,x,B)$$

$$=\int\mu(dx)\int_B P_t^{\lambda_x}(x,dy)f(y)$$

$$=\int_B(\mu P_t^{\lambda_x})(dx)f(x),\quad B\in\mathscr{E}$$

从而 $\mu=\mu P^{\lambda_\pi}$，即 $\mu\in\mathscr{I}_{\lambda_\pi}$。逆命题的证明类似。 】

关于 λ_π 常返情形，"$\mathscr{I}_{\lambda_\pi}\neq\{0\}$？"已有完满解答。因此，由定理（13.4.16）看来，重要的是对 λ_π 非常返情形构造出所需的 λ_π 过份函数，我们作稍强一点的假定：

$$(13.4.17)\qquad \int_0^\infty P_t^{\lambda_\pi}\psi_0(x)dt<\infty,\ x\in E.$$

当然，在许多情况下，这等价于 λ_π 非常返性。

(13.4.18) **引理** 在条件（13.4.17）之下，函数

$$f(x)\equiv\int_0^\infty P_t^{\lambda_\pi}\psi_0(x)\,dt,x\in E$$

是有限、处处正的 λ_π 过份函数，

证 由（13.3.1）和（13.3.2）立得正性。λ_π 过份性质是因

$$P_t^{\lambda_\pi}f(x)=\int_t^\infty P_t^{\lambda_\pi}\psi_0(x)ds\uparrow f(x),\ s\downarrow 0.\qquad】$$

有时候，使用下述分解是有益的：固定严格正的函数 $g\in\mathscr{E}$，命

$$\widehat{E}_c=\left\{x\in E:\ \int_0^\infty P_t^{\lambda_\pi}g(x)dt=\infty\right\}$$

$$\widehat{E}_d=\left\{x\in E:\ \int_0^\infty P_t^{\lambda_\pi}g(x)dt<\infty\right\}$$

$$\widehat{\mu}_c=\mu\big|_{\widehat{E}_c},\quad \widehat{\mu}_d=\mu\big|_{\widehat{E}_d},\quad \mu\in\widetilde{\mathscr{E}}_{\lambda_\pi}.$$

例如说，利用 Dynkin[4；定理 3.2]，得

(13.4.19) **定理** 如 $\mu\in\widetilde{\mathscr{E}}_{\lambda_\pi}$，$\mu(g)<\infty$ 且 $\widehat{\mu}_d=0$，则 $\mu\in\mathscr{I}_{\lambda_\pi}$。

我们说，这个定理改进了定理(13.4.3)，为此，只需证明：若 $\{P_t:\ t>0\}$ 是 λ_π 常返的，则（13.4.19）的条件满足。事实上，对于每 $\mu\in\widetilde{\mathscr{E}}_{\lambda_\pi}-\{0\}$，我们可取严格正的函数 $g\in C(E)$，例如说

$$g(x)\equiv\int_0^\infty P_t^\lambda\psi_0(x)dt\quad(\lambda>0)$$

使得 $\mu(g)<\infty$。假定 $\widehat{\mu}_d\neq 0$。则存在 $0<c_1<c_2<\infty$ 和紧集 K，

使

$$0<\mu(G)<\infty.$$

此处

$$G\equiv\left\{x: c_1\leqslant\int_0^\infty P_t^{\lambda_x}g(x)dt\leqslant c_2\right\}\cap K.$$

置 $\nu=\mu|_G$，那么，ν 是一个 Radon 测度且

$$\int_0^\infty \nu P_t^{\lambda_x}gdt\begin{cases}\geqslant c_1\mu(G)>0,\\ \leqslant c_2\mu(K)<\infty.\end{cases}$$

对于每 $\varphi\in C_0^+(E)$，我们有

$$\int_0^\infty \nu P_t^{\lambda_x}\varphi dt\leqslant\frac{\|\varphi\|}{a}\int_0^\infty \nu P_t^{\lambda_x}gdt$$

$$\leqslant\frac{\|\varphi c_2\|}{a}\mu(K)<\infty.$$

此处

$$a\equiv\inf_{x\in\operatorname{supp}(\varphi)}g(x)>0.$$

从而 $\int_0^\infty \nu P_{tx}^{\lambda}dt$ 是一个 Radon 测度，与 λ_x 的假设矛盾。 ∎

应用于马链，我们有

(13.4.20) **定理** 设 $Q=(q_{ij})$ 为不可约 Q 矩阵。Q 过程 $P(t)$ 是 λ_x 非常返的，即

$$f_i\equiv\int_0^\infty P_{i\cdot}^{\lambda_x}(t)dt<\infty.$$

定义

$$\widehat{P}_{ii}(t)=f_i^{-1}P_{i\cdot}^{\lambda_x}(t)f_j,$$

$$\widehat{P}_{ij}=0,\quad \widehat{P}_{ij}=f_i^{-1}q_{ij}f_j(\lambda_x+q_i)^{-1},\quad i\neq j,$$

则 $\widehat{P}(t)$ 是以 $\widehat{Q}=(\widehat{q}_{ij})$：

$$\widehat{q}_i=\lambda_x+q_i,\quad \widehat{q}_{ij}=f_i^{-1}q_{ij}f_j,\quad i\neq j$$

为 Q 矩阵的 Q 过程。$\widehat{P}(t)$ 满足向前方程当且仅当 $P(t)$ 满足向前方程。如果满足向前方程，则为使 $\mathscr{I}_{\lambda_x}\neq\{0\}$，下述条件是必要

的：存在E的一个无穷子集K，使

$$\lim_{p\to\infty}\lim_{K\ni k\to\infty}\widehat{L}_{ki}(j)/\widehat{L}_{ki}(0)=0$$

此处对于固定的i和j，$\widehat{L}_{ki}(j)$是下述方程

$$x_k=\sum_{l\neq i}\widehat{P}_{kl}x_l+\sum_{r=j}^{\infty}\delta_{kr}\ \widehat{P}_{ri},\ k\in E$$

的最小非负解。

证 仿（13.4.4）可得第一项断言、至于第二项断言：

$$\sum_k\widehat{P}_{ik}(t)\ \widehat{q}_{ki}=f_i^{-1}\sum_{k\neq i}P_{ik}^{\lambda_\pi}(t)q_{kj}f_j-f_i^{-1}e^{-\lambda_\pi t}P_{ij}(t)\cdot$$

$$\cdot f_j(\lambda_\pi+q_j)$$

$$=f_i^{-1}e^{-\lambda_\pi t}f_j\Big(\sum_{k\neq i}P_{ik}(t)q_{kj}-P_{ij}(t)(\lambda_\pi+q_j)\Big)$$

$$=f_i^{-1}e^{-\lambda_\pi t}f_j(P'_{ij}(t)-\lambda_\pi P_{ij}(t))$$

$$=\widehat{P}'_{ij}(t).$$

最后，使用（13.2.7）易得末项断言。 ▌

§13.5 补充与注记

首先，我们可以使用§13.4的想法，把§13.1的结果推广到一般的状态空间。

仍设$(E,\mathscr{E})$为局部紧、可分距离空间．P为$(E,\mathscr{E})$上的可测核，即对于每$x\in E$，$P(x,\cdot)$是$\mathscr{E}$上的有限测度，总负荷$\leqslant1$；对于每$B\in\mathscr{E}$，$P(\cdot,B)$是非负$\mathscr{E}$可测的．假设

(i) 对于每$\varphi\in C_0(E)$，$x\to P\varphi(x)$连续；

(ii) 存在$\psi_0\in C_0(E)^*$使得对于每一紧集$K\subset E$，存在$\varepsilon>0$使$\varepsilon I_k\leqslant P\psi_0$。

再记

$$\mathscr{M}=\{\mu:\ \mu\text{和}\mu P\text{都是}(E,\mathscr{E})\text{上的 Radon 测度}\},$$

$$\mathscr{C}=\{\mu\in\mathscr{M}:\ \mu\geqslant\mu\mathrm{P}\}$$
$$\mathscr{K}=\{\mu\in\mathscr{C}:\ \mu(\psi_0)=1\},$$
$${}_B\mathrm{P}^{(0)}(x,A)=\delta(x,A)\ ,$$
$${}_B\mathrm{P}^{(n+1)}(x,A)=\int_{B^c}P(x,dx_1)\int_{B^c}\cdots\int_{B^c}\mathrm{P}(x_n,A),\ n\geqslant 0,$$
$$\mathrm{P}^{(n)}(x,A)={}_\phi\mathrm{P}^{(n)}(x,A)\ ,$$
$$Q(x,A)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{P}^{(n)}(x,A)\ ,$$
$$x\in E,\ A,\ B\in\mathscr{E}.$$

使用前两节的证法，可得

(13.5.1) **引理** $\mathscr{C}$ 是$\mathscr{M}$中的闭凸锥。若$\mathscr{C}\neq\{0\}$，则$\mathscr{K}$是$\mathscr{C}$的紧基。

(13.5.2) **定理** 如果 P 是常返的，即不存在正的 Radon 测度 ν，使 $\sum_{n=0}^{\infty}\nu P^{(n)}$为 Radon 测度。那么，每一个$\mu\in\mathscr{C}-\{0\}$是 P 的不变测度。

(13.5.3) **注** 如果 P 是非常返的，即存在 Radon 测度 ν，使$\sum_{n=0}^{\infty}\nu P^{(n)}$仍然是一个 Radon 测度。那么，对于 ν 几乎一切 x，

$$Q(x,\varphi)\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{P}^{(n)}\varphi(x)<\infty,\ \varphi\in C_0(\mathrm{E})^+,$$

而且当 $E\supset\supset A\searrow\phi$ 时，

$$\infty>\sum_{n=0}^{\infty}P^{(n)}(x,A)\downarrow 0.$$

(13.5.4) **定理** 假定存在紧集 $K\subset\mathrm{E}$，使得当 $A\searrow\phi$ 时，在 K 上一致地有 $\sum_{n=1}^{\infty}KP^{(n)}(\cdot,A)\to 0$。如果存在序列$\{x_n\}_1^\infty\subset E$，$x_n\to\infty$ 和序列$\{\eta_m\}_1^\infty\subset C_0(\mathrm{E})$：$0\leqslant\eta_m\leqslant 1$，$\eta_m\uparrow 1$，$m\to\infty$；并且

对于每 $\varphi \in C_0(E)^+$,

$$Q(x_n,\varphi)<\infty;$$

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} L_{\eta_m}(x_n,\varphi)/Q(x_n,\psi_0)=0.$$

此处

$$L_{\eta_m}(x_n,\varphi)=\int\sum_{n=1}^{\infty} {}_kP^{(n)}(x_n,dy)P(y,\varphi)(1-\eta_m(y)) + P(x_n,\varphi),$$

则存在正的 Radon 测度 μ，使 $\mu=\mu P$.

证 由于

$$\sum_{n=2}^{\infty}\underset{\substack{x_1,\cdots,x_{n-1}\in E\\ \exists i(1\leqslant i\leqslant n-1)\text{使}x_i\in K}}{\int\cdots\int} P(x,dx_1)\cdots P(x_{n-1},\varphi)$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\underset{x_1,\cdots,x_{n-1}\in E}{\sum_{m=1}^{n-1}} P(x,dx_1)\cdots P(x_{m-2},dx_{m-1})\cdot$$

$$\cdot\int_K P(x_{m-1},dx_m)\int_{K^c}P(x_m,dx_{m+1})\int_{K^c}\cdots\int_{K^c}P(x_{n-1},\varphi)$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{n-1}\int_K P^{(m)}(x,dy)\,{}_kP^{(n-m)}(y,\varphi)$$

$$=\int_K Q(x,dy)\sum_{n=1}^{\infty}{}_kP^{(n)}(y,\varphi)\quad,\ \varphi\in C_0(E)^+$$

此处 ${}_KP^{(n)}(x,\varphi)={}_KP^{(n)}\varphi(x)$，我们有

$$Q(x,\varphi)=P(x,\varphi)+\sum_{n=2}^{\infty}P^{(n)}(x,\varphi)$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\int P^{(n-1)}(x,dy)P(y,\varphi)+P(x,\varphi)$$

$$=\int Q(x,dy)P(y,\varphi)+P(x,\varphi)$$

$$= \int Q(x,dy)\eta_m(y)P(y,\varphi) + \int \sum_{n=1}^{\infty} P^{(n)}(x,dy)P(y,\varphi)$$

$$(1-\eta_m(y)) + P(x,\varphi)$$

$$= \int Q(x,dy)\eta_m(y)P(y,\varphi) + P(x,\varphi)$$

$$+ \int\Big[\sum_{n=2}^{\infty} \underset{x_1,\cdots,x_{n-1}\in E}{\int\cdots\int} P(x,dx_1)\cdots P(x_{n-1},dy) +$$

$$\exists i(1\leqslant i\leqslant n-1)\text{使}x_i\in K$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} {}_KP^{(n)}(x,dy) \Big] P(y,\varphi)(1-\eta_m(y))$$

$$= \int Q(x,dy)\eta_m(y)P(y,\varphi) + \int\int_K Q(x,dz)\sum_{n=1}^{\infty} {}_KP^{(n)}(z,dy)\cdot$$

$$\cdot P(y,\varphi)(1-\eta_m(y)) + \int \sum_{n=1}^{\infty} {}_KP^{(n)}(x,dy)P(y,\varphi)(1-\eta_m(y))$$

$$+ P(x,\varphi)$$

$$= \int Q(x,dy)\eta_m(y)P(y,\varphi) + \int_K Q(x,dz)M_m(z) + L_{\eta_m}(x,\varphi)$$

这里

$$M_m(z) = \int \sum_{n=1}^{\infty} {}_KP^{(n)}(z,dy)P(y,\varphi)(1-\eta_m(y)) .$$

从而

$$\frac{Q(x_n,\varphi)}{Q(x_n,\psi_0)} = \int \frac{Q(x_n,dy)}{Q(x_n,\psi_0)}\eta_m(y)P(y,\varphi)$$

$$+ \int_K \frac{Q(x_n,dz)}{Q(x_n,\psi_0)} M_m(z) + \frac{L_{\eta_m}(x_n,\varphi)}{Q(x_n,\psi_0)} .$$

注意

$$\frac{Q(x_n,\cdot)}{Q(x_n,\psi_0)} \in \mathscr{K}$$

由引理（13.5.1），我们可以选取 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$ 使

$$\mu_{n_k} \equiv \frac{Q(x_{n_k}, \cdot)}{Q(x_{n_k}, \psi_0)} \xrightarrow{v} \mu \in \mathscr{K}.$$

另一方面，

$$\begin{aligned}
M_m &\equiv \sup_{Z \in K} M_m(z) \\
&\leqslant \sup_{y \in E} P(y, \varphi) \sup_{Z \in K} \int \sum_{n=1}^{\infty} {}_K P^{(n)}(z, dy)(1 - \eta_m(y)) \\
&\leqslant \sup_{y \in E} P(y, \varphi) \sup_{Z \in K} \sum_{n=1}^{\infty} {}_K P^{(n)}(z, (\mathrm{supp}(\eta_m))^c) \\
&\longrightarrow 0, \quad m \to \infty;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{k \to \infty} \int_K \mu_{n_k}(dz) M_m(z) \leqslant \\
&\leqslant M_m \overline{\lim_{k \to \infty}} \mu_{n_k}(K) \\
&\leqslant M_m \lim_{k \to \infty} \mu_{n_k}(\varphi') \\
&= M_m \mu(\varphi').
\end{aligned}$$

此处 $\varphi' \in C_0(E)^+$ 且 $\mathrm{supp}(\varphi') \supset K$，因此

$$\lim_{m \to \infty} \lim_{n \to \infty} \int_K \mu_{n_k}(dz) M_m(z) = 0.$$

由此及所设条件得

$$\mu(\varphi) = \mu P(\varphi), \quad \varphi \in C_0(E)^+$$

故 $\mu = \mu P$. ∎

例 (13.1.5)—(13.1.7) 取自 Derman[1]. 定理(13.1.3) 属于 Chung 和 Derman. 定理 (13.1.8) 和定理 (13.1.10) 的充分性部分属于 Harris [1]. Harris [1]也猜想必要性应成立. 但必要性的证明属于 Veech [1]. 定理 (13.2.6) 属于 Miller [1] 和吴立德 [1]. § 13.3 属于 Stroock[2]. 定理(13.4.4) 也属于 Stroock[2]. 其余结果属于 Chen 和 Stroock[1].

离散参数情形不变测度的唯一性问题和连续时间参数、非常返情形不变测度的存在性、唯一性问题都有待于进一步研究.

第十四章　粒子系统的平稳分布

本章先介绍弱收敛的一些不太常见的结果。然后应用这些结果来研究无穷粒子系统平稳分布的存在性、唯一性和遍历性问题。

§14.1　弱收敛性

下述两个结果是熟知的（例如见 Stroock、Varadhan [1; §1.1]或者 Billingsley [1]）。

(14.1.1) **定理**　设 μ 和 μ_n ($n\geqslant 1$) 为距离可测空间 $(E, \mathscr{E})$ 上的概率测度，则下述断言等价：

(i) 对于每 $f\in C_b(E)$ (E 上有界连续函数的全体)，

$\lim\limits_{n\to\infty}\int f d\mu_n=\int f d\mu$;

(ii) 对于每 $f\in U_\rho(E)$ ($(E,\rho,\mathscr{E})$ 上的有界一致连续函数的全体，ρ 为任一拓扑等价距离)．

$\lim\limits_{n\to\infty}\int f d\mu_n=\int f d\mu$;

(iii) 对于每 E 中的闭集 C,

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\mu_n(C)\leqslant\mu(C)$;

(iv) 对于每 E 中开集 G,

$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\mu_n(G)\geqslant\mu(G)$;

(v) 对于每 $B\in\mathscr{E}, \mu(\partial B)=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n(B)=\mu(B)$.

(14.1.2) **定理**　用 $\mathscr{P}(E)$ 表示完备可分距离空间 $(E,\mathscr{E})$ 上概率测度的全体．为使 $\mathscr{M}\subset\mathscr{P}(E)$ 是相对紧的（即在弱收敛

拓扑下的闭包为紧集），充要条件是：对每 $\varepsilon>0$，存在紧集 $K_\varepsilon\subset E$，使

$$\inf_{\mu\in M}\ \mu(K_\varepsilon)\geqslant 1-\varepsilon.$$（此处$M=\mathscr{M}$，下页同）

此处，弱收敛拓扑是由开集：

$$\left\{\boldsymbol{P}:\ \boldsymbol{P}\in\mathscr{P}(\mathrm{E}):\ \left|\int fd\boldsymbol{P}-\int fd\boldsymbol{Q}\right|<\varepsilon\right\}$$

$$\varepsilon>0,\ \boldsymbol{Q}\in\mathscr{P}(\mathrm{E}),f\in C_b(\mathrm{E})$$

生成的拓扑。

这个定理是紧性的集合形式，即通过紧集 K_ε 来描述紧性判准。下面介绍另一种形式——函数形式。

(14.1.3) **定义** 称$h\in\mathscr{E}_+$（留意可取值$+\infty$）为紧函数，如果对于每 d：$0\leqslant d<+\infty$，$\{x\in E:\ h(x)\leqslant d\}$ 是紧集。

(14.1.4) **定理** 为使$\mathscr{M}\subset\mathscr{P}(E)$相对紧，充要条件是存在紧函数 h，使得*)

$$\sup_{\mu\in M}\int hd\mu\leqslant C<\infty.$$

证 充分性 对每 $\varepsilon>0$，只须取

$$K_\varepsilon=\{x\in \mathrm{E}:\ h(x)\leqslant C/\varepsilon\}$$

则

$$\sup_{\mu\in M}\ \mu(k_\varepsilon^c)=\sup_{\mu\in M}\ \mu\{x:\ h(x)>C/\varepsilon\}$$

$$\leqslant\sup_{\mu\in M}\frac{\varepsilon}{C}\int hd\mu\leqslant\varepsilon.$$

必要性 对每 $n\geqslant 1$，选紧集 K_{1/n^3} 使

$$\sup_{\mu\in M}\ \mu(K_{1/n^3}^c)\leqslant 1/n^3.$$

并取

$$h(x)=\inf\{n\geqslant 1:\ x\in K_{1/n^3}\}$$

---

*）使用通常约定：若$\{h(x)=\infty\}$为正测度集，则积分为$+\infty$，否则$h(x)=+\infty$不影响积分值。

则

$$\{x\in E: h(x)\leqslant d\}=\{x\in E: h(x)\leqslant[d]\}=$$
$$=\bigcup_{n=1}^{[d]} K_{1/n^3}$$

为紧集，而且

$$\sup_{\mu\in M}\int hd\mu=\sup_{\mu\in M}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{[n\leqslant h<n+1]} hd\mu$$

$$\leqslant\sup_{\mu\in M}\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\mu[h>n]$$

$$\leqslant\sup_{\mu\in M}\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\mu(K^c_{1/n^3})$$

$$\leqslant\sup_{\mu\in M}\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)/n^3<\infty. \qquad \blacksquare$$

下面，我们将定理（14.1.1），（iv）改为函数形式。

（14.1.5）**定理** 为使 μ_n 弱收敛于 μ，充要条件是：对于每一个下半连续的 $f\in\mathscr{E}_+$（即对于每 d：$0\leqslant d<\infty$，$\{x\in E: f(x)>d\}$ 是开集），有

$$\varliminf_{n\to\infty}\int fd\mu_n\geqslant\int fd\mu.$$

证 首先注意，若 B 为开集，则 $I_B\in\mathscr{E}_+$ 是下半连续的。从而条件是必要的。

为证充分性，注意若对有界的 f 已真，则由 $f\wedge N\in\mathscr{E}_+$ 的下半连续性及

$$\varliminf_{n\to\infty}\mu_n(f)\geqslant\varliminf_{n\to\infty}\mu_n(f\wedge N)\geqslant\mu(f\wedge N)$$

和单调收敛定理导出

$$\varliminf_{n\to\infty}\mu_n(f)\geqslant\mu(f).$$

此处

$$\mu(f)\equiv\int f d\mu.$$

故可将问题归结为 f 为有界的情形，以 f/N 代替 f，无妨设 $0\leqslant f\leqslant 1$。最后，令

$$A_{mk}=[f>k/m]\ ,\ k=0,\ 1,\cdots,n-1,\ m\geqslant 1$$

$$f_m=\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}I_{A_{mk}}$$

则 f_m 是下半连续的，而且对每 x，存在最大的 k_0，使

$$x\in A_{mk},\ 0\leqslant k\leqslant k_0;$$

$$x\notin A_{mk},\ k_0+1\leqslant k\leqslant m-1.$$

从而

$$|f(x)-f_m(x)|=|f(x)-\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{k_0}I_{A_{mk}}(x)|$$

$$=|f(x)-\frac{k_0}{m}|\leqslant\frac{1}{m}.$$

于是

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\mu_n(f)\geqslant\underline{\lim}_{n\to\infty}\mu_n(f_m)-\frac{1}{m}$$

$$\geqslant\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\underline{\lim}_{n\to\infty}\mu_n(A_{mk})-\frac{1}{m}$$

$$\geqslant\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\mu(A_{mk})-\frac{1}{m}$$

$$=\mu(f_m)-\frac{1}{m}\geqslant\mu(f)-2/m.$$

命 $m\to\infty$，即得

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\mu_n(f)\geqslant\mu(f)\ .\qquad\blacksquare$$

现在，我们考虑乘积空间。设 S 为任一可数集。$\mathscr{S}_f$ 为 S 的有限子集的全体。对于每 $\Lambda\subset S$，作乘积空间

$$E^{\Lambda}=\prod_{u\in\Lambda}E,\quad \mathscr{E}^{\Lambda}=\prod_{u\in\Lambda}\mathscr{E}_u$$

任给 $\boldsymbol{P}\in\mathscr{P}(E^S)$，定义有限维分布

$$\boldsymbol{p}_{\Lambda}(\underset{u\in\Lambda}{\times}B_u)=\boldsymbol{P}[x\in E^S: x_u\in B_u,\ u\in\Lambda]$$
$$B_u\in\mathscr{E}_u,\ u\in\Lambda\in\mathscr{S}_f.$$

则$\{p_{\Lambda}: \Lambda\in\mathscr{S}_f\}$是相容的。反之，由 Колмогоров 扩张定理知，对于任给的相容族$\{p_{\Lambda}: \Lambda\in\mathscr{S}_f\}$，它唯一决定一个$\boldsymbol{P}\in\mathscr{P}(E^S)$。这样，$\boldsymbol{P}=\{p_{\Lambda}: \Lambda\in\mathscr{S}_f\}$总有明确的意义。另一方面，我们可视$\{x_u: u\in S\}$为取值于$(E,\mathscr{E})$、以$u\in S$为参数的随机过程（坐标过程），故我们也称$\boldsymbol{P}\in\mathscr{P}(E^S)$为一个随机场。

在$(E^{\Lambda},\mathscr{E}^{\Lambda})$上，我们可以定义距离

$$\rho_{\Lambda}(\overline{x},\overline{y})=\sum_{u\in\Lambda}\rho_u(x_u,y_u),\quad \overline{x},\overline{y}\in E^{\Lambda}.$$

在$\mathscr{P}(E^S)$上，我们定义有限维分布弱收敛拓扑为：

$$p_{\Lambda}^n\xrightarrow{\omega}q_{\Lambda},\quad \Lambda\in\mathscr{S}_f$$

此处 $\boldsymbol{P}_n=(P_{\Lambda}^n: \Lambda\in\mathscr{S}_f)$，$\boldsymbol{Q}=(q_{\Lambda}: \Lambda\in\mathscr{S}_f)$.

这个拓扑即是由如下开集：

$$\left\{\boldsymbol{P}: \left|\int_{E^{\Lambda}}\varphi(\overline{x})p_{\Lambda}(d\overline{x})-\int_{E^{\Lambda}}\varphi(\overline{x})q_{\Lambda}(d\overline{x})\right|<\varepsilon\right\}$$
$$\varepsilon>0,\ \Lambda\in\mathscr{S}_f,\ \varphi\in C_b(E^{\Lambda}),$$
$$\boldsymbol{Q}=(q_{\Lambda}: \Lambda\in\mathscr{S}_f)\in\mathscr{P}(E^S)$$

生成的。自此以后，$\mathscr{P}(E^S)$上的拓扑均指此拓扑。

(14.1.6) **定理** 集$\mathscr{M}\subset\mathscr{P}(E^S)$相对紧的充要条件是：存在紧函数族$\{h_u: u\in S\}$和常数族$\{C_u: u\in S\}$，使

$$\int_E h_u(z)p_{\{u\}}(dz)\leqslant C_u,\quad u\in S.$$

对于每 $\boldsymbol{P}=\{p_{\Lambda}: \Lambda\in\mathscr{S}_f\}$ 成立。

证 先证：$\mathscr{M}$ 是相对紧的当且仅当：对于每 $\Lambda\in\mathscr{S}_f$，测度族 p_{Λ}：

$$\boldsymbol{P}=\{p_\Lambda:\ \Lambda\in\mathscr{S}_f\}\in\mathscr{M}$$

依距离 ρ_Λ 是 E^Λ 上的相对紧集。必要性是显然的。为证充分性，注意由假设和对角线程序，可取 $\boldsymbol{P}^n=\{p^n_\Lambda:\ \Lambda\in\mathscr{S}_f\}$，使得$\{p^n_\Lambda\}_{n=1}^\infty$ 对于每 $\Lambda\in\mathscr{S}_f$ 弱收敛于$\overline{p_\Lambda}$。显然 $\{\overline{p_\Lambda}:\ \Lambda\in\mathscr{S}_f\}$ 是相容的，故 $\overline{\boldsymbol{P}}=\{\overline{p_\Lambda}:\ \Lambda\in\mathscr{S}_f\}\in\mathscr{P}(E^S)$ 且 $\boldsymbol{P}^n$ 依有限维分布弱收敛于 $\overline{\boldsymbol{P}}$。

其次，应用上段的结果于 $\Lambda=\{u\}$，表明我们的条件是必要的。另一方面，如 h_u 是紧函数 $(u\in S)$，则对 $\Lambda_0\in\mathscr{S}_f$，

$$h_{\Lambda_0}(\overline{x})\equiv\max_{u\in\Lambda_0} h_u(x_u),\quad \overline{x}\in E^{\Lambda_0}$$

也定 (E^Λ,ρ_Λ) 上的紧函数。由假设

$$\int_{E^{\Lambda_0}} h_{\Lambda_0}(\overline{x})p_{\Lambda_0}(d\overline{x})\leqslant\sum_{u\in\Lambda_0}C_u,$$

$$\boldsymbol{P}=\{p_\Lambda:\ \Lambda\in\mathscr{S}_f\}\in\mathscr{M}.$$

应用定理 (14.1.4) 于紧函数 h_{Λ_0}，得知$\{p_{\Lambda_0}:\ \boldsymbol{P}\in\mathscr{M}\}$ 是相对紧的，故条件也是充分的。 ▌

§14.2 平稳分布的存在性

在本节和下一节中，我们将研究定理(6.7.6)中所所构造出来的无穷粒子系统的平稳分布的存在性和唯一性。为此，我们总假定定理 (6.7.6) 的条件满足。其中 $p(x)$取为 $\sum_{u\in S}\rho_u(x_u,\theta_u)k_u$。

下述结果适应于一般情形。

(14.2.1) **引理** 设 $(E,\mathscr{E})$ 为任意的可测空间。$P(x,dy)$ 为其上的转移概率函数。如果存在 $h\in{}_r\mathscr{E}_+$ 和 $0\leqslant C<\infty$, $0\leqslant c<1$使

$$\int P(x,dy)h(y)\leqslant C+ch(x),\quad x\in E$$

则对于 $P(x,dy)$的每一平稳分布 π，我们有

$$\int\pi(dx)h(x)\leqslant C/(1-c).$$

证 由假设和归纳法易证：若以 $P^{(n)}(x,dy)$ 表 $P(x,dy)$ 的 n 重卷积，则

$$\int P^{(n)}(x,dy)h(y)\leqslant C(1+c+\cdots+c^{n-1})+c^n h(x),$$

$$x\in E,\ n\geqslant 1.$$

取

$$h^{(N)}=h\wedge N,\ 1\leqslant N<\infty$$

则由

$$\int\pi(dx)\,h^{(N)}(x)=\int\pi(dx)\int P^{(n)}(x,dy)h^{(N)}(y)$$

得

$$\int\pi(dx)\,h^{(N)}(x)\leqslant\int\pi(dx)\varlimsup_{n\to\infty}\int P^{(n)}(x,dhy)^{(N)}(y)$$

$$\leqslant\int\pi(dx)C/(1-c)=C/(1-c).$$

然后命 $N\uparrow\infty$，便得所述断言。 ▮

(14.2.2) **定理** 假定对于每 $u\in S$，存在紧函数 $h_u\in {}_r\mathscr{E}_+$，使得

$$(14.2.3)\qquad \rho_u(x_u,\theta_u)\leqslant h_u(x_u),\ \sup_{u\in S}h_u(\theta_u)\,k_u<\infty,$$

而且存在常数 K：$0\leqslant K<\infty$ 和常数 η：$0<\eta<\infty$ 使

$$(14.2.4)\qquad \int q_n(x,dy)\,(h_n(y)-h_n(x))$$

$$\leqslant K-\eta h_n(x),\ x\in E^{A_n},\ n\geqslant 1^{*)}.$$

此处

$$h_n(x)=\sum_{n\in A_n}h_u(x_u)k_u.$$

---

*). 此处及随后的 E^{A_n} 与 (6.7.6) 前一段的定义相同.

那么

(i) 对每 $n\geqslant 1$，过程 $P_n(t,x,\cdot)$ 有平稳分布．它的每一平稳分布 π_n 满足

$$(14.2.5)\qquad \int \pi_n(dx)h_n(x)\leqslant K/\eta.$$

(ii) 过程 $P(t,x,\cdot)$ 也有平稳分布 π，它可作为 $\{\pi_n\}_1^\infty$ 的弱极限得到，而且满足：

$$(14.2.6)\qquad \int \pi(dx)h(x)\leqslant k/\eta,$$

此处 $h(x)=\sum_{u\in S}\rho_u(x_u,\theta_u)k_u$.

证 分四步完成.

(a) 首先，由条件（14.2.4）和比较定理易证

$$(14.2.7)\qquad \int P_n(t,x,dy)h_n(y)\leqslant e^{Kt}-1+e^{-\eta t}h_n(x),\quad x\in E^{A_n},\ n\geqslant 1.$$

记 $\mathscr{P}_n$ 为 $P_n(t,x,\cdot)$ 的平稳分布的全体，固定 $t>0$，使用引理（14.2.1）得

$$(14.2.8)\qquad \int \pi_n(dx)h_n(x)\leqslant (e^{Kt}-1)/(1-e^{-\eta t})\qquad \pi_n\in\mathscr{P}_n$$

但左方与 t 无关．命 $t\searrow 0$ 即得（14.2.5）.

(b) 固定 $t>0$，以 $\mathscr{P}_n^{(t)}$ 表示离散参数马氏过程 $P_n^{(m)}(t,x,\cdot)=P_n(mt,x,\cdot)$ 的平稳分布的全体．往证 $\mathscr{P}_n^{(t)}\neq\phi$ 而且是紧集.

为此，改记

$$C=e^{Kt}-1,\quad c=e^{-\eta t}$$

$$P(x,dy)=P_n(t,x,dy)$$

则由 (a) 知

$$\int P(x,dy)h_n(y)\leqslant C+ch_n(x), x\in E^{A_n}.$$

由于每 h_u 是紧函数，而

$$[x\in E^{A_n}: h_n(x)\leqslant d]\subset \underset{u\in A_n}{X}[h_u\leqslant dk_n^{-1}]$$

右方为 E^{A_n} 中的紧集. 再则，作为下半连续函数之和，h_n 也是下半连续的；从而 $[h_n(x)\leqslant d]$ 为 E^{A_n} 中的闭集，故也是紧集. 这表明 h_n 是 E^{A_n} 上的紧函数. 另一方面，由定理 (6.7.6) 的末项断言知，作为 E^{A_n} 到概率测度集上的映射，$x\to P(x,dy)$ 关于弱拓扑连续，因而对于每一个关于距离 ρ_{A_n} 有界 Lipschitz 连续的函数 φ，$x\to\int P(x,dy)\varphi(y)$ 连续. 利用这些事实，便可证明 $\mathscr{P}_n^{(l)}\neq\phi$；而且对于每 $\pi_n\in\mathscr{P}_n^{(l)}$，(14.2.8) 式成立. 这些事实证明有独立的意义，详见 (14.2.10). 进而，由 $x\to\int P(x,dy)\varphi(y)$ 的连续性 (14.2.8) 式及定理 (14.1.6) 立知 $\mathscr{P}_n^{(l)}$ 是紧集.

(c) 试证：$\mathscr{P}_n\neq\phi$.

记 $\mathscr{P}_n^{(m)}=\mathscr{P}_n^{(2^{-m})}$，则 $\mathscr{P}_n^{(m)}\downarrow$，$m\uparrow$. 这样，由 ($b$) 所证明的紧性，$\bigcap_{m=1}^{\infty}\mathscr{P}_n^{(m)}\neq\phi$. 往证

$$\bigcap_{m=1}^{\infty}\mathscr{P}_n^{(m)}=\mathscr{P}_n.$$

显然有 $\bigcap_{m=1}^{\infty}\mathscr{P}_n^{(m)}\supset\mathscr{P}_n$. 今设 $\pi_n\in\bigcap_{m=1}^{\infty}\mathscr{P}_n^{(m)}$. 对每 $t\geqslant 0$，取二进制小数 $t_k\to t$, $k\to\infty$. 则对于每 $f\in{}_b\mathscr{E}^{A_n}$，

$$\int_{E^{A_n}}\pi_n(dx)\int_{E^{A_n}}P_n(t,x,dy)f(y)$$
$$=\lim_{k\to\infty}\int_{E^{A_n}}\pi_n(dx)\int_{E^{A_n}}P_n(t_k,x,dy)f(y)$$

$$=\int_{E^{\Lambda_n}}\pi_n(dx)f(x).$$

第一步用到引理（6.1.1）．这表明 $\pi_n\in\mathscr{P}_n$。

（d）最后，我们证明过程 $P(t,x,\cdot)$ 有所述的平衡分布。

任取一个序列 $\pi_n\in\mathscr{P}_n$，$n\geqslant1$．由（14.2.5）得

$$\int\pi_n(dx)h_u(x)\leqslant K/(\eta k_u)\ \equiv C_u<\infty,\ u\in\Lambda_n,\ n\geqslant1;$$

当 $u\notin\Lambda_n$ 时，上式平凡．由此及定理（14.1.6）知，$\{\pi_n\}_1^\infty$ 关于有限维分布弱收敛拓扑是相对紧的，从而存在子列 $\{\pi_{n_k}\}_{k=1}^\infty$，使得 π_{n_k} 依上述拓扑收敛于 π．往证 π 是 $P(t,x,\cdot)$ 的一个平稳分布．为此，只需证：对于每 $\alpha\in\mathscr{S}_f$，每一个只依赖于 α 中坐标、关于 p_α 有界 Lipschitz 连续的 f，有

$$\int_{E_0}\pi(x)\,f(x)=\int_{E_0}\pi(dx)\int_{E_0}P(t,x,dy)f(y).$$

注意由（14.2.5）得

$$\int\pi_n(dx)h_m(x)\leqslant K/\eta.\ \ m<n.$$

然后由定理（14.1.5）得

$$\int\pi(dx)h_m(x)\leqslant K/\eta.$$

命 $m\to\infty$，便得（14.2.6）．特别地，

$$\int\pi(dx)p(x)<\infty. \tag{14.2.9}$$

现在，所需的等式可由（6.7.24），（6.7.25），（14.2.5）和（14.2.9）得到：

$$\int_{E_0}\pi(dx)\int P(t,x,dy)f(y)$$

$$=\lim_{m\to\infty}\int_{E_0}\pi(dx)\int P_m(t,x^{\Lambda_m},dy)f(y)$$

$$=\lim_{m\to\infty}\lim_{i\to\infty}\int_{E_0}\pi_{n_k}(dx)\int P_m(t,x^{\Lambda_m},dy)f(y)$$

$$\overset{(\varepsilon)}{=}\lim_{m\to\infty}\lim_{k\to\infty}\int_{E_0^{(N)}}\pi_{n_k}(dx)\int_{E^{\Lambda_m}}P_m(t,x^{\Lambda_m},dy)f(y)$$

$$\overset{(\varepsilon)}{=}\lim_{k\to\infty}\int_{E_0^{(N)}}\pi_{n_k}(dx)\int_{E^{\Lambda_{n_k}}}P_{n_k}(t,x^{\Lambda_{n_k}},dy)f(y)$$

$$=\lim_{k\to\infty}\int_{E_0^{(N)}}\pi_{n_k}(dx)\int_{E^{\Lambda_{n_k}}}P_{n_k}(t,x,dy)f(y)$$

$$\overset{(\varepsilon)}{=}\lim_{k\to\infty}\int_{E_0}\pi_{n_k}(dx)\int_{E_0}P_{n_k}(t,x,dy)f(y)$$

$$=\lim_{k\to\infty}\int_{E_0}\pi_{n_k}(dx)f(x)=\int\pi(dx)f(x). \qquad \blacksquare$$

(14.2.10) **定理** 设 $(E,\rho,\mathscr{E})$ 为完备可分距离空间，$P(x,dy)$ 为其上的转移函数。对于每一个有界 Lipschitz 连续函数 f，$\int P(x,dy)f(y)$ 关于 x 连续。如果存在 E 上的有限紧函数 h 和常数 $0\leqslant c<1$，$0\leqslant C<\infty$，使

$$\int P(x,dy)h(y)\leqslant C+ch(x),\quad x\in E.$$

则对于每 $x_0\in E$，存在 $P(x,dy)$ 的平稳分布 π_{x_0}，使得

$$(14.2.11)\quad \int\pi_{x_0}(dx)h(x)\leqslant\max\{C+ch(x_0),C(1-c)^{-1}\}.$$

证 用 S 表示整数集。取 $\Omega=E^S$，并赋乘积 σ 代数 $\mathscr{F}$。证明的主要思路是构造 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的概率测度（随机场）$\boldsymbol{P}$，使得

$$(14.2.12)\quad \boldsymbol{P}[\xi_m\in B\mid\xi_n:\ n<m]=\boldsymbol{P}(\xi_{m-1},B)$$
$$m\in S,\ B\in\mathscr{E}$$

即构造马氏场 $\boldsymbol{P}$。然后在此基础上，构造过程 $\{\xi_m:\ m\in S\}$ 的平稳分布。一旦完成了这一步，那么 $\pi(dx)\equiv\boldsymbol{P}[\xi_0\in dx]$ 便是 $P(x,dy)$ 的一个平稳分布。以下先用三步完成马氏场的构造，然后在第四步构造 $\{\xi_m:\ m\in S\}$ 的平稳分布。

(a) 首先注意，对于每 $\Lambda\in\mathscr{S}_f$ 和任一 $\tilde{x}=\{\tilde{x}_u\in E:\ u\in S\}$，存在唯一的 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的概率测度 $\boldsymbol{P}$，使

$$\boldsymbol{P}[\xi_m = \tilde{x}_m] = 1, \quad m \notin \Lambda,$$

$$\boldsymbol{P}[\xi_m \in B \mid \xi_n:\ n \leqslant m-1] = P(\xi_{m-1}, B), \quad m \in \Lambda.$$

事实上，表 $\Lambda = \{m_0, m_1, \cdots, m_k\}$. 视 $\tilde{x}_{m_0-1}$ 和 $\tilde{x}_{m_k+1}$ 为吸收壁。我们可用如下方式构造有限时间参数 $\{m_0-1, m_0, m_0+1, \cdots, m_k, m_k+1\}$ 马氏过程：

$$P(m_0-1, x;\ m_0, dy) = \delta(x, \tilde{x}_{m_0-1}) P(x, dy),$$

$$P(m_0, x; m_0+1, dy) = \begin{cases} P(x, dy), & \text{如 } m_1 = m_0+1, \\ \delta(\tilde{x}_{m_0+1}, dy), & \text{如 } m_1 \neq m_0+1. \end{cases}$$

余下类推. 然后将它唯一扩张到 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上.

此后，我们将把这个测度记作 $\boldsymbol{P}^{\Lambda}_{\{\tilde{x}_u:\, u \notin \Lambda\}}$. 它导出有限维乘积空间 $(E_\Lambda, \mathscr{E}_\Lambda)$ 上的概率分布 $p^{\Lambda}_{\{\tilde{x}_u:\, u \notin \Lambda\}}$.

(b) 记

$$\mathscr{G}_D = \{\boldsymbol{P}^{\Lambda}_{\{\tilde{x}_u:\, u \notin \Lambda\}} : h(\tilde{x}_u) \leqslant D < \infty,\ u \notin \Lambda \in \mathscr{S}_f\},$$

试证：$\mathscr{G}_D$ 是相对紧的.

由定理 (14.1.6)，我们只需证明

$$(14.2.13) \quad \int_E h(x_m)\, dp^{\Lambda}_{\{\tilde{x}_u:\, u \notin \Lambda\}} \leqslant \max(C + cD,\ C(1-c)^{-1}),$$

$$m \in \Lambda.$$

表 $\Lambda = \{m_0, m_1, \cdots, m_k\}$. 当 $m = m_0$ 时，

$$\int_E h(x_{m_0})\, dp^{\Lambda}_{\{\tilde{x}_u:\, u \notin \Lambda\}}$$

$$= \int \boldsymbol{P}^{\Lambda}_{\{\tilde{x}_u:\, u \notin \Lambda\}}(\xi_{m_0-1} \in dx) \int P(\xi_{m_0-1}, dy) h(y)$$

$$= \int P(\tilde{x}_{m_0-1}, dy) h(y) \leqslant C + ch(\tilde{x}_{m_0-1}) \leqslant C + cD.$$

假设对于某 $m_l (l < k)$ 已真，那么

$$\int_E h(x_{m_l+1})\, dp^{\Lambda}_{\{\tilde{x}_u:\, u \notin \Lambda\}}$$

$$=\int \boldsymbol{P}^{\Lambda\sim}_{\{x_n:u\in\Lambda\}}(d\xi_{m_{l+1}-1})\int P(\xi_{m_{l+1}-1},dy)h(y)$$

$$\leqslant\int \boldsymbol{P}^{\Lambda\sim}_{\{x_n:u\in\Lambda\}}(d\xi_{m_{l+1}-1})[C+ch(\xi_{m_{l+1}-1})]$$

$$\leqslant C+c\int \boldsymbol{P}^{\Lambda\sim}_{\{x_n:u\in\Lambda\}}(d\xi_{m_{l+1}-1})h(\xi_{m_{l+1}-1})$$

如 $m_{l+1}-1\notin\Lambda$，则上式右方显然$\leqslant C+cD$。否则，由归纳假设知，上式右方

$$\leqslant C+c\max\{C+cD,\ C(1-c)^{-1}\}$$

$$\leqslant\max\{C+cD,\ C(1-c)^{-1}\}.$$

(c) 任取 $x_0\in E$。命 $D=h(x_0)$。由 (b) 知，存在 $\mathscr{S}_f\ni\Lambda_n\uparrow S$，$n\to\infty$，使 $\boldsymbol{P}_n=\boldsymbol{P}^{\Lambda_n}$ 弱收敛于 $(\Omega,\ \mathscr{F})$ 上的概率测度$\overline{\boldsymbol{P}}$。现在，由定理 (14.1.5) 和 (14.2.13) 得

$$(14.2.14)\qquad \int h(\xi_m)d\overline{\boldsymbol{P}}\leqslant\max\{C+ch(x_0),C(1-c)^{-1}\},$$

$$m\in S.$$

往证$\overline{\boldsymbol{P}}$满足 (14.2.12)。为此，只需就有界 Lipschitz 连续的 φ 和有界连续函数的 $\psi(x_n:\ l\leqslant n\leqslant m-1)$ $(l\in S)$ 证明：

$$\int\varphi(\xi_m)\psi(\xi_n:\ l\leqslant n\leqslant m-1)d\overline{\boldsymbol{P}}$$

$$=\int\left[\psi(\xi_n:\ l\leqslant n\leqslant m-1)\int P(\xi_{m-1},dy)\ \varphi(y)\right]d\,\overline{\boldsymbol{P}}.$$

由于上式对于每一个 $\boldsymbol{P}_N$ 代替 $\overline{\boldsymbol{P}}$ 成立，因此，由弱收敛性及关于 $P(x,dy)$的连续性假设，上式对于$\overline{\boldsymbol{P}}$ 亦成立。

(d) 过程$\{\xi_m:\ m\in S\}$的平稳分布的构造。

以 $(\overline{p}_\Lambda:\ \Lambda\in\mathscr{S}_f)$ 表示由上述 $\overline{\mathrm{P}}$ 导出的有穷维分布族。由于它们相互唯一确定，我们也可以写成 $\overline{\mathrm{P}}=(\overline{p}_\Lambda:\ \Lambda\in\mathscr{S}_f)$。

取 $S_m=\{-m,\cdots,-1,0,1,\cdots,m\}$，记$s+\Lambda=\{s+u:u\in\Lambda\}$。命

$$p^m_\Lambda[x_u\in B_u,\ u\in\Lambda]$$

$$= \frac{1}{2m+1} \sum_{s \in S_m} \overline{p}_{s+\Lambda}[x_{s+u} \in B_u,\ u \in \Lambda].$$

显然 $\boldsymbol{P}_m = (p^m_\Lambda:\ \Lambda \in \mathscr{S}_f)$ 是一个有限维分布的相容族．往证 $\boldsymbol{P}_m$ 满足（14.2.12）．为此，我们只需对于 n，$\Lambda \in \mathscr{S}_f$，$\Lambda \subset (-\infty, n)$ 和有界可测的 φ 和 $\psi(\xi_l:\ l \in \Lambda)$，证明

$$\int \varphi(\xi_n) \psi(\xi_l:\ l \in \Lambda) d\boldsymbol{P}_m$$

$$= \int \left[\psi(\xi_l:\ l \in \Lambda) \int P(\xi_{n-1},\ dy)\ \varphi(y) \right] d\boldsymbol{P}_m.$$

今证之：

$$\int \varphi(\xi_n) \psi(\xi_l:\ l \in \Lambda) d\boldsymbol{P}_m$$

$$= \int \varphi(x_n) \psi(x_l:\ l \in \Lambda) dp^m_{\Lambda \cup \{n\}}$$

$$= \frac{1}{2m+1} \sum_{s \in S_m} \int \varphi(\xi_{s+n}) \psi(x_{s+l}:\ l \in \Lambda) d\, \overline{p_{s+(\Lambda \cup \{n\})}}$$

$$= \frac{1}{2m+1} \sum_{s \in S_m} \int \varphi(\xi_{s+n}) \psi(\xi_{s+l}:\ l \in \Lambda) d\overline{\boldsymbol{P}}$$

$$= \frac{1}{2m+1} \sum_{s \in S_m} \int \psi(x_{s+l}:\ l \in \Lambda) \int P(x_{s+n-1}, dy)\ \varphi(y) d\, \overline{\boldsymbol{P}}$$

$$= \frac{1}{2m+1} \sum_{s \in S_m} \int \psi(x_{s+l}:\ l \in \Lambda) \int P(x_{s+n-1}, dy) \varphi(y) d\overline{p_{s+(\Lambda \vee \{n\})}}$$

$$= \int \psi(x_l:\ l \in \Lambda) \int P(x_{n-1}, dy) \varphi(y) dp^m_{\Lambda \cup \{n\}}$$

$$= \int \psi(\xi_l:\ l \in \Lambda) \int P(\xi_{n-1}, dy) \varphi(y) d\boldsymbol{P}_m.$$

我们已证得 $\boldsymbol{P}_m$ 满足（14.2.12）．另一方面，由（14.2.14）得

$$\int h(\xi_u) d\boldsymbol{P}_m \leqslant \max\{C + ch(x_0),\ C(1-c)^{-1}\},$$

$$u \in S,\ m \geqslant 0.$$

现在，同前面一样,我们可证：存在$\{\boldsymbol{P}_m: m\geqslant 0\}$的子列，无妨设其自身，使得$\boldsymbol{P}_m$弱收敛于$\boldsymbol{P}$，而且$\boldsymbol{P}$满足（14.2.12）和(4.2.11)．最后，对于每$\Lambda\in\mathscr{S}_f$和可测函数$\varphi(x_u: u\in\Lambda)$,$|\varphi|\leqslant 1$我们有

$$\left|\int\varphi(\xi_u: u\in\Lambda)\,d\boldsymbol{P}_m-\int\varphi(\xi_{n+u}: u\in\Lambda)d\boldsymbol{P}_m\right|$$

$$=\frac{1}{2m+1}\left|\sum_{s\in S_m}\int\varphi(x_{s+u}: u\in\Lambda)\,d\,\overline{p}_{s+\Lambda}\right.$$

$$\left.-\sum_{s\in S_m}\int\varphi(x_{s+n+u}: u\in\Lambda)d\,\overline{p}_{s+n+\Lambda}\right|$$

$$\leqslant\frac{2n}{2m+1}\to 0,\qquad m\to\infty,\ n\in S.$$

故$\boldsymbol{P}$是一个平稳分布． ▌

§14.3 平稳分布的唯一性

本节给定粒子系统平稳分布唯一性的充分条件．它同时也给出了遍历性条件．

(14.3.1) **定理** 在定理（6.7.6）的条件下，如果(6.7.8)中的耦合：

$$(14.3.2)\qquad \widetilde{\Omega}_{n,n}\,p_w(x_1,x_2)$$
$$\leqslant\sum_{u\in\Lambda_n}c_{uw}p_u(x_1,x_2)+c_w(n)(1+p(x_1)+p(x_2))$$
$$x_1,x_2\in E_0,\ w\in\Lambda_n,\ n\geqslant 1$$

其系数还满足

$$(14.3.3)\qquad \sum_{u\in S}c_{uw}\leqslant-\eta<0;$$

$$(14.3.4)\qquad \sum_{u\in S}|c_{uw}|\leqslant K<\infty.$$

那么，我们有

(i) 过程 $P(t,x,\cdot)$ 至多只有一个满足

$$(14.3.5)\qquad \int_{E_0}\pi(dx)p(x)<\infty$$

的平稳分布 π。事实上，若 π 是满足上式的平稳分布，则对每 $x\in E_0$ 和 $\alpha\in\mathscr{S}_f$，

$$(14.3.6)\qquad R_\alpha^z(P(t,x,\cdot)\ ,\ \pi)\leqslant K(\alpha,x)e^{-\eta t}.$$

此处 $K(\alpha,x)$ 为与 t 无关的常数。

(ii) 如果 (14.3.2) 对于一切 $x_1,x_2\in E^{\Lambda_n}$ (n 固定) 成立且 $c_w(n)=0$，$w\in\Lambda_n$。则过程 $P_n(t,x,\cdot)$ 至多只有一个满足

$$(14.3.7)\qquad \int_{E^{\Lambda_n}} p_{\Lambda_u}(x,\theta)\pi_n(dx)<\infty$$

的平稳分布 π_n。而且，若 π_n 为满足上式的平稳分布，则对每 $x\in E^{\Lambda_n}$，

$$(14.3.8)\qquad R_{\Lambda_n}(P_n(t,x,\cdot),\ \pi_n)\leqslant K_n(x)e^{-\eta t}$$

此处 $K_n(x)$ 与 t 无关. 特别地，过程 $P_n(t,x,\cdot)$ 遍历. 即对每 $x\in E^{\Lambda_n}$，当 $t\to\infty$ 时，$P_n(t,x,\cdot)$ 弱收敛于 π_n。

证 由 (6.7.9)，(6.7.18) 和条件 (14.3.4) 得

$$\begin{aligned}(14.3.9)\qquad & R_w(P(t,x_1,\cdot)\ ,\ P(t,x_2,\cdot))\\ &\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}R_w(P_n(t,x_1,\cdot),\ P_n(t,x_2,\cdot))\\ &\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}(e^{B_n^* t}p_\cdot(x_1,x_2))(w)\\ & w\in S;\ x_1,x_2\in E_0.\end{aligned}$$

现在，我们不难使用估计式(14.3.9)来完成结论 (i) 的证明。表

$$e^{B_n t}=(c_{uw}^{(n)}(t):\ u,w\in\Lambda_n)$$

$$e^{Bt}=(c_{uv}(t):\ u,v\in S).$$

则由条件 (14.3.3) 得

$$\sum_{u\in\Lambda_n}c_{uw}^{(n)}(t)\leqslant e^{-\eta t},\ w\in\Lambda_n.$$

从而

$$(14.3.10)\qquad \sum_{u\in S}c_{uw}(t)\leqslant e^{-\eta t},\ w\in S.$$

使用（14.3.9），（14.3.10）和 $R_\alpha(\alpha\in\mathscr{S}_f)$ 的凸性，我们得到

$$R_\alpha(P(t,x,\cdot),\pi)=R_\alpha(P(t,x,\cdot),\int\pi(dy)P(t,y,\cdot))$$
$$\leqslant\int_{E_0}\pi(dy)R_\alpha(P(t,x,\cdot),P(t,y,\cdot))$$
$$\leqslant\sum_{w\in\alpha}\sum_{u\in S}c_{uw}(t)\left[p_u(x,\theta)+\int_{E_0}p_u(y,\theta)\pi(dy)\right]$$
$$\leqslant\sum_{w\in\alpha}\sum_{u\in S}c_{uw}(t)\left[p(x)+\int_{E_0}p(y)\pi(dy)\right]$$
$$\leqslant K(\alpha,x)e^{-\eta t}.$$

这便完成了（i）的证明．类似地可证（ii）． ∎

（14.3.11）**例** 线性增长过程（6.6.2）．

取 $c_u(x_u)=x_u$，$x\in E_0$，$u\in S$．由于 θ 为吸收态，从而平稳分布的存在性是平凡的．定理（4.3.1）所对应的唯一性条件是 $\lambda_1+M<\lambda_2+1$．

（14.3.12）**例** Schlögl 模型（6.6.3）．

仍取 $c_u(x_u)=x_u$，$x\in E_0$，$u\in S$．相应于定理（4.3.1）的唯一性条件是 $c_3+M<0$．为得到平稳分布的存在性条件，取 $h_u(x_u)=x_u$，$u\in S$．若直接使用估计式

$$\sum_{y\neq x}q_s(x,y)(\|y\|-\|x\|)\leqslant\|\beta\|+(c_1+M)\|x\|,$$

则相应于定理（14.2.2）的条件是 $c_1+M<0$．然而，我们将证明：对于 Schlögl 模型（有限程情形），平稳分布总存在．为此，要选取适当的 $K\geqslant0$ 和 $\eta>0$，使（14.2.4）成立．

简记

$$b_u(i)=\lambda_1\binom{i}{2}a_u+\lambda_4b_u,\qquad i\geqslant0;$$
$$a_u(i)=\lambda_2\binom{i}{2}+\lambda_3i,\qquad i\geqslant0.$$

任取 $\eta>0$，并记

$$d=\sup\left\{(M+\eta-\lambda_3)i+\lambda_1\binom{i}{2}a_u-\lambda_2\binom{i}{3}: \ i\geqslant 0, u\in s\right\}.$$

易见 $0\leqslant d<\infty$. 再取

$$K=\lambda_4\sum_u b_u k_u+d\sum_u k_u$$

则 $0<K<\infty$。另一方面

$$\Omega_n h_n(x)=\sum_y q_n(x,y)[h_n(y)-h_n(x)]$$

$$=\sum_{u\in\Lambda_n}(b_u(x_u)-a_u(x_u))k_u$$

$$+\sum_{u\in\Lambda_n}x_u\sum_{v\in\Lambda_n}P(u,v)[h_n(x-e_u+e_v)-h_n(x)]$$

$$\leqslant\sum_{u\in\Lambda_n}[Mx_u+b_u(x_u)-a_u(x_u)]k_u.$$

从而

$$\Omega_n h_n(x)+\eta h_n(x)\leqslant\sum_{u\in\Lambda_n}[(M+\eta)x_u+b_u(x_u)-a_u(x_u)]k_u$$

$$=\sum_{u\in\Lambda_n}b_u k_u+\sum_{u\in\Lambda_n}\left[(M+\eta-\lambda_3)x_u+\lambda_1\binom{x_u}{2}a_u-\lambda_2\binom{x_u}{3}\right]k_u$$

$$\leqslant\sum_{u\in\Lambda_n}b_u k_u+d\sum_{u\in\Lambda_n}k_u\leqslant K.$$

故条件 (14.2.4) 成立. ∎

§14.4 补充与注记

§14.1 的主要结果属于 Dobrushin [1]. 定理 (14.2.10) 是该文定理 1 的特款. Basis [2] 曾研究了平稳分布的存在性，这里的更为一般的结果 (14.2.2) 是新的. §14.3 的结果基本

上属于 Basis [2]，这里作了改进.

定理 (14.3.1) 也适用于定理 (6.7.29) 中所构造的过程. 至于平衡分布的存在性，也有类似于定理 (14. 2. 2) 的结果，详见黄力平的论文和笔者的 [8].

参考文献

（依姓氏的字母顺序排列，仅有一篇者略去编号〔1〕）

Andjel, E. D. , Invariant measuires for zero range process, Ann. of Prob. 1982, 10:3. , 527—547.

Austin,D. G., Some differentiation properties of Markoff transition probability functions, Proc. Amer. Math. Soc. , 7(1956), 756—761.

Васерищ тейн, Л. Н. , Марковские процессы на счётном произведеним Лространств, описывающие большие системы автоматов. Проблемы передаци информации, V.3 (1969), 64—73

Басис, В. Я., (Basis, V. Ya)

〔1〕Бесконецномерные Марковские процессы с почти локальным взаимодействием компонеит, Теория вероят, и её примен., XXI, 4 (1976) , 27—740. 7

〔2〕Stationarity and ergodicity of Markov interacting processes, Multicomponent Random Systems, edited by R.L. Dobrushin and Ya. G.Sinai, Marcel Dekker, Inc. 1980. 37—58.

Bharucha-Reid, A. T. , Elements of the Theory of Markov Processes and Their Applications, McGraw-Hill Book Co. 1960（中译本，杨纪柯、吴立德译. 上海科技出版社，1979）.

Billingsley, P. Convergence of Probability Measures, New York:John Wiley and Sons. 1968.

Blumenthal, R. M. and Getoor, R. K. ,Markov Processes and Potential Theory. Academic Press. 1968.

陈安岳，双有限有势Q过程的构造，数学年刊，5:2, (A) (1984) ,

153—164
陈安岳、张汉君，可逆Q过程存在准则（已投数学学报）。
陈木法
[1] 一类算子方程的最小正解，北京师大学报，1979.3.，66—73
[2] 抽象空间中的可逆马尔可夫过程，数学年刊，1980，Vol，1.，437—451
[3] 有限流出有势Q过程，数学学报，1982，Vol.25 136—166
[4] 马链的基本耦合，北京师大学报，1984.4. 3—10
[5] Infinite dimensional reaction-diffusion processes，数学学报，英文版，1985.
[6] Couplings for jump processes，（已投数学学报，英文版）。
[7] Existence theorems for interacting particle systems with non-compact state spaces，中国科学，1986.
[8] Stationary distributons of infinite particle systems with non—compact statc spaces，preprint.
[9] 概率核的存在性与转移概率的可微性（已投北京师大学报）。
陈木法、程汉生。ωB方程及其在瞬时Q过程构造论中的应用，北京师大学报，1981.4. 1—15.
Chen, M. F., Stroock, D. W., $\lambda\pi$-invariant measures, Lecture Notes in Mathematics, 1983, Vol. 986, 205—220.
陈木法、郑小谷，抽象空间中q过程的唯一性准则，中国科学，中文版 1982，No.4.298—308；英文版1983，No.1. 11—24.
Chung, K. L（钟开莱）
[1] Some new developments in Mavkov Chains, Trans. Amer. Math. Soc., 1956, Vol. 81. 195—210
[2] Markov Chains with Stationary Transition Probabilities. Springer-Verlag, 1967
[3] Lectures on Boundary Theory for Markov Chains, Princeton, New Jersey, 1970
Cohn, D. L., Measure Theory, Birkhäuser, 1980.
戴永隆，Gibbs态与可逆随机场，数学学报，29：1(1986)，103—111.

Derman, C., Some constribution to the thcory of denumerable Markov chains. Trans. Amer. Math. Soc., 1955, Vol. 55, 541—555

丁万鼎、陈木法，紧邻速度函数的拟可逆测度，数学年刊，1981，Vol. 2., 47—59

Ding Wen-ding, Zheng Xiao-gu, Ergodic thcorems for linear growth processes with diffusion, preprint.

Добрущин, Р. Л. (Dobrushin, R. L.), Задание системы случайных величин при помощи условных распрелелений, Теория вероят. и её иримен., 1970, XV, 3, 469—497

Dobrushin, R. L. and Sinai, Ya. G. Mathematical problems in statistical mechanics, Math.Phy. Review., 1980, Vol. 1.

Doeblin, W., Exposé de la théorie des chaînes simples constantes de Markov à un nombre fini d'états, Rev. Math. Union Interbalkanique 1938, 2. 77—105

Doob, J. L.

[1] Markoff chains-denumerable case, Trans. Amer. Math. Soc. 1945, Vo. 158, 455—473

[2] Stochastic Processes, Wiley, New York. 1953

Durrett, R., An introduction to infinite particle systems. Stoch. Proc. Appl. 11, 1981, 109—150.

Dynkin, E. B. (Дынкин, Е. Б.)

[1] Markov Processes, Sprnger-Verlag, 1965

[2]*) Boundary theorey of Markov processes (the discrete case), Russian Math. Surveys, 1969, 24:2, 1—42.

[3] Integral representation of excessive measures and excessive functions, Uspehi Mat. Nauk 27 (163), 1972, 43—80.

*)：文[2]—[4]均收入文集[5]

[4] Minimal excessive measures and functions, Trans.Amer. Math. Soc., 258, 1980, 217—240.

[5] Markov Processes and Related Problems of Analysis, Lecture Note Series 54, London Math. Soc. Cambrige Univ. Press. 1982

Feller, W.

[1] On the integro-differential equations of purely discontinuous Markoff process. Trans. Amer. Math. Soc., 48, 1940, 488—515, ibid, 58 (1945), 474

[2] Boundaries induced by nonnegative matrices, Trans.Amer. Math. Soc., 83. (1956), 19—54

[3] On boundaries and latered conditions for the Kolmogorof differential equations, Ann. Math. 65 (1957), 527——570.

[4] Notes to my paper "On boundaries and lateral condition. for the Kolmogoroff differential equetions," Ann. Math 68 (1958), 735—736

[5] An Introduction to Probability and its Applications, Vol. II. Wiley. New York, 1966.

Foster, F. G., On the stochastic matrices associated with certain queueing problems, Ann. Math. Statist, 1953, Vol. 24, 355—360

Freedman, D., Markov Chains, Springer-Verlag, 1983.

Fukushima, M., Dirichlet Forms and Markov Processes, North Holland Math. Lib. series 23, (1980).

Fukushima, M., Stroock, D. W. Reversibility of solutions to martingale problem, Adv. Math.

Georgii, H. O., Canonical Gibbs States, Lecture Notes in Mathematics. 761, 1979, Springer-Yerlag.

Getoor, R. K., Markov Processes: Ray Processes and Right Processes, Springer-Verlag, Lectwre Notes in Mathematics.

440 (1975) .

Greven, A., A critical phenomenon for the "coupled branching process", preprint.

Griffeath, D.

[1] Additive and Cancellative Interacting Particle Systems, Lecture Notes in Mathematics, 724 (1979), Springtr-Verlag.

[2] Coupling methods for Markov processes, Studies in Probability and Ergodic Theory, edited by G. C. Rota, 1978

关肇直

[1] 拓扑空间概论，科学出版社，1958

[2] 泛函分析讲义，高等教育出版社，1958

龚光鲁．钱敏．

二阶微分算符导出的马氏过程及其可逆性．见钱敏、侯振挺等．

Haken, H. , Synergetics, 3rd edition, Springer-Verlag, 1983.

Harris, T. E. , Transient Markov chains with stationary measures, Proc. Amer. Math. Soc. 8 (1957) , 937—942.

Holley, R., A class of interaction in an infinite particle systems, Adv. in Math. 5 (1970) , 291—309

Holley, R. , Liggett, T. M.

Generalized Potlatch and smoothing processes, Z. Wahrs. 55 (1981) , 165—195.

Holley, R. , Stroock, D. M.

[1] A martingale approach to infinite systems of interacting processes, Ann. Prob. 4 (1976) , 195—228

[2] L_2-theory for the stochastic Ising model, Z. Wahrs. 35 (1976) , 87—101.

侯振挺

[1] Q过程的唯一性准则，中国科学，中文 2 (1974) , 115—130; 英文 XV (1974) , 141—159

[2] Q过程的唯一性准则，湖南科学技术出版社，1982.

侯振挺、陈木法
[1] 马尔可夫过程与场论，摘要，科学通报，中文，20 (1980)，913—916；英文，25:10 (1980)，807—811. 全文见钱敏、侯振挺等.
[2] 强马氏性研究，长沙铁道学院学报，1979.
[3] 有势 Q 过程的若干例子，同上.
[4] 一类 Q 过程的有势性，北京师大学报，3—4 (1980)，1—12.
侯振挺、郭青峰.
[1] 齐次可列马尔可夫过程构造论中的定性理论，4 (1976)，239—262.
[2] 齐次可列马尔可夫过程，科学出版社，1978.
侯振挺、郭青峰、陈木法.
可逆 Q 过程，见钱敏、侯振挺等.
侯振挺、汪培庄
概率流的分解定理，数学年刊，1:1 (1980)，139—148
侯振挺、汪培庄、陈木法.
可逆生灭过程. 见钱敏、侯振挺等.
胡迪鹤
[1] 抽象空间中的 q 过程的构造理论，数学学报，16:2 (1966).
[2] 论纯间断的马尔可夫过程，武汉大学学报，4 (1978)，1—18；1 (1979)，15—38.
Hunt, G. A., Markoff chains and Martin boundaries. Illinois J. Math. 4 (1960), 313—340.
Kendall, D. G.,
[1] Some problems in the theory of queues, J. Roy, Stat. Soc. (B), 13 (1951), 151—185
[2] Unitary dilations of one-parameter semiqroups of Markov transition operators, and the corresponding integral representations for Markov processes with a countable infinite states. Proc. London Math. Ⅲ. Ser. 2 (1959), 417—431
[3] Some amalytical properties of continuous stationary Markov transition functions, Trans. Amer. Math. Soc. 78

(1955), 529—540.

Kingman, J. F. C.

[1] Markov transition probabilities Ⅲ; general state spaces, Z. Wahrs. 10 (1968), 87—101.

[2] Regenerative Phenomena, Wiley, New York, 1972.

Колмогоров, А. Н. (Kolmogorov, A. N.)

[1] über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Math. Ann. 104 (1931), 415—458

[2] Zur theorie der Markoffschen ketten, Mathematische Annalen, 112 (1936), 155—160

[3] On the differentiability of the transition probabilities in homogeneous Markov processes With a denumerable number of states. Uĕenye Zapiski MGY 148, Mat. 4(1951), 53—59.

李世取. 混合型无穷质点马氏过程的有势性和可逆性, 数学年刊, 4:6(A), (1983), 773—780.

Lee, T. D., Yang. C. N. (李政道、杨振宁).

Statistical theory of equations of state and phase transitions I., Phys. Rev., 87 (1952), 404—409; Ⅱ. Phys. Rev. 87 (1952), 410--419.

Liggett, T. M.

[1] Existence theorem for infinite particle systems. Trans. Amer. Math. Soc., 165 (1972), 471—481

[2] An infinite particle system with zero range interactions. Ann. of Prob. 1 (1973), 240—253

[3] Interacting Particle Systems, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 1985

Liggett, T. M., Spitzer, F.

Ergodic theorems for coupled random walks and other systems with locally interacting components. Z. Wahrs. 56 (1981), 443—468.

Loevé, M. , Probability Thcory, 3rd ed. New York, 1963.
Lyons, T. , A simple criterion for transience of a reversible Mavkov chain, Ann. of Prob. 1983, Vol. 11. No. 2. 393—402
McCoy, B. M. , Wu Tai Tsun
The Two-Dimensional Ising Model, Harvard Univ. Press. Cambridge, Massachusetts, 1973
Miller, R. G. , Stationary equations in continuous time Markov chains, Trans. Amer. Math. Soc. 109 (1963) , 35—44.
Nash-Williams, C. S_T. J. A. , Random walks and electric currents in networks. Proc. Cam. Phil. Soc. 55. (1959) , 181—194
Neveu, J., Mathematical Foundations of the Calculus of Probability, Holden-Day Inc. 1965.
Nicolis, G. , Prigogine, I.
Self-Organization in Nonequilibrium Systems, John Wiley & Sons, 1977
Parthasarathy, K. R.,Probability Measures on Metric Spaces, New York, Academic Press. 1967.
Preston, C.
[1] Gibbs States on Countable Sets, Cambridge Tracts in Maths. No. 68, London, Cambridge Unrv. Press. 1974
[2] Random Fields,Lecture Notes in Mathematics, 534(1976). (严士健、陈木法、丁万鼎译：随机场，北京师大出版社，1982)。
钱敏平
[1] 平稳马氏链的可逆性，北京大学学报，4 (1978) ，
[2] 不可逆性和细致平衡与环流分解。收入下面的书中。
钱敏、侯振挺等。
可逆马尔可夫过程，湖南科技出版社，1979。
Rachev,S. T.,Minimal metrics in the random variables space, Pub. Inst. Stat. Univ. XXVII, fasc. 1. (1982) , 1—26
Reuter, G. E. H.

[1] Denumerable Markov processes, Acta Math. , 97(1957), 1—46.

[2] Denumerable Markov processes (II) , J. London Math, Soc. , 34 (1959) , 81—91.

[3] Competition processes, Proc,Fourth Berkeley Symposium on Math. Statist. and Prob. Vol. 2. , 421—430, 1961. .

[4] Denumerable Markov processes (III) , J. London Math Soc. , 37 (1962) , 63—73.

[5] Denumerable Markov processes (IV) , On C. T. Hou's uniqueness theorem for Q semigroups, Z. Wahrs. 33(1976), 309—315.

Ren, Kai-long (任开隆) .

Potentiality and reversibility for the N-Spin-flip processes and the N-generalized spin-flip-processes, Acta Math. Sci(China), 3 (1983) , 300—320.

Silverstein, M. L. , Symmetric Markov Processes, Lecture Notes in Mathematics, 426 (1976) , Springer-Verlag.

Spitzer, F.

[1] Interacting of Markov processes, Adv. in Math., 5(1970), 246—290.

[2] Infinite systems with locally interacting components, Ann. of Prob. , 9:3 (1981) , 349—364.

Stroock, D. W.

[1] Lectures on Infinite Interacting Systems, Lectures in Math. , Kyoto Univ. , 11. (1978) , Kinokuniya Book-Store Co. , Ltd.

[2] On the spectrum of Markov semigroups and the existence of invariant measures, Functional Analysis in Markov Processes, Proceedings. Edited by M. Fukushima, Springer-Verlag, 1981, 287—307.

Stroock, D. W. , Varadhan, S. R. S.

Multidimensional Diffusion Processes, Springer-Verlag, 1979.
唐守正，自旋变相过程的可逆性，数学学报，25（1982），306—314.
唐守正、刘秀芳，自旋变相过程的多元耦合，北京师大学报，1979.
Veech, W. The necessity of Harris' condition for the existence of a stationary measure, Proc. Amer. Math. Soc. 14(1963), 856—860.
王梓坤
[1] 随机过程论，科学出版社，1965.
[2] 生灭过程与马尔科夫链，科学出版社，1980.
Williams, D.
[1] On the construction problem for Morkov chains, Z. Wahrs., 3 (1964), 227—246.
[2] The Q-matrix problem, Lecture Notes in Mathematics, 511 (1976), 216—234.
[3] Diffusions, Markov Processes, and Martingales, Vol: Foundations, Wiley, 1979.
吴立德. 可数马尔科夫过程状态的分类，数学学报，15:1 (1965)，32—41.
许宝騄，欧氏空间上纯间断的时齐马尔科夫过程的概率转移函数的可微性，北京大学学报，3（1958），257—270.
Хинчин, А. Я., Математический Методы Теории Массового Обслуживания, Изд. АН. СССР. Москва, 1955(张里千、殷涌泉译：公用事业理论的数学方法，科学出版社，1958).
严士健，无穷质点马氏过程，北京师大出版社，
严士健，陈木法
[1] 环流分解的稳定性和自组织现象，数学物理学报，3:4 (1983)，407—418（中文）；4:1 (1984)，13—26（英文）
[2] Multidimensional Q-processes, Chin. Ann. of Math., 7B (1), 1986, 90—110.
Yan, S. J., Chen, M. F. and Ding, W. D. Potentiality and reuersibility for general speed functions, Chinese Ann. Math., (I). 3:5 (1982), 572—586; (II),

3:6 (1982), 705—720.

严士健、李占柄.

非平衡系统的概率模型及 Master 方程的建立，物理学报，29(1980)，139—152.

严士健、王隽骧、刘秀芳

概率论基础，科学出版社，1982

杨向群. 可列马尔科夫过程构造论，湖南科技出版社，1981.

Yosida, K. Functional Analysis, Fifth edition, Springer-Verlag, 1978.

曾文曲，两类无穷质点马氏过程的可逆性，数学年刊，4A(6)，1983，763—772.

张建康，广生灭过程的性质，数学物理学报，4:2 (1984)，241—259

郑小谷

[1] 抽象空间中的有势马尔科夫过程，北京师大学报，(I) 4 (1981)，15—32; (II). 1 (1983)，1—10.

[2] Qualitative theory for q-processes in abstract space, Acta Math. & Phys. Vol. 2., No. 1. 1982.

[3] Feller's boundary in abstrait spaces, Chin. Ann. of Math. 4B(3), 1983, 267—284

郑小谷、丁万鼎

广义线性增长过程的存在定理，已投数学物理学报.

郑小谷、刘秀芳

具有可数基的拓扑空间上转移概率的可微性，北京师大学报，1(1984)，25—35.

Zolotarev, V. M., Probability metrics, Theory of Probability and its appl. XXVIII, 2 (198), 278—302.

名词索引

三 画

四 画

五 画

九 画

十 画

十一画

十二画

十三画以上